UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

BINDING LIST AUG 1 1923

7320

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. BOUQUET, *président*.

BERTRAND.

HERMITE.

SERRET.

TISSERAND.

DARBOUX.

PHILIPPON, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

10534 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Math
B

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, MANSION, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME IX. — ANNÉE 1885.

(TOME XX DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179853
24/4/23

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1885

QA
1
B8
v.20

Depuis le commencement de l'année dernière notre ami, M. Tisserand, publie, avec la collaboration de plusieurs astronomes éminents et sous les auspices de l'Observatoire de Paris, un nouveau Recueil périodique, le *Bulletin astronomique,* destiné principalement à faire connaître les travaux d'Astronomie et de Mécanique céleste, publiés soit en France, soit à l'étranger ; ayant par conséquent un but analogue à celui que nous nous efforçons d'atteindre, depuis quatorze ans, pour l'ensemble des sciences mathématiques. Les rédacteurs du Bulletin ont salué avec joie l'apparition du nouveau journal. Pour éviter toute répétition et pour donner une marque de sympathie à une entreprise qui a déjà fait ses preuves, ils ont décidé de supprimer à partir de 1885 tout compte rendu se rapportant à l'Astronomie ou à la Mécanique céleste proprement dite. Cette décision explique le changement que nous faisons subir à partir du présent numéro au titre de notre publication. Le *Bulletin des Sciences mathématiques* fera tous ses efforts pour conserver et pour mériter l'appui bienveillant que tant de géomètres illustres ont accordé au *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.*

η

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BIANCHI (L.). — SULLE CURVE A DOPPIA CURVATURA. 12 p. in-4°.

M. Lie a montré comment, par de simples quadratures, on pouvait, d'une courbe à torsion constante, déduire une infinité de courbes qui correspondent à la courbe primitive, de telle façon que les arcs correspondants soient égaux, que la torsion soit la même que pour la courbe primitive et que les rayons de première courbure varient d'après une loi déterminée (*Archiv der Mathematik og Naturvideskab,* t. V, p. 329). M. Bianchi démontre et généralise d'une façon très élégante les propositions de M. Lie et donne diverses propositions analogues à celle qui vient d'être énoncée.

Soit C une courbe gauche; soient x, y, z; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$; $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ les coordonnées d'un de ses points et les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale, de la binormale en ce point; soient enfin ρ, T les rayons de première et de deuxième courbure et s l'arc de la courbe.

Les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = x + T(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\cos\xi), \\ y_1 = y + T(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\cos\eta), \\ z_1 = z + T(\cos\theta\cos\gamma + \sin\theta\cos\zeta), \end{cases}$$

où l'on regarde θ comme une fonction de s et qui s'interprètent immédiatement, définissent une courbe C_1; si l'on suppose que θ satisfasse à l'équation

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\theta}{T},$$

et que T soit constant, la différentiation des formules (1) donne facilement les formules suivantes :

$$\cos\alpha_1 = \cos^2\theta\cos\alpha - \sin\theta\cos\lambda + \sin\theta\cos\theta\cos\xi,$$
$$\cos\xi_1 = -\sin\theta\cos\theta\cos\alpha - \cos\theta\cos\lambda - \sin^2\theta\cos\xi,$$
$$\cos\lambda_1 = -\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\cos\xi,$$
$$T_1 = T, \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{2\sin\theta}{T} - \frac{1}{\rho},$$

relatives aux éléments de la courbe lieu du point x_1, y_1, z_1; de ces relations, on déduit sans peine la réciprocité des deux courbes.

On voit par là que, d'une courbe à torsion constante $\frac{1}{T}$, on peut déduire une infinité de courbes ayant la même torsion, situées sur une surface qui est évidemment le lieu des cercles décrits de chaque point de la courbe donnée comme centre, dans le plan osculateur, avec un rayon égal à T; les trajectoires orthogonales de ces cercles sont les courbes cherchées : ce sont des lignes géodésiques de la surface.

Plus généralement, si l'on ne suppose plus que T soit constant, si l'on fait

$$x_1 = \int(\cos^2\theta\cos\alpha - \sin\theta\cos\lambda + \sin\theta\cos\theta\cos\xi)\,ds,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et si l'on suppose encore que θ satisfasse à l'équation

$$\frac{1}{\rho} + \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\theta}{T},$$

on aura encore

$$s_1 = s, \quad T_1 = T, \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{2\sin\theta}{T} - \frac{1}{\rho}:$$

l'équation différentielle que doit vérifier θ est de celles que l'on peut intégrer quand on en connaît une solution θ'.

Si, en effet, on pose alors

$$\varpi = \cot\frac{\theta - \theta'}{2},$$

on aura, pour déterminer w, l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{dw}{ds} + \frac{\cos\theta'}{T} w = \frac{\sin\theta'}{T}.$$

L'étude du cas limite où la courbe (C) se réduirait à une droite conduit l'auteur à la conclusion suivante : les formules

$$x = \int \frac{\operatorname{sh}\varphi \sin\varphi - \operatorname{ch}\varphi \cos\varphi}{\operatorname{ch}^2\varphi} ds,$$

$$y = -\int \frac{\operatorname{sh}\varphi \cos\varphi + \operatorname{ch}\varphi \sin\varphi}{\operatorname{ch}^2\varphi} ds,$$

$$z = \int \operatorname{th}^2\varphi \, ds,$$

où $\operatorname{sh}\varphi$, $\operatorname{ch}\varphi$, $\operatorname{th}\varphi$ désignent le sinus, le cosinus et la tangente hyperboliques de la variable φ, laquelle est elle-même une fonction arbitraire de la variable d'intégration s, définissent une courbe dont les rayons de première et de seconde courbure sont respectivement

$$\rho = \frac{\operatorname{ch}\varphi}{2\varphi'}, \quad T = \frac{1}{\varphi'},$$

en désignant par φ' la dérivée de φ par rapport à s; la fonction $\varphi(s)$ définit une surface conoïde, telle que la génératrice qui rencontre l'axe du conoïde en un point situé à une distance s de la génératrice initiale fasse avec cette génératrice un angle égal à $\varphi(s)$.

Les propositions précédentes se doublent en quelque sorte, en vertu de la remarque suivante : au moyen des formules

$$x_0 = \int \cos\lambda \, ds, \quad y_0 = \int \cos\mu \, ds, \quad z_0 = \int \cos\nu \, ds,$$

on peut, à une courbe C, faire correspondre une courbe C_0, lieu du point x_0, y_0, z_0, de sorte que la tangente, la binormale, la normale principale de l'une quelconque des deux courbes soient respectivement parallèles à la binormale, à la tangente, à la normale principale de l'autre; en outre le rayon de courbure de l'une quelconque des deux courbes C, C_0 est égal au rayon de torsion de l'autre.

Par conséquent, d'une courbe à première courbure constante, on pourra déduire une infinité d'autres courbes ayant la même première courbure; toutes ces courbes se déduisent du cercle par des quadratures successives : par exemple, la courbe définie

par les équations

$$x = \int_0^s \operatorname{th}\frac{s}{R}\cos\frac{s}{R}\,ds,\quad y = \int_0^s \operatorname{th}\frac{s}{R}\sin\frac{s}{R}\,ds,\quad z = \int_0^s \frac{ds}{\operatorname{ch}\frac{s}{R}},$$

a la courbure constante $\frac{1}{R}$, son rayon de torsion est $T = \frac{R}{2}\operatorname{ch}\frac{s}{R}$.

J. T.

HAENTZSCHEL (E.). — Ueber das Cartesische Oval. 13 p. in-8°; Greifswald.

Si l'on considère le mode de représentation conforme défini par l'égalité

$$x + iy = p(t + iu),$$

où p désigne la fonction bien connue introduite par M. Weierstrass, les équations $u =$ const., $t =$ const. définiront, pour le lieu du point de coordonnées x, y, deux faisceaux de courbes orthogonales : l'équation en x, y du premier faisceau sera

$$(x^2+y^2)^2 + g_3\rho_1 + \frac{g_2^2}{16} + 4x^2\rho_1^2 - 4x(x^2+y^2)\rho_1$$
$$- 4(x^2+y^2)\left(\rho_1^2 - \frac{g_2^2}{8}\right) + 2x\left(\frac{g_2}{2}\rho_1 + g_3\right) = 0.$$

L'équation du second faisceau se déduira de la précédente en remplaçant $\rho_1 = p(2iu)$ par $\rho = p(2t)$; g_2 et g_3 sont les deux invariants qui figurent dans la définition de la fonction p par l'équation

$$\left[\frac{dp(u)}{du}\right]^2 = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3$$
$$= 4[p(u) - e_1][p(u) - e_2][p(u) - e_3].$$

Ces courbes sont des ovales de Descartes admettant pour foyers les points dont les affixes sont e_1, e_2, e_3. En posant

$$s_1 = x^2 - y^2 - 2e_1 x \quad (e_1^2 = e_2 e_3).$$

. . . . . .

on met l'équation de ces ovales sous la forme connue

$$\frac{\left(\frac{s_1}{r_1}\right)^2}{\lambda - e_1} + \frac{\left(\frac{s_2}{r_2}\right)^2}{\lambda - e_2} + \frac{\left(\frac{s_3}{r_3}\right)^2}{\lambda - e_3} = 0,$$

où l'on suppose $r_1 = -(e_1 - e_2)(e_3 - e_1), \ldots$, et où λ est l'une des deux quantités ρ, ρ_1.

L'auteur termine en établissant d'une façon élégante les formules relatives à la rectification de ces courbes, et cela par une méthode analogue à celle qui a été indiquée par MM. Cayley et Darboux. J. T.

MÉLANGES.

SUR LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES;

PAR M. HERMITE.

La démonstration du théorème de Lagrange, sur le développement en fraction continue de la racine d'une équation du second degré à coefficients entiers, me semble pouvoir être présentée en suivant l'analyse du grand géomètre, sous une forme assez simple, pour être donnée dans l'enseignement.

Soit l'équation proposée

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0,$$

désignons par a et b ses racines, et en supposant que la première qu'on développe en fraction continue soit positive, représentons par $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}$ deux réduites consécutives de rang quelconque. Soit encore λ le quotient complet correspondant à la dernière réduite, la relation

$$a = \frac{P'\lambda + P}{Q'\lambda + Q}$$

donne l'équation du second degré

$$A(P'\lambda + P)^2 + 2B(P'\lambda + P)(Q'\lambda + Q) + C(Q'\lambda + Q)^2 = 0$$

ou bien

$$G\lambda^2 + 2H\lambda + K = 0,$$

les coefficients G, H, K étant aussi des nombres entiers, assujettis à la condition

$$H^2 - GK = (B^2 - AC)(PQ' - QP')^2 = B^2 - AC.$$

Désignons pour un instant par μ la seconde racine de cette équation qui se tire de la relation

$$b = \frac{P'\mu + P}{Q'\mu + Q},$$

elle a pour expression

$$\mu = \frac{P - Qb}{Q'b - P'};$$

et voici la remarque essentielle à laquelle elle donne lieu.

On a d'abord

$$\mu = -\frac{Q}{Q'} + \frac{PQ' - QP'}{Q'(Q'b - P')}$$

ou plutôt

$$\mu = -\frac{Q}{Q'} \pm \frac{1}{Q'(Q'b - P')}.$$

Cela étant, j'emploie la condition suivante, où ε est une quantité inférieure à l'unité en valeur absolue

$$a - \frac{P'}{Q'} = \frac{\varepsilon}{Q'^2};$$

on en tire

$$P' = aQ' - \frac{\varepsilon}{Q'}$$

et par suite

$$\mu = -\frac{Q}{Q'} \pm \frac{1}{Q'^2(b - a) + \varepsilon}.$$

Cette expression montre que, pour des valeurs croissantes de Q', μ est représenté avec une approximation de plus en plus grande par la fraction $-\frac{Q}{Q'}$. La série des équations du second degré en λ, qui toutes ont une racine positive, supérieure à l'unité, présentent donc cette circonstance qu'à partir d'une certaine réduite et pour toutes celles qui suivront, leur seconde racine sera négative et moindre que l'unité en valeur absolue, attendu que Q est inférieur à Q'. C'est dire que les coefficients G et K seront alors et indéfiniment de signes contraires, le coefficient moyen H étant de même signe que K.

La condition

$$H^2 - GK = B^2 - AC$$

permet ainsi de conclure immédiatement qu'ils sont limités et ne peuvent offrir qu'un nombre fini de combinaisons. L'une des équations du second degré en λ se reproduira donc nécessairement, ce qui établit la périodicité.

Dans le tome XIX des *Annales de Gergonne*, p. 294, Galois a donné un théorème d'un grand intérêt, dont la démonstration peut encore être abrégée en la présentant comme il suit :

Soient x une fonction continue immédiatement périodique, $\frac{P}{Q}$ la fraction ordinaire irréductible représentant la période, et $\frac{P_0}{Q_0}$ la réduite qui précède $\frac{P}{Q}$; on aura l'égalité

$$x = \frac{Px + P_0}{Qx + Q_0},$$

d'où

$$Qx^2 + (Q_0 - P)x - P_0 = 0.$$

Cela étant, j'observe qu'en faisant $x = -\frac{1}{\xi}$, la transformée obtenue,

$$P_0\xi^2 + (Q_0 - P)\xi - Q = 0,$$

peut être regardée comme provenant de l'équation

$$\xi = \frac{P\xi + Q}{P_0\xi + Q_0}.$$

Or, on tire facilement de la loi élémentaire de formation des réduites, que le développement de $\frac{P}{P_0}$ en fraction continue offre, dans un ordre inverse, les mêmes quotients incomplets que la fraction $\frac{P}{Q}$, et que $\frac{Q}{Q_0}$ est la réduite qui précède $\frac{P}{P_0}$. Par conséquent, la quantité ξ, ou bien l'unité divisée par la seconde racine de l'équation en x et changée de signe, donne lieu à une fraction continue immédiatement périodique, dont la période est celle de la première racine écrite dans un ordre inverse. C'est le théorème de Galois; l'article de l'illustre géomètre sur les fractions continues a été reproduit dans le *Journal de Liouville*, t. XI, p. 385.

SUR LA SURFACE RÉGLÉE MINIMA;

PAR M. OSSIAN BONNET.

(Extrait d'une lettre à M. Darboux.)

On sait depuis longtemps que l'hélicoïde gauche à plan directeur est la seule surface réglée qui soit minima, c'est-à-dire qui ait en chacun de ses points ses rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires. J'ai donné autrefois dans mon Cours de Géométrie à la Sorbonne une démonstration de ce théorème intéressant qui, par son extrême simplicité, me semble mériter d'être connue; je vais la reproduire ici.

Soit G une génératrice rectiligne quelconque d'une surface réglée minima : considérons la surface du second degré osculatrice tout le long de G. Je dis d'abord que cette dernière surface sera un paraboloïde hyperbolique. En effet, l'indicatrice de Dupin de la surface minima, en un point quelconque M de G, est une hyperbole équilatère, dont la génératrice rectiligne G est une première asymptote et qui, par suite, a pour seconde asymptote la tangente à la surface menée par M perpendiculairement à G; mais le lieu des secondes asymptotes des indicatrices aux différents points de G n'est autre que la surface du second degré osculatrice; donc celle-ci a toutes ses génératrices rectilignes de l'un des systèmes perpendiculaires à une même droite ou parallèles à un même plan : c'est donc un paraboloïde. Ceci posé, prenons, en même temps que la génératrice G, les deux génératrices infiniment voisines G′ et G″ de la surface minima, ces trois droites seront aussi trois génératrices infiniment voisines du second système dans le paraboloïde osculateur tout le long de G; donc elles seront parallèles à un autre même plan. Trois génératrices infiniment voisines quelconques de la surface minima étant parallèles à un même plan, toutes les génératrices sont parallèles à ce plan et la surface minima est une surface à plan directeur [1].

---

[1] On peut démontrer d'une autre manière et plus rigoureusement qu'une surface réglée qui a un paraboloïde pour surface du second degré osculatrice tout le long de chaque génératrice est une surface à plan directeur. Concevons, en effet le cône directeur de la surface considérée et le plan tangent P à ce cône, suivant une génératrice quelconque g parallèle à la génératrice G de la surface;

Imaginons maintenant la ligne de striction C de la surface gauche minima, cette ligne sera, d'après le résultat que nous venons d'obtenir, la courbe de contact du cylindre circonscrit à la surface et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan directeur; donc la tangente à la courbe C en un point quelconque m et la perpendiculaire au plan directeur menée par le même point sont deux tangentes conjuguées, c'est-à-dire deux diamètres conjugués de l'indicatrice de Dupin de la surface gauche au point M; mais la perpendiculaire au plan directeur est une asymptote de l'indicatrice, donc elle se confond avec la tangente à la ligne de striction et celle-ci, ayant dès lors toutes ses tangentes parallèles, est une droite qui d'ailleurs est perpendiculaire au plan directeur.

Cette dernière propriété montre, en second lieu, que toute surface gauche minima est un conoïde droit. Coupons enfin ce conoïde droit par un cylindre de révolution ayant pour axe l'axe du conoïde; l'intersection sera une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes et par suite, d'après ce qu'on a vu plus haut, une ligne asymptotique du conoïde. Cette intersection aura donc en chaque point son plan tangent osculateur tangent au conoïde et par suite normal au cylindre : ce sera donc une ligne géodésique du cylindre droit, c'est-à-dire une hélice, ce qui démontre complètement le théorème énoncé.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. P. NAZIMOW, A MOSCOU.

Prenons deux égalités

$$(1) \qquad B_{m,n} = \sum_{y=0}^{y=p-1} b_{m,y} e^{-\frac{2ny\pi i}{p}},$$

$$(2) \qquad b_{m,y} = \frac{1}{p} \sum_{x=0}^{x=p-1} \left(\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{p}\right) e^{\frac{2mx\pi i}{p}};$$

P sera le second plan directeur du paraboloïde osculateur de la surface tout le long de G; donc il sera non seulement tangent mais encore osculateur au cône tout le long de g. Tous les plans tangents au cône directeur étant en même temps osculateurs, le cône directeur devra se réduire à un plan.

dans ces formules on a $p > m \geqq 0$, $p > n \geqq 0$, p est un nombre premier impair et le symbole $\left(\frac{q}{p}\right)$ est égal à 0, quand q est divisible par p, et $\equiv q^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{p}$, quand q n'est pas divisible par p; en d'autres termes, il est égal à ± 1 dans le dernier cas. Faisons dans la formule (2) $m = 0, 1, 2, \ldots, p-1$; alors on trouvera facilement par sommation

$$(3) \qquad \sum_{z=0}^{p-1} b_{z,y} e^{-\frac{2hz\pi i}{p}} = \frac{1}{p} \sum_{x,z=0}^{p-1}\sum \left(\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{p}\right) e^{\frac{2z(x-h)\pi i p}{p}}.$$

$\sum_{z=0}^{p-1} e^{\frac{2z(x-h)\pi i}{p}} = 0$, quand $x \gtrless h$, et $= p$, quand $x = h$; ainsi l'égalité (3) nous donne

$$(4) \qquad \left(\frac{ah^2 + 2bhy + cy^2}{p}\right) = \sum_{z=0}^{p-1} b_{z,y} e^{-\frac{2hz\pi i}{p}}.$$

Faisons dans la formule (4) $h = n$, $y = m$, $z = y$; il viendra

$$(5) \qquad \left(\frac{an^2 + 2bnm + cm^2}{p}\right) = \sum_{y=0}^{p-1} b_{y,m} e^{-\frac{2ny\pi i}{p}}.$$

Comparons maintenant les coefficients $b_{m,n}$ et $b_{n,m}$. Si x, m et n sont pas divisibles par p, on trouvera toujours de tels ε et δ, que

$$x \equiv ng^{\varepsilon} \pmod{p}, \quad x \equiv mg^{\delta} \pmod{p},$$

g étant racine primitive du module p; alors

$$b_{m,n} = \frac{1}{p}\left[\left(\frac{c}{p}\right) + \sum_{\varepsilon=0}^{p-2}\left(\frac{ag^{2\varepsilon} + 2bg^{\varepsilon} + c}{p}\right) e^{\frac{2mng^{\varepsilon}\pi i}{p}}\right],$$

$$b_{n,m} = \frac{1}{p}\left[\left(\frac{c}{p}\right) + \sum_{\delta=0}^{p-2}\left(\frac{ag^{2\delta} + 2bg^{\delta} + c}{p}\right) e^{\frac{2mng^{\delta}\pi i}{p}}\right];$$

$$b_{m,n} = b_{n,m}.$$

Ainsi il n'y a qu'à démontrer que $b_{m,0} = b_{0,m}$, pour avoir cette

formule

$$(6)\qquad \left(\frac{an^2+2bmn+cm^2}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{x,y=0}^{p-1}\sum\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{p}\right)e^{\frac{2(mx-ny)\pi i}{p}},$$

en supposant que $D = ac - b^2$ n'est pas divisible par p. Pour démontrer l'égalité $b_{m,0} = b_{0,m}$, nous établirons un lemme arithmétique peu connu.

Si α, α', α'', ... est un système complet des résidus quadratiques du module p et β, β', β'', ... un système de résidus non quadratiques, le nombre des non-résidus dans le système $1+\alpha$, $1+\alpha'$, $1+\alpha''$, ... surpassera d'une unité le nombre des résidus; quant aux nombres $1+\beta$, $1+\beta'$, $1+\beta''$, ..., il y aura parmi eux autant de résidus que de non-résidus.

Pour faciliter la démonstration, nous affecterons de l'indice 0 les α et les β pour indiquer qu'ils sont positifs et moindres que p. Soient x, y, z et t les nombres des solutions des équations

$$1+\alpha_0 = \alpha'_0,\quad 1+\alpha_0 = \beta_0,\quad 1+\beta_0 = \alpha_0,\quad 1+\beta_0 = \beta'_0.$$

Premier cas : $p \equiv 1 \pmod 4$. — Dans ce cas $\left(\frac{p-z}{p}\right) = \left(\frac{z}{p}\right)$, $p-1$ est résidu quadratique et ne donne ni résidu, ni non-résidu, quand on l'additionne à 1; ainsi

$$(7)\qquad x+y = \frac{p-3}{2},\quad z+t = \frac{p-1}{2}.$$

Pour la même raison, on peut poser

$$\alpha_0 = p-\alpha'_0,\quad \beta_0 = p-\beta'_0;$$

alors z, y et t représenteront les nombres des solutions des équations

$$1+\beta_0+\alpha_0 = p,\quad 1+\alpha_0+\beta_0 = p,\quad 1+\beta_0+\beta'_0 = p.$$

Ainsi l'on a

$$(8)\qquad z = y.$$

Il est très facile de voir que le nombre des solutions de l'équation $1+\beta_0+\beta'_0 = p$ est le même que le nombre des solutions de la

congruence

$$1 + \beta + \beta' \equiv 0 \pmod{p}.$$

Mais $1 \equiv \beta\beta'' \pmod{p}$, $\beta' \equiv \beta\alpha \pmod{p}$; t est donc le nombre des solutions de la congruence $\beta'' + 1 + \alpha \equiv 0 \pmod{p}$ ou de l'équation $1 + \beta_0 + \alpha_0 = p$,

$$t = y, \tag{9}$$

En résolvant les équations (7), (8) et (9), nous aurons

$$x = \frac{p-5}{4}, \quad y = z = t = \frac{p-1}{4} = x + 1. \tag{10}$$

Deuxième cas : $p \equiv 3 \pmod{4}$. — Dans ce cas $\left(\frac{p-z}{p}\right) = -\left(\frac{z}{p}\right)$ et, par des raisonnements tout semblables à ceux du premier cas, nous parviendrons aux résultats suivants :

$$x = z = t = \frac{p-3}{4}, \quad y = \frac{p+1}{4} = x + 1. \tag{11}$$

Revenons aux coefficients $b_{m,0}$ et $b_{0,m}$,

$$b_{m\,0} = \frac{1}{p}\left(\frac{a}{p}\right)\sum_{x=1}^{p-1} e^{\frac{2mx\pi i}{p}} = -\frac{1}{p}\left(\frac{a}{p}\right), \tag{12}$$

$$b_{0\,m} = \frac{1}{p}\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{ax^2 + 2bxm + cm^2}{p}\right). \tag{13}$$

Supposons que $D = ac - b^2$ n'est pas divisible par p. Si a est divisible par p, b ne l'est pas, et alors $2bx + mc$ parcourt un système de résidus (mod p), quand x prend toutes les valeurs de 0 jusqu'à $p - 1$; ainsi nous aurons

$$b_{0\,m} = \frac{1}{p}\left(\frac{m}{p}\right)\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{2bx + cm}{p}\right) = 0 = b_{m,0}.$$

Si a n'est pas divisible par p,

$$b_{0\,m} = \frac{1}{p}\left(\frac{a}{p}\right)\sum_{z=0}^{z=p-1}\left(\frac{D + z^2}{p}\right). \tag{14}$$

Si D est résidu quadratique, on peut poser

$$z^2 = D\alpha \pmod{p}$$

et alors

$$(14\,bis)\qquad b_{0\,m} = \frac{1}{p}\left(\frac{a}{p}\right)\left[1 + 2\sum\left(\frac{1+\alpha}{p}\right)\right],$$

la somme devant être prise pour tous les α qui sont contenus dans un système de résidus.

Si D est non-résidu, alors nous poserons

$$D\beta \equiv z^2 \pmod{p}$$

et

$$(14\,ter)\qquad b_{0\,m} = -\frac{1}{p}\left(\frac{a}{p}\right)\left[1 + 2\sum\left(\frac{1+\beta}{p}\right)\right],$$

en prenant la somme pour tous les β d'un système de résidus (mod p). Mais, d'après le lemme,

$$\sum\left(\frac{1+\alpha}{p}\right) = -1, \quad \sum\left(\frac{1+\beta}{p}\right) = 0;$$

ainsi

$$(15)\qquad b_{0\,m} = -\frac{1}{p}\left(\frac{a}{p}\right) = b_{m\,0}.$$

La formule (6) est donc démontrée. La formule (6) peut encore s'écrire ainsi

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{an^2 + 2bmn + cm^2}{p}\right) \\ &= \frac{1}{p}\sum_{x,y=0}^{p-1}\sum\left(\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{p}\right)\cos\frac{2(mx - ny)\pi}{p}. \end{aligned}\right.$$

Nous pouvons démontrer aussi les formules (6) et (16) pour le cas où p est un nombre composé, ne contenant pas de diviseurs quadratiques, et où $D = ac - b^2$ n'a pas de diviseurs communs avec p; p est impair. Cette démonstration se fera par la méthode des conclusions de n à $n+1$. Soit $p = p'q$, où q est un nombre premier, ne divisant pas p'; supposons qu'on ait démontré les formules

$$\left(\frac{ak^2 + 2blk + cl^2}{q}\right) = \frac{1}{q}\sum_{\xi,\eta=0}^{q-1}\sum\left(\frac{a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2}{q}\right)e^{\frac{2l\xi - 2k\eta}{q}\pi i}.$$

$$\left(\frac{ak^2 + 2blk + cl^2}{p'}\right) = \frac{1}{p'}\sum_{\lambda,\mu=0}^{p'-1}\sum\left(\frac{a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2}{p'}\right)e^{\frac{2l\mu - 2k\nu}{p'}\pi i}.$$

La multiplication nous donne

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{ak^2-2blk+cl^2}{p}\right) &= \frac{1}{p}\sum\sum\sum\sum_{\xi,\eta=q-1\ \lambda,\mu=p'-1}^{\xi,\eta,\lambda,\mu=0}\left(\frac{a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2}{q}\right),\\ &\times\left(\frac{a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2}{p'}\right)e^{2\pi i\left[l\left(\frac{\xi}{q}+\frac{\mu}{p'}\right)-k\left(\frac{\eta}{q}+\frac{\nu}{p'}\right)\right]}. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$\frac{\xi}{q}+\frac{\mu}{p'}=\frac{x}{p}+\varkappa,\quad \frac{\eta}{q}+\frac{\nu}{p'}=\frac{y}{p}+\varepsilon,$$

où $\frac{x}{p}$ et $\frac{y}{p}$ sont des fractions régulières et $\varkappa$ avec ε sont égaux à 0 ou à 1; alors nous avons

$$(18)\qquad e^{2\pi i\left[l\left(\frac{\xi}{q}+\frac{\mu}{p'}\right)-k\left(\frac{\eta}{q}+\frac{\nu}{p'}\right)\right]}=e^{\frac{2\pi i(lx-ky)}{p}}.$$

Nous savons de la théorie des congruences que x et y prennent des valeurs différentes pour des systèmes différents de ξ et μ, ou de η et λ; aussi, en remplaçant dans (18) la fonction exponentielle par sa valeur en x et y, nous devons donner à x et y toutes les valeurs de 0 à $p-1$. Des congruences

$$p'\xi+q\mu\equiv x \pmod p,\quad p'\eta+q\nu\equiv y \pmod p,$$

nous pouvons déduire

$$\begin{aligned} &p'^2(a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2)\\ &\quad+q^2(a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2)\equiv ax^2+2bxy+cy^2 \pmod p,\\ &\left(\frac{a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2}{q}\right)=\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{q}\right),\\ &\left(\frac{a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2}{p'}\right)=\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{p'}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, au lieu de (17), nous pouvons écrire

$$(19)\quad \left(\frac{ak^2+2blk+cl^2}{p}\right)=\frac{1}{p}\sum\sum_{x,y=0}^{p-1}\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{p}\right)e^{\frac{2(lx-ky)\pi i}{p}}.$$

DÉMONSTRATION DE L'EXISTENCE DES RACINES PRIMITIVES POUR LES MODULES ÉGAUX A DES PUISSANCES DE NOMBRE PREMIER IMPAIR;

PAR M. JOSEPH PEROTT.

Nous considérerons le théorème comme démontré dans le cas où le module est un nombre premier impair. Cela étant ainsi, pour prouver que le module p^n, où p est un nombre premier impair et $n > 1$, admet une racine primitive, il suffit de faire voir (¹):

1° Qu'il existe un nombre A appartenant à l'exposant $p - 1$ (mod p^n);

2° Qu'il existe un nombre B appartenant à l'exposant p^{n-1} (mod p^n).

Le produit de ces deux nombres donnera une racine primitive de p^n.

I. Soit g une racine primitive de p, le nombre g appartiendra à un exposant $h(p-1)$ (mod p^n), car cet exposant doit être un multiple exact de $p - 1$. En faisant $A = g^h$, on aura le nombre cherché.

II. La congruence

$$x^p \equiv 1 \pmod{p^n}$$

a p racines. En effet, si

$$x^p - 1 = (x - 1)X(x)$$

est divisible par p^n, on doit avoir

$$x \equiv 1 \pmod{p^{n-1}},$$

car $X(x)$ ne peut être divisible (²) par p^2. Les racines de la con-

---

(¹) *Disquisitiones arithmeticæ,* art. 55. Cet article appartient au domaine de la théorie des équivalences.

(²) Voici la démonstration de cette proposition bien connue:

On a

$$x^p - 1 \equiv x - 1 \pmod{p}.$$

gruence

$$x^p \equiv 1 \pmod{p^n}$$

devront être cherchées, par conséquent, parmi les nombres

$$1, \quad 1+p^{n-1}, \quad 1+2p^{n-1}, \quad \ldots, \quad 1+(p-1)p^{n-1}.$$

Inversement, tous les nombres précédents satisfont à la congruence en question, car tous ces nombres rendent $x-1$ divisible par p^{n-1} et $X(x)$ par p. La proposition énoncée se trouve ainsi démontrée [1].

La congruence

$$x^{p^2} \equiv 1 \pmod{p^n}$$

admet p^2 racines. En effet, on a

$$x^{p^2}-1 = (x^p-1)\frac{x^{p^2}-1}{x^p-1} = (x-1)X(x).X(x^p),$$

et, comme d'ailleurs on a pour toute valeur de x

$$x^p \equiv x \pmod{p},$$

les expressions $x^{p^2}-1$ et $(x-1)[X(x)]^2$ seront en même temps divisibles ou non divisibles par p^n. On en déduit sans difficulté que les racines de la congruence

$$x^{p^2} \equiv 1 \pmod{p^n}$$

sont les nombres suivants :

$$1, \quad 1+p^{n-2}, \quad 1+2p^{n-2}, \quad \ldots, \quad 1+(p^2-1)p^{n-2},$$

et qu'ils seront, par conséquent, au nombre de p^2. En continuant

---

donc $X(x)$ ne peut être divisible par p que dans le cas où l'on a

$$x-1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Pour $x=1$, on a $X(x)=p$. Quand $x=1+kp^s$ où $s \geqq 1$ et k non divisible par p, on a

$$x^p-1 \equiv kp^{s+1} \pmod{p^{s+2}}:$$

donc $X(1+kp^s)$ est divisible par p et ne l'est pas par p^2.

[1] Ce point établi, tout le reste résulte de la théorie des équivalences. C'est de cette manière qu'on démontrera que le groupe des *formes*, qui sert à déterminer le rapport des nombres des classes des déterminants Dp^n et D (*Disquis. arithm.*, art. 255), admet une racine primitive. Les notions de la théorie des équivalences n'étant pas encore assez répandues, je préfère procéder d'une manière indépendante.

ainsi de proche en proche, on prouvera que les congruences

$$x^{p^{n-2}} \equiv 1 \pmod{p^n},$$
$$x^{p^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p^n}$$

ont respectivement p^{n-2} et p^{n-1} racines. L'existence d'un nombre B appartenant à l'exposant p^{n-1} (mod p^n) est une conséquence immédiate de ce qu'on vient d'établir. En se plaçant au point de vue de la théorie des équivalences, le fait que la congruence

$$x^{p^{n-1}} \equiv 1$$

admet p^{n-1} racines [1] a lieu pour tous les modules M, si l'on désigne par p^{n-1} la plus haute puissance d'un nombre premier divisant $\varphi(M)$.

Le fait que la congruence

$$x^{p^{n-2}} \equiv 1 \pmod{M}$$

admet p^{n-2} racines résulte de ce que la congruence

$$x^p \equiv 1 \pmod{M}$$

n'en admet pas plus de p et ce fait n'a lieu que pour de certains modules.

Il est temps peut-être que les deux théorèmes de Gauss [2] prennent la place qui leur est due dans les Ouvrages élémentaires d'Arithmétique à l'occasion du Chapitre qui traiterait des congruences pures pour un module quelconque. Il vaut infiniment mieux de dire que la congruence

$$x^p \equiv 1 \pmod{M},$$

où p désigne un nombre premier et M un nombre entier quelconque, admet un nombre de racines qui peut être exprimé par p^t, de manière que t soit égal à zéro ou à un nombre entier positif, il vaut mieux, dis-je, énoncer ce théorème I de Gauss que de ne dire absolument rien sur ce sujet. Jusqu'ici on n'a eu l'habitude de considérer les congruences pures que comme des cas particuliers des congruences quelconques, comme si la possibilité de la multiplication entraînait dans tous les cas la possibilité de l'addi-

---

(1) C'est le théorème II de Gauss (*Werke*, t. II, p. 267).

(2) *Werke*, t. II, p. 266-268.

tion, quels que soient les nombres qu'on additionne! Le contraire peut être prouvé facilement par des exemples tirés soit de la théorie des nombres, soit de la théorie des fonctions. Considérons, par exemple, l'ensemble de tous les nombres premiers à un nombre donné M, le produit de deux de ces nombres appartient nécessairement au domaine ainsi défini, ce qui est loin d'avoir toujours lieu quand il s'agit d'une somme de deux nombres du domaine. C'est en introduisant trop tôt l'addition qu'on complique la proposition dont la démonstration fait l'objet de la présente Communication.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SCHWARZ. — Beweis des Satzes, dass die Kugel kleinere Oberflache besitzt, als jeder andere Korper gleichen Volumens. 13 pages in-8°. Göttingen.

Nous résumons brièvement, dans ce qui suit, la démonstration rigoureuse donnée par M. Schwarz de cette proposition célèbre : « De tous les corps qui ont le même volume, c'est la sphère qui a la plus petite surface. »

Tout d'abord, on peut se borner à considérer les corps dont la surface est formée d'un nombre fini de portions de surfaces analytiques, c'est-à-dire ayant en chacun de leurs points le caractère des surfaces algébriques; en effet, Steiner a montré (*Werke*, t. II, p. 300-306) comment, étant donné un corps fini $\mathcal{A}$, dont la surface est S et le volume V et qui n'est point une sphère, on peut construire un corps $\mathcal{A}'$ de même volume V et dont la surface S′ est moindre que S. M. Schwarz déduit de là qu'on peut construire un *polyèdre* $\mathcal{A}'$, ayant même volume que $\mathcal{A}$ et une surface moindre que S; donc, puisque les polyèdres appartiennent à la classe des corps limités par des portions de surfaces analytiques, il suffit d'établir pour de pareils corps la vérité de la proposition en question.

Soit $\mathcal{A}$ un corps limité par un nombre fini de portions de surfaces analytiques, sans points singuliers, dont on désignera l'ensemble par $\mathfrak{W}$; supposons-le rapporté à un système d'axes coordonnés Ox, Oy, Oz situés de telle sorte qu'aucune portion de $\mathfrak{W}$ ne soit parallèle au plan des yz. Par un point quelconque P de $\mathfrak{W}$, dont les coordonnées sont x, y, z, on mène, parallèlement au plan des yz, un plan qui, par son intersection avec $\mathfrak{W}$, détermine une ou plusieurs courbes dont on désignera l'ensemble par $\mathcal{C}_x$. Chaque point de $\mathcal{C}_x$ peut être déterminé individuellement au moyen d'une variable s qui, si $\mathcal{C}_x$ se compose d'une seule courbe fermée, désignera la longueur de l'arc qui sépare le point considéré d'un point fixe de $\mathcal{C}_x$, qui, dans le cas contraire, désignera encore une telle longueur augmentée au besoin de la longueur d'une ou de plu-

sieurs des courbes fermées qui composent $\mathcal{E}_x$, en sorte que, si l'on désigne par $U(x)$ la somme des longueurs de toutes ces courbes, il suffira, pour obtenir tous les points de $\mathcal{E}_x$, de faire varier s depuis zéro jusqu'à $U(x)$. On peut d'ailleurs concevoir que, au moyen d'un nombre fini de plans parallèles au plan des yz, on divise la surface $\mathfrak{W}$ en un nombre fini de portions, telles que, pour chacune d'elles, les coordonnées y, z soient des fonctions, en général continues de x et de s, fonctions pour lesquelles on aura évidemment

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 0, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1.$$

Soient encore, pour chaque point $P(x, y, z)$ qui n'est pas sur une arête,

$$A = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}, \quad B = -\frac{\partial z}{\partial s}, \quad C = \frac{\partial y}{\partial s}.$$

On remarquera que la valeur de A fournit la valeur de l'angle que la normale en P fait avec l'axe des x; il est d'ailleurs permis de supposer que le sens dans lequel on compte l'arc s sur $\mathcal{E}_x$ a été choisi de façon que la direction définie par les trois quantités A, B, C soit, sur la normale en P, la direction qui va de l'extérieur à l'intérieur du corps $\mathcal{A}$. Dans ces conditions, l'intégrale

$$Q(x) = \int_0^{U(x)} \frac{1}{2}\left(y\frac{\partial z}{\partial s} - z\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds$$

sera égale à l'aire totale comprise à l'intérieur de $\mathcal{E}_x$, et l'on établira sans peine les formules suivantes

$$Q'(x) = \frac{dQ(x)}{dx} = \int_0^{U(x)} A\, ds,$$

$$S = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_0^{U(x)} \sqrt{1 + A^2}\, ds,$$

$$V = \int_{x_0}^{x_1} Q(x)\, dx,$$

où S et V désignent respectivement l'aire et le volume de $\mathfrak{W}$ et de $\mathcal{A}$, et où x_0 et x_1 sont les limites inférieure et supérieure des x des points de $\mathfrak{W}$.

Ces notations expliquées, nous abordons le fond de la démon-

stration; elle consiste à prouver d'abord que l'on peut substituer à $\mathfrak{A}$ un corps de même volume et de surface moindre, jouissant de cette propriété que le long de toute courbe telle que $\mathcal{E}_x$ la normale à la surface du corps fasse un angle constant avec l'axe des x, puisque l'on peut substituer à ce dernier corps un corps de même volume et de surface moindre, pour lequel toutes les courbes telles que $\mathcal{E}_x$ soient des cercles : il résultera de ces deux propositions que l'on peut substituer au corps donné $\mathfrak{A}$ un corps de même volume et de surface moindre et qui soit de révolution autour d'une parallèle à l'axe des x, et l'on n'aura plus qu'à prouver qu'à un tel corps on pourra substituer une sphère de même volume et de surface moindre.

Le premier point revient à établir que l'on a

$$(1) \qquad \int_0^{U(x)} \sqrt{1+A^2}\, ds \geqq \sqrt{U^2(x)+Q'^2(x)}$$

et que l'égalité ne peut avoir lieu que si A est, pour la valeur considérée de x, indépendant de s, en sorte que la normale à $\mathfrak{A}$ fasse tout le long de $\mathcal{E}_x$ un angle constant avec l'axe des x; dans ce dernier cas d'ailleurs A est égal à $\frac{Q'(x)}{U(x)}$ et l'égalité est manifeste.

L'inégalité (1) résulte en général de l'identité suivante, où l'on suppose $t = \int_0^s A\, ds$,

$$(a) \quad \sqrt{1+A^2}\left(1 - \frac{1+At}{\sqrt{s^2+t^2}\sqrt{1+A^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\int_0^s \sqrt{1+A^2}\, ds - \sqrt{s^2+t^2}\right);$$

le premier membre est essentiellement positif; il ne peut être nul que si l'on a $sA - t = 0$, et cela ne peut avoir lieu pour toutes les valeurs de s comprises entre zéro et $U(x)$ que si A est indépendant de s; s'il n'en est pas ainsi, puisque t pour $s = U(x)$ est égal à $Q'(x)$, on voit que l'identité précédente entraîne bien l'inégalité (1).

Le second point revient à prouver que l'on a

$$(2) \qquad U^2(x) \geqq 4\pi Q(x)$$

et que l'égalité ne peut avoir lieu que si $\mathcal{E}_x$ se réduit à un cercle; c'est la proposition bien connue : « De toutes les figures planes qui

ont même aire, c'est le cercle pour lequel la longueur de la circonférence est la plus petite. » M. Schwarz en donne une démonstration analytique rigoureuse, que nous laissons de côté, parce que l'esprit de cette démonstration se retrouvera dans ce qui suit. Les inégalités (1) et (2) entraînent la suivante

$$S \geqq \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{4\pi Q(x) + Q'^2(x)}\, dx,$$

et l'égalité ne peut avoir lieu que si le corps $\mathcal{A}$ est un solide de révolution autour d'une parallèle à l'axe des x.

Supposons donc en troisième et dernier lieu que $\mathcal{A}$ soit un corps de révolution autour de l'axe des x, mais non une sphère; on a à prouver l'inégalité suivante

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{4\pi Q(x) + Q'^2(x)}\, dx \geqq \sqrt[3]{36\pi V^2},$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $\mathcal{A}$ est une sphère.

Pour y arriver, M. Schwarz imagine une calotte sphérique, ayant pour base le cercle $\mathcal{C}_x$, cercle dont le rayon $\sqrt{\frac{Q(x)}{\pi}}$ sera désigné dans ce qui suit par r; cette calotte doit être telle que le volume qu'elle limite avec le cercle $\mathcal{C}_x$ soit égal à $\int_{x_0}^{x} Q(x)\, dx$; en outre sa convexité est dirigée du côté des x négatifs. Soit H sa surface; on aperçoit de suite que, entre x_0 et x_1, H est une fonction univoque et continue de x. Si l'on désigne par ω l'angle que, tout le long du cercle $\mathcal{C}_x$, le plan tangent à la sphère qui contient la calotte fait avec le plan tangent au corps de révolution A, on établira sans peine l'identité suivante, analogue à l'identité (a),

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{x_0}^{x} 2\pi r \sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\, dx - H\right] = 2\pi r(1-\cos\omega)\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2};$$

le second membre de cette identité est essentiellement positif, et l'on en conclut

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{4\pi Q(x) + Q'^2(x)}\, dx \geqq H:$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que si ω est nul pour toutes les va-

leurs de l'abscisse comprises entre x_0 et x, il suffit de donner à x la valeur x_1 et de remarquer que H est alors égal à $\sqrt[3]{36\pi V^2}$ pour avoir l'inégalité (3).

Finalement, les inégalités (1), (2), (3) montrent que, pour tout corps $\mathcal{A}$ de volume V et de surface S, on a

$$S \geq \sqrt[3]{36\pi V^2},$$

et que l'égalité ne peut avoir lieu que si $\mathcal{A}$ est une sphère : c'est ce qu'il fallait démontrer. J. T.

RADAU (R.). — TABLES DE L'INTÉGRALE $\psi(Z)$. (*Annales de l'Observatoire de Paris*. Partie théorique, t. XVIII.) Paris, 1883, in-4° de 25 p.

L'intégrale $\psi(Z) = e^{Z^2}\int_Z^\infty e^{-t^2}\,dt$ est l'une de celles qui se présentent fréquemment dans la pratique; elle est employée dans diverses questions de Physique mathématique, dans la théorie des réfractions, dans le Calcul des probabilités, etc. C'est Kramp qui, le premier, a tenté de la réduire en Tables, à l'occasion de ses recherches sur les réfractions; mais ses Tables, que l'on trouve dans l'Ouvrage intitulé : *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres* (Strasbourg, 1799), où il a exposé aussi sa Théorie des facultés numériques, n'ont que peu d'étendue, et les dernières décimales sont souvent inexactes. Bessel a, plus tard, étendu ces Tables jusqu'à $Z = 10$, en prenant pour argument, depuis $Z = 1$ jusqu'à $Z = 10$, $\log Z$ au lieu de Z; mais, chez lui aussi bien que chez Kramp, la dernière décimale est incertaine; l'erreur atteint quelquefois deux ou trois unités. En outre, pour l'usage pratique, ces Tables ne sont guère commodes, à cause de la grandeur des différences, qui rend l'interpolation laborieuse. Il y avait donc quelque intérêt à publier des Tables exactes de la fonction $\psi(Z)$, d'une étendue suffisante pour rendre l'interpolation tout à fait facile.

Telles sont les Tables que nous avons sous les yeux. Elles donnent les logarithmes de $\psi(Z)$ avec sept décimales, pour tous les mil-

lièmes de l'argument Z depuis $Z = -0,120$ jusqu'à $Z = +1,000$, et pour tous les millièmes de l'argument $\log Z$ depuis $\log Z = 0$ jusqu'à $\log Z = 1$.

Elles permettent d'ailleurs d'obtenir $\log \psi(Z)$ à un quart d'unité près, le dernier chiffre étant suivi d'un petit trait toutes les fois qu'il a été forcé.

Dans une courte introduction, l'auteur a exposé les formules qui lui ont servi à calculer les valeurs de $\psi(Z)$. Les séries connues n'étant guère applicables que pour des valeurs de Z inférieures à 2 ou supérieures à 5, il a fallu, depuis $Z = 2$ jusqu'à $Z = 4$, recourir à des formules de réduction, telles que les suivantes :

$$\psi(Z) - \frac{1}{e}\psi(\sqrt{Z^2+1}) = \frac{A_0}{Z} - \frac{A_1}{Z^3} + \frac{A_2}{Z^5} - \ldots$$

ou

$$\psi(Z) - e^{-m}\psi(\sqrt{Z^2+m}) = C_0 L + CL^3 + C_2 L^5 + \ldots,$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{Z^2+m}+Z} = \frac{\sqrt{Z^2+m}-Z}{m},$$

à l'aide desquelles on déduit $\psi(\sqrt{15})$ de $\psi(4)$, $\psi(\sqrt{14})$ de $\psi(\sqrt{15})$, et ainsi de suite, jusqu'à $\psi(2)$. L'auteur donne les valeurs numériques des coefficients A, et celles des coefficients C pour plusieurs valeurs du nombre entier m.

ASCHIERI (F.). — Geometria projettiva e descrittiva. 2 vol. in-8°. Milan; 1883-1884.

En publiant ces *Leçons*, M. Aschieri, professeur à l'Université de Pavie, s'est proposé d'initier le lecteur aux principes et aux méthodes théoriques de la Géométrie projective et descriptive, plutôt que de le familiariser avec les procédés pratiques et les méthodes graphiques que l'on enseigne habituellement en France sous le nom de *Géométrie descriptive*. Ce n'est ni l'art du dessin graphique, ni la confection d'épures compliquées qu'il a en vue, mais bien le développement d'une branche de la Géométrie, sur laquelle du reste d'excellents auteurs ont déjà écrit : il suffit de

citer MM. Fiedler, Reye et Cremona, dont M. Aschieri déclare avoir particulièrement utilisé les Livres pour la composition de ses deux Volumes.

Le premier Volume (*Géométrie projective*) se rapporte principalement à la géométrie du plan et de l'*étoile* (*stella*); les maîtres italiens désignent sous ce nom l'ensemble des droites ou des plans qui passent par un point; c'est la figure corrélative d'un plan considéré comme lieu de droites ou de points.

Adoptant les définitions et les notations de M. Cremona, l'auteur définit les formes fondamentales de première et de seconde espèce : le *faisceau de rayons* passant par un point et situés dans un plan, le *faisceau de plans* passant par un axe, la droite *ponctuée* (*puntegiatta*); l'étoile de rayons ou de plans, le plan *réglé* ou *ponctué*. Toute *opération* (projection d'un point ou section par un plan) effectuée sur une forme reproduit une forme de même espèce; deux formes fondamentales sont dites projectives si l'on peut passer de l'une à l'autre au moyen d'un nombre fini d'opérations. Il étudie ensuite l'homologie plane, les formes harmoniques, les propriétés métriques relatives aux figures projectives, les coniques regardées comme figures homologiques du cercle, traite des propriétés principales de ces courbes: théorèmes de Pascal et de Brianchon, centres, diamètres, axes, etc., définit les formes élémentaires de première espèce et de second ordre : la conique lieu de points ou de tangentes, le cône du second ordre lieu de génératrices ou de plans tangents, l'ensemble des génératrices d'une quadrique gauche, étudie la projectivité de ces formes, développe la théorie de l'involution, introduit la notion de foyer, montre comment on construit les éléments doubles de deux formes élémentaires de première espèce projectives superposées, passe de là à l'étude des éléments doubles de deux formes projectives de seconde espèce superposées, et reprend à ce point de vue la théorie de l'homologie plane. Le reste du Volume est consacré à l'exposition des principes de la Géométrie analytique du plan ou de l'étoile et se termine par la définition généralisée de la *distance* (ou de l'angle) de deux éléments d'un plan ou d'une étoile en partant de la forme quadratique à laquelle M. Cayley a donné le nom d'*absolu*, et par des indications succinctes sur les trois géométries elliptique, parabolique et hyperbolique.

Le second Volume est intitulé *Géométrie descriptive*. M. Aschieri traite, dans la première Partie, de la perspective centrale en prenant pour point de départ la représentation d'une droite par sa trace et son point de fuite, et résout au moyen du cercle des distances, introduit par M. Fiedler, une suite de problèmes élémentaires qu'il est inutile d'énumérer : cette même Partie contient la théorie de l'homologie dans l'espace.

Dans la deuxième Partie, qui ne comprend guère qu'une cinquantaine de pages, l'auteur s'occupe du mode de représentation dû à Monge.

Enfin dans la dernière Partie sont exposées les propriétés élémentaires des courbes algébriques planes ou gauches et des surfaces algébriques : on y trouvera, par exemple, l'établissement des formules de Plücker et quelques indications sur le mode de transformation dû à M. Cremona. J. T.

MÉLANGES.

LES SURFACES POLAIRES INCLINÉES [1];

PAR M. LE Dr SCIPION RINDI.

M. le colonel du Génie Dewulf, dans son Mémoire intitulé : *Essai d'une théorie géométrique des polaires inclinées*, et inséré dans ce Bulletin (2e série, t. II, 1878), appelle *polaire inclinée* d'un point P par rapport à une courbe C le lieu d'un point M dont la droite polaire ordinaire par rapport à C fait un angle constant α avec le rayon vecteur PM ; et, après avoir exposé cette nouvelle théorie, il en fait des applications très élégantes aux faisceaux de courbes, aux développées obliques et aux coniques.

---

[1] Cette étude a paru pour la première fois dans le t. VI des *Annali della Scuola Normale superiore di Pisa* en 1883.

Dans ce travail j'ai essayé d'appliquer la théorie de M. Dewulf aux surfaces en général, et puis en particulier aux surfaces du second degré

I. En suivant la dénomination de M. Dewulf, j'appellerai *polaire inclinée* d'un point P (pôle), pour l'angle α, par rapport à une surface fondamentale S^n, le lieu d'un point M, dont le plan polaire par rapport à S^n est incliné de l'angle α sur le rayon vecteur PM.

II. Les plans polaires [1] des points d'une droite arbitraire r par rapport à S^n forment une développable de la classe $n-1$; il y en a donc $\mu(n-1)$ qui touchent une courbe de la classe μ. Le lieu des points dont les plans polaires touchent une courbe de la classe μ est donc une surface de l'ordre $\mu(n-1)$. Puisque les plans inclinés d'un même angle sur une droite t touchent une même conique K_∞^2 du plan à l'infini, le lieu des points dont les plans polaires font un même angle α avec une droite fixe est une surface de l'ordre $2(n-1)$ [2]. En faisant varier d'une manière quelconque la droite t et l'angle α, le plan à l'infini E_∞ appartient toujours au système des plans inclinés de l'angle α sur t, c'est-à-dire qu'une droite peut être considérée comme inclinée d'un angle quelconque sur E_∞. Donc la surface $S^{2(n-1)}$ contient les $(n-1)^3$ centres de S^n. Le plan E_∞ pouvant être considéré comme tangent double à la conique K_∞^2, si nous faisons passer la droite arbitraire r par un des pôles de E_∞ (centres de S^n), deux intersections de r avec $S^{2(n-1)}$ seront réunies en ce point. La surface $S^{2(n-1)}$ a donc les $(n-1)^3$ centres de S^n pour points doubles.

III. Soit p une droite arbitraire. Chaque point x de cette

---

[1] Ici, comme à l'avenir, on doit entendre par *plan polaire* le *plan polaire ordinaire*, et par *première polaire* la *première polaire ordinaire* par rapport à la surface S^n, qui est supposée générale.

[2] Nous dirons quelquefois dans la suite *la surface* $S^{2(n-1)}$ *d'une droite*, *la surface* $S^{2(n-1)}$ *d'un plan*, pour indiquer ce lieu, et celui des points dont le plan polaire fait un angle constant avec le plan fixe. Il est presque inutile d'observer que ce dernier lieu n'est autre chose que la $S^{2(n-1)}$ d'une normale au plan, pour l'angle complémentaire.

droite détermine un rayon vecteur Px, et par conséquent une surface $S^{2(n-1)}$ de ce rayon. On aura $2(n-1)$ intersections y de la droite p avec $S^{2(n-1)}$. Chaque point y détermine un plan polaire η par rapport à S^n, et les droites qui passent par P et font avec η l'angle α forment un cône du second degré qui est rencontré par p en deux points x. Cette correspondance $[2, 2(n-1)]$ a $2n$ points unis, et le lieu cherché est une surface de l'ordre $2n$.

En faisant passer une droite arbitraire par le pôle P, ses intersections avec la polaire inclinée, hors de P, sont les $2(n-1)$ points de t, dont les plans polaires font l'angle α avec t (§ II). Donc deux des intersections de t avec la polaire inclinée sont réunies en P, c'est-à-dire que cette surface a un point double en P. Si une des $2(n-1)$ intersections tombe encore en P, la droite devient osculatrice au point double. Mais elle doit être inclinée de l'angle α sur le plan polaire de P. Donc :

La polaire inclinée d'un pôle P *par rapport à une surface de l'ordre n est une surface de l'ordre 2n qui a un point double en* P. *Le cône osculateur en* P *est formé par les droites inclinées de l'angle donné* α *sur le plan polaire de* P.

Par conséquent :

Si d'un point donné on conduit des droites inclinées d'un même angle α *sur une surface donnée de l'ordre n, les pieds de ces obliques sont sur une courbe de l'ordre* $2n^2$.

Si R est un point du cône osculateur, le rayon RP fait l'angle α avec le plan polaire de P. On voit donc que ce cône est le lieu des points dont les polaires inclinées passent par P. Nous appellerons ce cône le *cône polaire incliné* du point P, selon la dénomination adoptée par M. Dewulf [1]. On voit de même que le lieu des points dont les cônes polaires inclinés passent par un point fixe R est la polaire inclinée de R.

Supposons maintenant $\alpha = 0$; chaque point x d'une droite arbitraire détermine un rayon vecteur Px. Le lieu des points, dont les plans polaires sont parallèles à Px, est la première polaire du

---

[1] *Mém. cit.*, p. 377.

point à l'infini de Px. Cette surface est rencontrée par p en $(n-1)$ points y. Chaque point y détermine un plan polaire τ_1 ; les droites parallèles à ce plan, conduites par P, forment un plan qui rencontre la droite p en un point. On a donc une correspondance $[1, n-1]$, qui a n points unis, c'est-à-dire que la polaire inclinée pour $\alpha = 0$ est de l'ordre n.

En faisant passer la droite arbitraire par P, on voit qu'une des intersections tombe toujours en P. Les autres intersections sont les $n-1$ points communs à la droite et à la première polaire de son point à l'infini. Si une autre intersection tombe en P, la droite devient tangente en P à la surface. Mais elle doit être parallèle au plan polaire de P. Donc, en appelant *polaire parallèle* la polaire inclinée pour $\alpha = 0$:

La polaire parallèle d'un pôle P *est une surface de l'ordre n, dont le plan tangent en* P *est parallèle au plan polaire de ce point.*

L'intersection de cette surface avec S^n se compose de la courbe de l'ordre $n(n-1)$, intersection de S^n avec la première polaire de P, et de l'intersection de S^n avec le plan E_∞.

Le plan tangent en P à la polaire parallèle est le lieu des points dont les polaires parallèles passent par P. Nous appellerons ce plan *le plan polaire parallèle* de P. On voit très aisément que le lieu des points dont les plans polaires parallèles passent par un point donné est la polaire parallèle de ce point.

Si $\alpha = 90^\circ$ (1), considérons l'étoile (2) Σ des plans qui passent par P. Chaque plan τ de cette étoile coupe E_∞ selon une droite t_∞, qui a un pôle T_∞ par rapport à C^2_∞ (cercle imaginaire de l'infini). Chaque point T_∞ a une première polaire par rapport à S^n. En faisant varier le plan τ, les premières polaires des points T_∞ forment un réseau projectif à Σ. Si nous considérons maintenant une droite r conduite par P, les plans qui passent par r forment un faisceau F ; les points T_∞ correspondant à ces plans sont sur la droite s_∞ polaire du point à l'infini de r par rapport à C^2_∞. Les

(1) Je dois cette élégante démonstration géométrique à mon très cher Maître, le professeur R. de Paolis. J'avais obtenu le même résultat analytiquement.

(2) Étoile ou réseau.

polaires premières de ces points T_∞ forment le faisceau F^{n-1} correspondant à F. Chaque point de la courbe base de F^{n-1} est donc tel que son plan polaire passe par s_∞, c'est-à-dire qu'il est normal à r. On voit donc que, si la droite r et la courbe base du faisceau correspondant ont un point commun, le plan polaire de ce point est normal au rayon vecteur. Le lieu cherché est donc celui des intersections des courbes bases des faisceaux correspondants en deux réseaux projectifs des ordres $1, n-1$, c'est-à-dire une courbe de l'ordre $1+(n-1)^2+n-1=n^2-n+1$ (1), qui passe par les bases des deux réseaux. Cette courbe passe donc par P et par les $(n-1)^3$ pôles de E_∞. La droite qui joint le pôle au point infiniment voisin, situé sur cette courbe, est tangente à la courbe, et normale au plan polaire de P. Donc :

Pour $\alpha=90^\circ$ la polaire inclinée est une courbe de l'ordre n^2-n+1, qui passe par le pôle. La tangente en ce point est normale au plan polaire.

Nous appellerons cette courbe la *courbe polaire normale* de P par rapport à S^n.

La tangente en P à cette courbe est le lieu des points dont les courbes polaires normales passent par P. Appelons cette droite la *droite polaire normale* de P. On voit encore que la courbe polaire normale d'un point donné est le lieu des points dont les droites polaires normales passent par ce même point.

Les $n(n^2-n+1)$ intersections de cette courbe avec la surface fondamentale S^n sont les pieds des normales abaissées sur cette surface du point P. La courbe passant par P, le cône qui la projette de ce point est de l'ordre $n(n-1)$. Donc :

D'un point donné on peut conduire $n(n^2-n+1)$ (2) normales à une surface de l'ordre n, et ces normales sont sur un cône de l'ordre $n(n-1)$.

---

(1) Cremona, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen*, p. 107. Berlin, 1870.

(2) Ce nombre a été trouvé par Rudolfsturm sous la forme $n+m+r$; m étant la classe, r la classe de la section plane de la surface fondamentale (*Math. Ann.*, Bd. VII, p. 567).

La courbe C_{n^2-n+1} et ses propriétés ont été trouvées, par une voie différente, par Steiner (*Crelle's Journal*, Bd. 49, p. 344-45, ou *Gesammelte Werke*, p. 633) (¹).

IV. Supposons que dans la recherche faite au § III la droite arbitraire p passe par un des pôles du plan E_∞, et appelons Q ce point. Quel que soit le pôle P, la surface $S^{2(n-1)}$ d'un rayon quelconque Px a un point double en Q (§ II). Donc deux des points unis de la correspondance tombent toujours en Q, c'est-à-dire que le point Q est double pour la polaire inclinée de P.

Soit p une droite de l'infini. La surface $S^{2(n-1)}$ étant la même pour les droites qui sont parallèles entre elles, on voit que, quel que soit le pôle, si l'angle α est invariable, la correspondance de Chasles sur la droite p reste toujours la même. On a ainsi toujours les mêmes points unis, et une droite arbitraire du plan E_∞ rencontre les polaires inclinées de tous les points de l'espace (pour un même angle α) en $2n$ points qui ne varient qu'avec la droite. Donc :

Les polaires inclinées de tous les points de l'espace ont les $(n-1)^3$ pôles du plan à l'infini pour points doubles, et passent toutes par une courbe fixe de l'ordre $2n$, qui est dans le plan à l'infini.

On pourrait aisément démontrer que les polaires parallèles passent toutes par les $(n-1)^3$ pôles de E_∞, et par la section de S^n avec E_∞.

La courbe polaire normale, quel que soit le pôle, passe par les $(n-1)^3$ pôles de E_∞, et par les n^2-n+1 points fixes de E_∞, qui ont une même droite polaire par rapport à la section de S^n, et au cercle imaginaire C^2_∞. Donc les courbes polaires normales de tous les points de l'espace ont les asymptotes respectivement parallèles (¹).

Si le pôle est un point P_∞ du plan E_∞, la polaire inclinée se compose du plan E_∞ (considéré comme double) et de la surface $S^{2(n-1)}$ des droites qui passent par P_∞. La polaire parallèle se ré-

(¹) *Voir* à ce sujet le Mémoire cité de Sturm (p. 572, note).
(²) Steiner, *Mém. cit.*

duit au plan E_∞ et à la première polaire de P_∞. La courbe polaire normale de P_∞ se compose de la courbe polaire inclinée de P_∞, pour $\alpha = 90^\circ$, par rapport à la section de S^n avec E_∞, et de la courbe d'ordre $(n-1)^2$, lieu des points dont les plans polaires passent par la droite polaire de P_∞ par rapport à C^2_∞.

V. Si, le pôle P étant fixe, on fait varier l'angle α, on a un système de polaires inclinées. Voyons de quelle nature est ce système. En considérant un point R de l'espace, le rayon vecteur PR fait un certain angle α' avec le plan polaire de R. Donc une seule des surfaces du système passe par R, c'est-à-dire :

Les polaires inclinées d'un point fixe, pour toutes les valeurs de α, forment un faisceau.

VI. Supposons α constant, et prenons trois points arbitraires de l'espace A, B, C. Le lieu des points dont les polaires inclinées passent par A est un cône du second degré (§ III) ; il en est de même pour B, C. Il y a ainsi huit pôles, dont les polaires inclinées passent par A, B, C.

On peut donc dire que :

Les polaires inclinées de tous les points de l'espace (pour un même angle) forment un système ∞^3 d'indice 8.

Les polaires inclinées des points d'une droite r forment un système ∞ d'indice 2. En effet, le cône polaire incliné d'un point arbitraire de l'espace est rencontré par r en deux points. Les surfaces de ce système passent par les $2(n-1)$ intersections de r avec sa surface $S^{2(n-1)}$. Ces $2(n-1)$ points de r seront nommés *points polaires inclinés* de la droite, en suivant encore une dénomination de M. Dewulf [1].

Si l'on fait mouvoir le pôle sur r, quand il tombera sur un des $2(n-1)$ points polaires inclinés, la droite r deviendra inclinée de l'angle donné α sur le plan polaire de ce point, c'est-à-dire osculatrice au point double que la polaire inclinée a au pôle.

Pour $\alpha = 0$, il faut observer que les plans polaires parallèles de trois points de l'espace déterminent un point unique. Donc :

---

[1] *Mém. cit.*, § IX.

Les polaires parallèles de tous les points de l'espace forment un système linéaire x^3.

Les polaires parallèles des points d'une droite r forment un faisceau, puisque le plan polaire parallèle d'un point arbitraire coupe r en un point.

VII. On appellera *polaire inclinée* d'une droite t (droite polaire), le lieu d'un point M, dont le plan polaire fait un angle constant φ avec le plan vecteur t M.

Soit d une droite arbitraire de l'espace. Chaque point x de cette droite détermine un plan vecteur tx. Le lieu des points dont les plans polaires font l'angle φ avec tx est une surface $S^{2(n-1)}$ (§ II, Note), qui est rencontrée par d en $2(n-1)$ points y. Chaque point y détermine un plan polaire η. Il y a deux plans qui passent par p et font avec η l'angle φ, et ces plans coupent la droite d en deux points x. On a donc une correspondance $[2, 2(n-1)]$ et par conséquent $2n$ points unis. Si la droite d rencontre la droite fixe t, le plan tx, quel que soit x, coïncide toujours avec le plan td. La surface $S^{2(n-1)}$ du plan td coupe la droite d en $2(n-1)$ points. Donc les deux autres intersections de d avec la polaire inclinée sont réunies au point commun à t et d, c'est-à-dire que la droite t est double pour la polaire inclinée. En faisant mouvoir un point N sur cette surface, jusqu'à ce qu'il vienne tomber sur un point D de la droite t, le plan vecteur t N s'approchera indéfiniment de l'un des deux plans tangents en D, et finira par coïncider avec ce plan. Mais il doit être incliné de l'angle φ sur le plan polaire de N. Donc :

La polaire inclinée d'une droite est une surface de l'ordre $2n$ *qui a la droite donnée pour droite double. Les plans tangents en chaque point de la droite double font l'angle donné* φ *avec le plan polaire de ce point.*

Les deux plans tangents coïncident pour les points de t, dont le plan polaire fait l'angle φ avec t. Il y a donc $(2n-1)$ points uniplanaires.

Ainsi :

Le lieu des points où les plans qui passent par une droite

fixe coupent une surface donnée S^n *sous un angle constant est une courbe de l'ordre* $2n^2$, *qui a les* n *intersections de la droite avec* S^n *pour points doubles.*

Dans une section plane quelconque de S^n *il y a*

$$2n^2 - 2n = 2n(n-1)$$

points, où le plan de la section fait avec la surface un angle donné (différent de 0 *et de* 90°).

Ces points sont les intersections de la section plane avec la surface $S^{2(n-1)}$ de son plan.

Pour $\varphi = 90°$ la polaire inclinée sera appelée *polaire normale.*

Soit encore une droite arbitraire d. Chaque point x de d détermine un plan vecteur tx avec la droite fixe t. Ce plan coupe E_∞ en une droite t_∞. Les plans normaux à tx passent par T_∞, pôle de t_∞ par rapport à C^2_∞. Donc les pôles de ces plans sont sur la première polaire de T_∞, qui est rencontrée par d en $n-1$ points y. A chaque point y correspond un plan qui passe par t et fait un angle droit avec le plan polaire de y; chaque point y donne ainsi un point x. Cette correspondance $[1, n-1]$ a n points unis. Si l'on prend la droite d, de manière qu'elle rencontre la droite fixe t, on voit qu'un des points unis tombe toujours à l'intersection des droites d et t, c'est-à-dire que la polaire normale passe par la droite t. De plus, si l'on fait mouvoir un point N sur la polaire normale de manière à s'approcher indéfiniment d'un point V et t, le plan vecteur, qui s'approche indéfiniment du plan tangent en V, doit être toujours normal au plan polaire de N.

On en conclut que :

La polaire normale d'une droite est une surface de l'ordre n, *qui passe par cette droite, et dont le plan tangent en chaque point de la droite est normal au plan polaire de ce point.*

L'intersection de la surface trouvée avec la surface fondamentale, qui est une courbe de l'ordre n^2, est le lieu des pieds des normales qui rencontrent la droite t. L'ordre de cette courbe a été trouvé par *Sturm* (¹) sous la forme $n+r$, qui se réduit à n^2,

(¹) *Mém. cit.*, p. 567.

si la surface fondamentale est générale. Sturm a donné la classe et quelques propriétés de cette courbe.

Si $\varphi = 0$, les $n-1$ intersections de t avec la première polaire de son point à l'infini appartiennent au lieu cherché, parce que leurs plans polaires sont parallèles à t. De plus, si l'on fait passer un plan quelconque σ par t, on a une droite s_∞ d'intersection avec E_∞. Les premières polaires des points de s_∞ forment un faisceau, dont la courbe base rencontre le plan σ en $(n-1)^2$ points. Chaque plan qui passe par t a donc $n-1+(n-1)^2 = n(n-1)$ points communs avec le lieu. En appelant ce lieu *courbe polaire parallèle* de la droite t, on a :

La courbe polaire parallèle d'une droite est de l'ordre $n(n-1)$ et rencontre la droite en $n-1$ points.

Les $n^2(n-1)$ intersections avec la surface S^n sont les $n(n-1)^2$ points de contact des plans tangents qui passent par t, et les $n(n-1)$ points communs à la section à l'infini de S^n et à la première polaire (courbe) du point à l'infini de t par rapport à cette section.

Il est évident que la courbe polaire parallèle d'une droite t est le lieu des points dont les plans polaires parallèles passent par t.

VIII. Faisons passer la droite arbitraire d, considérée au paragraphe précédent, par un des pôles du plan à l'infini, et observons que ce point Q est double pour la surface $S^{2(n-1)}$ d'un plan quelconque. Alors deux des points unis de la correspondance tombent en Q, et la polaire inclinée a un point double en Q. Donc, puisque cela a lieu pour toute droite polaire :

Les polaires inclinées de toutes les droites de l'espace ont aux centres de la surface fondamentale autant de points doubles.

De même, puisque le plan E_∞ peut se considérer comme incliné d'un angle quelconque sur un plan arbitraire :

Les surfaces polaires normales et les courbes polaires parallèles de toutes les droites de l'espace passent par les $(n-1)^3$ centres de la surface fondamentale.

IX. Ayant fixé une droite t, chaque point P de l'espace détermine un plan polaire, qui fait un certain angle avec le plan vecteur Pt. Donc :

Les polaires inclinées d'une droite pour toutes les valeurs de l'angle φ forment un faisceau.

X. Si la polaire inclinée d'une droite s doit passer par un point A, le plan polaire de A doit faire l'angle φ avec le plan vecteur sA. La droite s est donc tangente au cône polaire incliné de A. On voit ainsi que par quatre points arbitraires de l'espace passent autant de polaires inclinées de droites, qu'il y a de tangentes communes à quatre cônes du second degré. Donc :

Les polaires inclinées de toutes les droites de l'espace forment un système ∞^4 d'indice 32.

Supposons $\varphi = 90^\circ$. Si la polaire normale d'une droite s doit passer par un point donné P, s doit rencontrer la droite polaire normale de P. Quatre droites dans l'espace ayant deux transversales communes, il s'ensuit de là que deux polaires normales passent par quatre points arbitraires. Donc :

Les polaires normales de toutes les droites de l'espace forment un système ∞^4 d'indice 2.

XI. Soit C^ν une courbe de gauche de l'ordre ν. Cherchons la classe de l'enveloppe des plans polaires parallèles de ses points. Le lieu des points, dont les plans polaires parallèles passent par un point donné P, étant la polaire parallèle de P, il y aura autant de plans de l'enveloppe qui passent par P qu'il y a d'intersections de la courbe avec la polaire parallèle de P :

L'enveloppe cherchée est donc une développable de la classe $n\nu$.

Cette surface est le lieu des points dont les polaires parallèles touchent C^ν.

Si la courbe donnée est l'intersection complète de deux surfaces respectivement de l'ordre n' et n'', prenons une droite arbitraire r. Les polaires parallèles des points de r forment un faisceau de

l'ordre n (§ VI) et il y en a $n'n''(n'+n''+n-4)$ qui touchent la courbe [1].

L'enveloppe cherchée est dans ce cas de l'ordre

$$n'n''(n'+n''+n-4).$$

Si $\nu=1$, C^ν sera une droite s. La surface enveloppe trouvée est alors de la classe n et de l'ordre $2(n-1)$. La droite s est rencontrée en $n-1$ points par la première polaire de son point à l'infini. Pour chacun de ces points, le plan polaire est parallèle à s. Par conséquent il y a $n-1$ plans de l'enveloppe, qui passent par s. La développable est donc rationnelle, et l'on pourrait, au moyen de l'ordre et de la classe, déterminer toutes les singularités ordinaires [2]. Les droites tangentes à cette développable forment un complexe du degré n. La courbe polaire parallèle d'une quelconque de ces droites rencontre la droite s, parce que par une tangente à la développable passe toujours un plan générateur π, qui est parallèle au plan polaire du point πs.

Les droites dont les courbes polaires parallèles rencontrent une droite fixe forment un complexe du degré n.

Or nous appellerons *indice* d'un système ∞^4 de courbes gauches le nombre de courbes du système qui rencontrent r droites arbitraires, et, puisque quatre complexes du degré n ont $2n^4$ droites communes, nous pouvons ajouter le résultat suivant à ceux du § X :

Les courbes polaires parallèles de toutes les droites de l'espace forment un système ∞^4 d'indice $2n^4$.

XII. Soit encore une courbe C^ν et cherchons le lieu engendré par les droites polaires normales de ses points. Prenons une droite arbitraire r. Chaque point B de la courbe détermine un plan vecteur Br. Si la droite polaire normale de B rencontre r, ce plan est perpendiculaire au plan polaire de B. Il y aura donc autant

---

(1) Cremona, *loc. cit.*, p. 117.

(2) Salmon, *Analytic Geometry of three dimensions*, p. 238. Dublin, 1862.

de droites du lieu qui rencontrent r qu'il y aura d'intersections de C^ν avec la polaire normale de r, c'est-à-dire $n\nu$. Donc :

Le lieu cherché est une surface réglée du degré $n\nu$, qui contient la courbe donnée.

On voit aisément que cette surface est le lieu des points dont les courbes polaires normales rencontrent C^ν.

On peut donc dire, en supposant $\nu = 1$:

Le lieu des points dont les courbes polaires normales rencontrent une droite fixe est une surface réglée de l'ordre n, qui contient cette droite.

Donc nous pouvons ajouter le résultat suivant à ceux du § VI :

Les courbes polaires normales de tous les points de l'espace forment un système ∞^3 d'indice n^3.

XIII. Considérons l'enveloppe des polaires inclinées des points d'une courbe donnée C^ν. Un point de cette enveloppe appartient aux polaires inclinées de deux points infiniment voisins de C^ν. Le cône polaire incliné d'un point de l'enveloppe doit donc toucher C^ν, c'est-à-dire :

L'enveloppe des polaires inclinées des points d'une courbe donnée est le lieu des points dont les cônes polaires inclinés touchent la courbe.

Il s'ensuit de là que :

L'enveloppe des polaires inclinées des points d'une droite est la polaire inclinée de la droite.

Prenons une courbe C_ρ de la classe ρ, et un point P_1 sur cette courbe. Si M est un point de la surface polaire parallèle de P_1, le plan polaire parallèle de P passe par P_1. Or, si M appartient encore à la polaire parallèle du point P_2, infiniment voisin de P_1 sur C_ρ, le plan polaire parallèle de M passe encore par P_2, et il contient ainsi la tangente à la courbe en P_1. Donc l'enveloppe des polaires parallèles des points d'une courbe est le lieu des points dont les plans polaires touchent la courbe. Les plans polaires

parallèles des points d'une droite engendrent une développable de la classe n (§ XI), qui a $n\rho$ plans tangents communs avec C_ρ. L'enveloppe cherchée est donc de l'ordre $n\rho$. Soit P un point de la section de cette enveloppe avec le plan E_∞. Le plan polaire parallèle π de P doit toucher la courbe, et par conséquent il n'est pas en général à l'infini. Alors le plan polaire (ordinaire) de P, qui est parallèle à π, doit aussi passer par P, et ce point appartient à la section C''_∞ de la surface fondamentale avec E_∞. L'enveloppe trouvée passe ρ fois par C''_∞. En effet, par la tangente en P à C''_∞, on peut conduire ρ plans qui touchent C_ρ, et l'on peut regarder chacun de ces plans comme polaire parallèle de P. On peut donc réunir ces résultats de la manière suivante :

Les polaires parallèles des points d'une courbe de la classe ρ enveloppent une surface de l'ordre $n\rho$, qui est aussi le lieu des points dont les plans polaires parallèles touchent la courbe, et qui passe ρ fois par la section du plan E_∞ avec la surface fondamentale.

Nous avons vu que les polaires parallèles de deux points infiniment voisins P_1, P_2 de C_ρ se coupent en une courbe telle, que les plans polaires parallèles de ses points passent par la tangente à la courbe en P_1. On voit donc que l'enveloppe trouvée n'est autre chose que la surface engendrée par les courbes polaires parallèles des tangentes à C_ρ.

Si la courbe C_ρ est de l'ordre ν, il s'ensuit que :

Sur une courbe de l'ordre ν et de la classe ρ il y a $n\nu\rho$ points tels que le plan conduit par chacun d'eux parallèlement au plan polaire, est tangent à la courbe.

L'enveloppe trouvée coupe la surface fondamentale S'' en une courbe de l'ordre $n^2\rho$. En retranchant la courbe C''_∞ comptée ρ fois, on a une courbe de l'ordre $n(n-1)\rho$, lieu des points tels que les plans qui y touchent S'' touchent encore C_ρ. On pouvait obtenir directement ce résultat en observant que les plans qui touchent S'' le long d'une section plane quelconque engendrent une développable de la classe $n(n-1)$, et qu'il y a $n(n-1)\rho$ plans tangents communs à cette développable et à la courbe C_ρ.

Si C_ρ est une droite, $\rho = 0$. Mais on sait que les polaires paral-

lèles des points d'une droite p forment un faisceau (§ VI). La courbe base de ce faisceau se compose :

1° De la courbe $C^{n(n-1)}$ polaire parallèle de p, parce que le plan polaire parallèle d'un point quelconque de cette courbe contient la droite p ;

2° De la courbe C^n_∞, parce que les polaires parallèles de tous les points de l'espace passent par cette courbe (§ IV).

Soit encore une courbe C^ν de l'ordre ν et de la classe ρ. Le système des polaires normales de ses tangentes est ∞ d'indice ρ, comme on pourrait aisément le démontrer.

Si l'on prend deux tangentes infiniment voisines t_1, t_2, et un point Q sur l'intersection de leurs polaires normales, les plans t_1Q, t_2Q doivent être normaux au plan polaire de Q. Donc l'enveloppe des polaires normales des tangentes à C^ν est le lieu des points dont les droites polaires normales rencontrent C^ν. Cette enveloppe passe par la courbe C^ν, parce que la polaire normale d'une droite contient cette droite, et le point commun à t_1, t_2 est par conséquent sur l'enveloppe. Si nous prenons une droite arbitraire d, les normales tirées des points de d respectivement sur les plans polaires de ces points forment une surface réglée du degré n (§ XII), qui est rencontrée en $n\nu$ points par la courbe donnée. Donc :

L'enveloppe des polaires normales des tangentes à une courbe de l'ordre ν, c'est-à-dire le lieu des points dont les droites polaires normales rencontrent la courbe, est une surface de l'ordre $n\nu$ qui passe par la courbe donnée.

Par conséquent :

Le lieu des pieds des normales à une surface de l'ordre n, qui rencontrent une courbe de l'ordre ν, est une courbe de l'ordre $n^2\nu$.

Ces normales engendrent une surface réglée, qu'on peut trouver en suivant une méthode analogue à celle employée par *Sturm* dans le cas de $\nu = 1$. Soit m la classe de S^n, et r la classe de la section plane. La surface réglée des normales tirées à S^n le long d'une section plane est du degré $n + r$ (¹) ; il y a donc $(n + r)\nu$ nor-

(¹) Sturm, *Mém. cit.*, p. 567.

males qui rencontrent C^ν et dont les pieds sont dans un plan arbitrairement donné. Ce nombre est donc l'ordre de la courbe B, lieu des pieds des normales qui rencontrent C^ν. La surface réglée des normales tirées à S^n le long de la courbe de contact du cône tangent, qui a pour sommet un point arbitraire, est du degré $r+m$ (¹). Il y a donc $(r+m)\nu$ de ces normales qui rencontrent C^ν, c'est-à-dire qui ont leurs pieds sur la courbe B, et par conséquent autant de plans qui touchent S^n en points de B et passent par un point arbitraire. La développable qui touche S^n suivant la courbe B est donc de la classe $(r+m)\nu$, et ce nombre est aussi la classe de la section de la développable avec E_∞, et l'ordre de la courbe polaire réciproque de cette section par rapport au cercle imaginaire de l'infini. Cette courbe polaire réciproque, et la courbe B se correspondent point par point. Alors, suivant un théorème de *Chasles* (²), les droites qui y joignent les points correspondants, c'est-à-dire les normales à S^n qui rencontrent C^ν engendrent une surface réglée du degré $(n+2r+m)\nu$. Si S^n est générale, ce nombre devient $n^3\nu$.

Tout point commun aux polaires normales de deux tangentes infiniment voisines t_1, t_2 de C^ν a la propriété que sa droite polaire normale passe par le point de contact de t_1. Il s'ensuit de là que l'enveloppe des polaires normales des tangentes est la surface engendrée par les courbes polaires normales des points de C^ν. En particulier :

Les courbes polaires normales des points d'une droite engendrent la polaire normale de la droite.

XIV. Prenons un faisceau de droites, dont U soit le centre et ω le plan. Le cône polaire incliné d'un point arbitraire R de l'espace, pour un angle donné φ, coupe le plan α en une conique. Par U on peut tirer deux tangentes à cette conique. Nous avons ainsi deux

---

(¹) Sturm, *loc. cit.*

(²) *Comptes rendus*, t. LXII, p. 581.

Si l'on a dans l'espace deux courbes, gauches ou planes, U_m, $U_{m'}$ *d'ordres* m *et* m', *dont les points* a, a' *se déterminent individuellement et se correspondent anharmoniquement, les droites* aa' *qui joignent ces points deux à deux forment une surface d'ordre* $m+m'$.

rayons t_1, t_2 du faisceau, tels que leurs polaires inclinées passent par R. Donc :

Les polaires inclinées des droites d'un faisceau forment un système ∞ d'indice 2.

Soient t_1 une droite du faisceau, et t_2 la droite infiniment voisine. Pour un point Q commun aux polaires inclinées de ces droites on a les plans vecteurs t_1Q, t_2Q inclinés de l'angle φ sur le plan polaire de Q. Le cône polaire incliné de Q est donc tangent en U à t_1, et l'on peut dire :

L'enveloppe des polaires inclinées des droites d'un faisceau est la polaire inclinée du centre.

Et, puisque le résultat est indépendant du plan ω, pourvu qu'il passe par U :

Les polaires inclinées des droites d'une étoile ou gerbe enveloppent toutes une même surface, la polaire inclinée du centre.

En supposant $\varphi = 90^\circ$, les polaires normales des droites du faisceau forment un faisceau. En effet, un point arbitraire R de l'espace détermine un plan polaire ρ, et à moins que R ne soit situé sur la courbe polaire normale de U, il n'y a qu'un plan qui passe par UR et soit normal à ρ; ce qui donne un rayon unique du faisceau. La courbe, base du faisceau de ces polaires normales, est le lieu d'un point N, tel que tous les plans vecteurs déterminés par N et par les rayons du faisceau soient perpendiculaires au plan polaire de N. Cette courbe se compose :

1° De la courbe polaire normale du centre du faisceau ;

2° De l'intersection du plan du faisceau avec la première polaire du point à l'infini qui détermine la direction des normales à ce plan.

La première de ces courbes est, comme on sait, de l'ordre $n^2 - n + 1$ et passe par U. Les $n(n-1)$ autres intersections de cette courbe avec le plan ω sont sur la seconde courbe qui est de l'ordre $n - 1$.

Considérons les polaires normales des droites d'une étoile. Deux points arbitraires de l'espace déterminent deux droites polaires normales, et il y a une seule droite de l'étoile qui rencontre ces deux droites. Donc:

Les polaires normales des droites d'une étoile forment un réseau. Elles passent toutes par une courbe de l'ordre $n^2 - n + 1$, *qui est la courbe polaire normale du centre.*

Aussi:

Les polaires normales des droites d'un plan forment un réseau, et passent toutes par une courbe de l'ordre $n - 1$, *située dans le plan.*

Soit $\varphi = 0$. Les courbes polaires parallèles des droites du faisceau forment une surface. Si R est un point de cette surface, le rayon UR doit être parallèle au plan polaire de R. On voit donc que la surface cherchée est la polaire parallèle de U. Comme ce résultat est indépendant du plan ω, on peut dire:

Les courbes polaires parallèles des droites d'une étoile forment la polaire parallèle du centre.

XV. La démonstration du § III ne subit aucun changement si le pôle P est situé sur la surface fondamentale S^n. Donc:

Les pieds des obliques qui font un angle constant avec une surface de l'ordre n, et passent par un point P *de la surface, sont sur une courbe de l'ordre* $2n^2$ *qui a un point double en* P. *Ces obliques forment un cône de l'ordre* $2(n^2 - 1)$.

Pour $\alpha = 0$ on pourrait encore répéter la démonstration du § III, et l'on a une surface de l'ordre n. Le plan tangent en P à cette surface étant parallèle au plan tangent à S^n en ce point, l'intersection de S^n avec la polaire parallèle de P a en P un point double. Donc les droites qui passent par P et rencontrent ailleurs la surface sous l'angle O forment un cône de l'ordre $n^2 - 2$. Ce cône se compose:

1° Du cône de l'ordre n qui projette la section C_x^n;

2° Du cône de l'ordre $n(n-1)-2$ formé par les droites qui passent par P et touchent ailleurs la surface.

Pour $\alpha = 90°$, on a encore une courbe de l'ordre $n^2 - n + 1$. Donc par un point P de S^n on peut mener ce nombre de normales à cette snrface, en y comptant la normale en P.

Quelques applications aux surfaces du second ordre.

I. Soit S^2 la surface fondamentale du deuxième ordre. La polaire inclinée d'un point P est dans ce cas une surface S^4 du quatrième ordre, qui a deux points doubles, l'un au pôle P, l'autre au centre O de S^2. Le cône osculateur en P est formé par les droites inclinées de l'angle donné α sur le plan diamétral conjugué au diamètre OP.

On peut construire cette surface de la manière suivante. Faisons passer une droite arbitraire r par le pôle; on a un plan diamétral Or. Soit r' le diamètre conjugué à Or; il y a deux plans π_1, π_2 qui passent par r' et font l'angle α avec r. Les diamètres p_1, p_2 conjugués à π_1, π_2 sont dans le plan Or, et rencontrent par conséquent la droite r. Les deux points d'intersection M_1, M_2 appartiennent à la polaire inclinée. En effet, le plan polaire de M_1 est parallèle au plan diamétral conjugué au diamètre p_1, c'est-à-dire qu'il est parallèle à π_1, et par conséquent incliné de l'angle α sur le rayon vecteur PM_1. Il en est de même pour l'autre point M_2.

En faisant rapprocher indéfiniment le rayon r au diamètre OP, les plans π_1, π_2 restent inclinés de l'angle α sur OP. Donc, en appelant *conjugués* deux cônes dont l'un est formé par les diamètres conjugués aux plans tangents à l'autre, on peut dire :

Le cône osculateur en O *à la polaire inclinée est conjugué au cône formé par les plans qui passent par* O *et font l'angle* α *avec* OP.

Supposons $\alpha = 0$. La polaire parallèle est une surface du deuxième ordre qui passe par P, par O et par la section de E_∞ avec S^2. Le plan tangent en P à la polaire parallèle est parallèle au plan diamétral conjugué à OP. Cette surface est engendrée par l'inter-

section d'une droite qui passe par P et du plan diamétral conjugué à la direction de cette droite. On a ainsi une construction par points de la polaire parallèle.

Considérons maintenant la section faite avec un plan qui passe par OP. Ce plan coupe S^2 en une conique K^2. Soient Q, R les intersections de cette conique avec OP. Conduisons un rayon quelconque r par P; le diamètre de K^2 conjugué à la direction de r rencontre ce rayon en un point M′ de la section de la polaire parallèle. Tirons par Q une parallèle à PM′, et soit M l'intersection de cette parallèle avec K^2. Tirons MR et MM′ et appelons S l'intersection de MM′ avec OP. La corde MR est parallèle à OM′. Les triangles QRM, POM′ sont semblables; et il en est de même pour les triangles SQM, SPM′. On aura donc

$$\frac{SQ}{SP} = \frac{SM}{SM'} = \frac{MQ}{M'P} = \frac{RQ}{OP};$$

d'où il résulte que le point S est fixe sur OP et que le rapport $\frac{SM}{SM'}$ est constant. Donc la conique formée par les points M′ (section de la polaire parallèle) et la conique K^2 sont homothétiques. Les centres d'homothétie S et S′ sont sur la droite OP. Le centre S est déterminé par la relation

$$\frac{SP}{SQ} = \frac{OP}{RQ},$$

l'autre par

$$\frac{S'P}{S'R} = \frac{OP}{QR}.$$

Comme cela a lieu pour tout plan passant par OP, on peut dire:

La polaire parallèle est une surface du second ordre homothétique à S^2. *Les centres d'homothétie sont les points* S, S′ *déterminés ci-dessus. Le plan tangent en* O *est le plan diamétral conjugué à* OP.

On peut donc construire la polaire parallèle au moyen d'une homothétie, dont les éléments caractéristiques sont déterminés par P et S^2.

Nous avons jusqu'ici supposé que le centre de S^2 est à distance finie. Si S^2 est un *paraboloïde elliptique* ou *hyperbolique,* la droite OP est la parallèle à l'axe tirée par P. Soient R l'intersection (à distance finie) de cette droite avec S^2, et π un plan qui passe par PR. Ce plan coupe S^2 en une parabole K^2 dont l'axe est parallèle à PR. On peut construire la section de la polaire parallèle comme lieu des points où les rayons qui passent par P sont rencontrés par leurs diamètres conjugués. Soient t un de ces rayons, et A, B ses intersections avec K^2. Le milieu M′ de la corde AB (réelle ou imaginaire) appartient à la section cherchée. Tirons maintenant par R une parallèle à t; elle rencontre K^2 en un point M. Le diamètre conjugué à t coupe ce rayon en M′, et RM en U. Tirons MM′, qui rencontrera PR en un point S. On a

$$\frac{SP}{PR} = \frac{SM'}{M'M} = \frac{SP}{M'U} = \frac{MP'}{UM} = \frac{PM'}{RU}.$$

Or, comme $PM' = RU$, on aura

$$SP = PR, \quad SM' = M'M.$$

Tout cela a lieu pour un plan quelconque passant par PR. Donc:

La polaire parallèle est encore homothétique à la surface fondamentale S^2. *L'un des centres d'homothétie est à l'infini dans la direction de l'axe. L'autre est déterminé par la relation* $SP = PR$. *Le rapport d'homothétie est* $\frac{SM}{SM'} = 2$.

Dans ce cas la construction de la polaire parallèle est très simple. Tirons par le pôle P une parallèle à l'axe de S^2. Cette droite rencontre S^2 (à distance finie) en R. Si l'on prend sur elle un intervalle PS égal et opposé à PR, on n'a qu'à diviser par moitié les rayons vecteurs qui joignent S aux différents points de S^2, et l'on aura autant de points de la polaire parallèle.

Il est évident que:

La polaire parallèle est de la même espèce que la surface fondamentale.

Soit $\alpha = 90^\circ$. La courbe polaire normale est dans ce cas une

cubique gauche qui passe par P, par O et par les trois points à l'infini des axes de S^2. La tangente en P est normale au plan diamétral conjugué à PO.

On peut construire cette courbe comme il suit. Prenons un plan π passant par OP, et soit p le diamètre conjugué à π. Soit K^2 la conique intersection de S^2 avec π. Faisons passer par p un plan σ perpendiculaire à π, qui coupera ce plan en un diamètre s' de K^2. Tirons par P une perpendiculaire à s'. L'intersection de cette perpendiculaire avec le diamètre s conjugué à s' par rapport à K^2 est le troisième point d'intersection M de π et de la courbe polaire normale. En faisant mouvoir le plan π autour de OP, on construit par points la polaire normale. Le point M tombe en O si le diamètre s est perpendiculaire à PO. Donc :

La tangente en O *à la cubique est le diamètre conjugué au plan diamétral perpendiculaire à* PO.

Les trois points de E_∞ qui ont la même droite polaire par rapport à la section de S^2 et par rapport au cercle imaginaire C^2_∞ sont toujours réels. Si S^2 a le centre à distance finie, ces points sont les points à l'infini des axes. Si le centre est à l'infini, l'un de ces points est le point à l'infini de l'axe. Les deux autres sont les points de l'infini qui déterminent les directions principales des sections normales à l'axe. La cubique polaire normale doit passer par ces points ; donc :

Cette courbe est toujours une hyperbole cubique qui a les asymptotes respectivement parallèles aux axes de S^2. *Dans le cas où* S^2 *a le centre à l'infini, l'une des asymptotes est parallèle à l'axe; les deux autres aux directions principales d'une section quelconque normale à l'axe.*

Si S^2 est une surface de révolution, soit t_∞ la droite de l'infini commune à tous les plans des cercles parallèles. Le plan polaire d'un point quelconque T_∞ de cette droite est normal à la direction déterminée par T_∞. Donc :

Dans ce cas la cubique se décompose en la droite t_∞ *et en une conique* C^2.

Cette conique doit être touchée en P par la droite perpendiculaire au plan polaire de P, et doit passer par O. Elle est donc dans le plan méridien π, qui passe par P. Soit D^2 l'intersection de π avec S^2. La conique C^2 est la courbe polaire inclinée pour $\alpha = 90^\circ$ [1] du pôle P par rapport à la conique D^2. Donc :

La conique C^2 *est toujours une hyperbole équilatère qui est située dans le plan méridien passant par le pôle. Ses asymptotes sont l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à l'axe.*

On peut construire cette conique au moyen des points O et P des tangentes en ces points, et de la direction des asymptotes ; mais on peut la construire aussi au moyen de deux faisceaux projectifs. L'un d'eux a le centre en P, l'autre en O ; à un rayon p du premier faisceau correspond le diamètre conjugué à la direction normale à p.

II. Le lieu des points dont les plans polaires font un angle constant φ avec un plan donné est dans ce cas un cône du second degré, qui a pour sommet le centre O de S^2. Ce cône est conjugué au cône formé par les plans passant par O et inclinés de l'angle φ sur le plan donné.

La polaire inclinée d'une droite t est une surface du quatrième ordre, dont t est une droite double, et qui a un point double en O. L'intersection de cette surface avec un plan π qui passe par t se compose de la droite t, comptée deux fois, et d'une conique. Cette conique est l'intersection de π avec le cône nommé plus haut. On a donc une construction de la polaire inclinée d'une droite.

Le cône osculateur en O est conjugué au cône formé par les plans diamétraux qui font l'angle φ avec le plan Ot. Ce plan coupe la polaire inclinée en t (comptée deux fois) et en deux autres droites ; ces dernières sont les diamètres conjugués aux plans diamétraux qui passent par le diamètre conjugué à Ot, et font avec Ot l'angle φ.

Soit $\varphi = 90^\circ$. La polaire normale d'une droite réelle t est une

---

[1] Dewulf, *Mém. cit.*, § XXVII.

surface réglée du second degré, qui passe par t. La section à l'infini de la polaire normale passe par le point à l'infini T_∞ de t et par les points de l'infini V_1, V_2, V_3, qui déterminent les directions principales de S^2. De plus, soient t'_∞ la polaire T_∞ par rapport au cercle imaginaire, et T'_∞ le pôle de t'_∞ par rapport à la section à l'infini de S^2. On voit que la polaire normale doit passer par T'_∞. La section de cette surface avec E_∞ est donc déterminée par les cinq points V_1, V_2, V_3, T_∞, T'_∞. Si la droite t est normale à une des directions principales, T_∞ est en ligne droite avec deux des points V; par exemple, si t est normal à la direction déterminée par V_3, T_∞ est sur la droite V_1V_2. On peut démontrer que T'_∞ aussi est sur cette même droite. En effet, t'_∞ passe par V_3, parce que ce point est le pôle de la droite V_1, V_2 par rapport au cercle imaginaire, V_3 est encore le pôle de V_1, V_2 par rapport à la section de S^2 : donc T'_∞ est sur la droite V_1V_2. Réciproquement, si T'_∞ est en ligne droite avec deux des points V; T_∞ est aussi sur la même droite. Or, si trois des cinq points nommés sont en ligne droite, la section de la polaire normale se décompose en deux droites. Donc :

La polaire normale d'une droite est un hyperboloïde à une nappe. Si la droite est normale à la direction d'un axe de S^2, *la polaire normale est un paraboloïde hyperbolique.*

Prenons un plan τ passant par t. Si on tire par O une perpendiculaire p au plan τ, le plan diamétral conjugué à p coupe τ en une génératrice de la polaire normale. On peut ainsi construire cette surface au moyen de deux faisceaux projectifs de plans, dont l'un a pour axe la droite t, et l'autre le diamètre conjugué au plan diamétral normal à t ; à un plan σ du premier faisceau correspond le plan diamétral conjugué à la direction normale à σ.

Si la droite t est dans un des plans principaux de S^2, les axes des deux faisceaux se rencontrent. La polaire normale se réduit dans ce cas à un cône.

Soit $\varphi = 0$. La courbe polaire parallèle de t est une conique, qui rencontre cette droite en un point T. Par T passe aussi le plan diamétral τ conjugué à la direction de t. En menant un plan σ par t, ce plan coupe la conique polaire parallèle en T et au point où le plan σ est rencontré par son diamètre conjugué. Donc :

La conique polaire parallèle d'une droite est située dans le plan diamétral conjugué à la direction de la droite.

Cette conique peut être construite par deux faisceaux projectifs dans le plan τ. Appelons D^2 la section de τ avec S^2; les faisceaux auront respectivement pour centres T et O. A un rayon du premier faisceau correspond, dans le second, le diamètre conjugué par rapport à D^2.

On pourrait aussi démontrer que :

La conique polaire parallèle d'une droite est homothétique à la section de S^2 *avec le plan diamétral conjugué à t.*

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SALMON. — Traité de Géométrie analytique (Courbes planes). Ouvrage traduit de l'anglais par M. A. Chemin et suivi d'une Note sur les points multiples par M. Halphen. 1 vol. in-8°; 657 pages. Paris, 1884.

Les Livres de M. Salmon sont assez connus pour qu'il soit inutile de les analyser; il y a longtemps que M. Fiedler a traduit en allemand les Volumes sur la Géométrie analytique, dont M. Chemin aura bientôt achevé la traduction française. C'est sur la troisième édition des *Higher plane Curves* que le Traité des *Courbes planes* a été traduit; on sait que l'illustre Cayley a largement collaboré à cette édition et à celle qui l'avait précédée. L'édition française est enrichie d'une belle étude sur les points singuliers, qui est due à M. Halphen. Il y a résumé, avec cette précision et cette rigueur dont il a l'habitude, les principaux résultats de ses propres recherches et de celles de divers autres savants, parmi lesquels il convient de citer principalement M. Noether. Après avoir exposé les fondements de la théorie, il donne la solution de ce problème: « Trouver le nombre des points en chacun desquels, sur une courbe algébrique donnée, a lieu une relation donnée entre les éléments infinitésimaux de la courbe ». Il traite ensuite avec détails de la correspondance et de la notion de genre; il établit en particulier le beau théorème de M. Noether sur la possibilité de faire correspondre point par point à toute courbe algébrique une courbe algébrique qui n'ait pour points singuliers que des points doubles ordinaires. Il montre enfin comment on peut trouver la classe d'une courbe, connaissant son degré et ses points singuliers et comment, parmi les intersections de deux courbes, on peut calculer le nombre de celles qui sont confondues en un point singulier donné.

J. T.

PETERSEN (J.). — Kinematik. 1 vol. in-8°; Kopenhagen, 1884.

Voici un petit livre qui est fait pour réjouir tous ceux qui goûtent particulièrement la concision et l'élégance; dans quatre-vingts pages d'un texte qui n'est nullement serré, l'auteur a su résumer tout ce qu'il y a d'essentiel dans la Cinématique; il a même donné un Chapitre sur les relations si intéressantes qui existent entre la théorie des complexes linéaires de droites et celle du mouvement d'un corps solide. On serait disposé à citer les deux courts Chapitres qui terminent le Volume et qui concernent les systèmes articulés comme un modèle d'exposition géométrique et de mesure dans le choix des exemples; mais, à la vérité, il n'y a pas lieu de louer aucune partie du livre aux dépens des autres.

J. T.

MAXIMILIEN MARIE. — Histoire des Sciences mathématiques et physiques; t. III et IV : *de Viète à Descartes; de Descartes à Huygens.* Paris, Gauthier-Villars, 1884.

L'auteur avait divisé l'histoire des Mathématiques, jusqu'à Viète, en cinq périodes : la sixième va jusqu'à Kepler; elle est caractérisée par les travaux de Viète, de Tycho Brahe, de Stévin, de Neper et de Galilée.

M. Marie montre bien que la grande originalité de Viète est d'avoir introduit les grandeurs elles-mêmes sous leur forme concrète dans les équations algébriques et d'avoir imaginé pour ces grandeurs des modes de calculs nouveaux, mais *semblables* aux calculs numériques. Ainsi, la multiplication de deux nombres est remplacée par la *duction* de deux longueurs, opération par laquelle elles deviennent un rectangle. Ce rectangle pourra, par le même procédé, devenir un *solide* ou même un *sur-solide*, un *plan-plan*, un *plan-solide*, un *solide-solide*, etc. Là, au contraire, où l'on divise les termes d'une équation numérique, Viète *applique* les grandeurs à la même longueur, c'est-à-dire qu'il enlève une hauteur aux termes, qu'il suppose représenter des rectangles ou

des parallélépipèdes. De là, deux procédés différents : l'algèbre numérique (*numerosa*) et l'algèbre des formes (*speciosa*). Les autres mérites de Viète sont résumés ainsi par l'auteur : « L'Algèbre, proprement dite, lui doit l'invention des différentes transformations simples qu'on peut faire subir aux équations, telles que ajouter ou retrancher une même quantité aux racines d'une équation; multiplier ou diviser ces racines par un même nombre. C'est lui qui découvrit la décomposition du premier membre de l'équation en facteurs du premier degré et la composition des coefficients en fonction des racines. Il connaissait la loi de la formation du binôme. Quant à la Géométrie, Viète, après avoir su trouver par le calcul des expressions des inconnues, enseigna la manière de les construire; il montra que les équations du troisième degré se ramènent à la duplication du cube ou à la trisection de l'angle. Enfin il établit les formules des cordes de tous les arcs multiples d'un autre, expliqua la multiplicité des racines des équations auxquelles conduit le problème de la division des arcs et donna aux deux trigonométries leur forme définitive. »

En même temps que Viète faisait progresser l'Algèbre et la Géométrie, son contemporain Tycho Brahe donnait une impulsion puissante à l'Astronomie. Le savant danois était, on le sait, un adversaire de Copernic; mais, observateur de génie, disposant dans certaine période de sa vie de ressources énormes, Tycho fit construire des appareils d'une grandeur et d'une exactitude inconnues jusqu'alors. C'est à leur aide qu'il put reviser la théorie du Soleil, dresser pour la réfraction atmosphérique des Tables, dont les erreurs ne dépassent pas 2′, rectifier la valeur de l'obliquité de l'écliptique, apporter les améliorations les plus notables à la théorie de la Lune, enfin, ce qui n'est pas une mince gloire, donner à Kepler le moyen de trouver ses trois fameuses lois.

Le principal mérite de Simon Stévin (1548-1620) est d'avoir, le premier, résolu le problème de l'équilibre d'un corps placé sur un plan incliné et celui de l'équilibre de trois forces appliquées à un même point. On trouve reproduite en entier dans le Volume de Marie la solution du second de ces problèmes.

On sait très peu de chose sur la vie de l'Écossais Neper, que l'on suppose avoir été très tranquille. Son grand Ouvrage sur les logarithmes date de 1614; il ne contient pas l'exposé de la méthode, qui

ne fut publié qu'en 1618, un an après la mort de Neper. D'après M. Marie, cette méthode, très ingénieuse d'ailleurs, est loin d'exiger les connaissances mathématiques étendues qu'on serait disposé à supposer. Neper, en calculant ses logarithmes, nommés depuis *hyperboliques,* n'a sans doute pas songé à la quadrature de l'hyperbole, il en aurait même ignoré ce que nous nommons la *base*.

En 1620, une autre Table de logarithmes hyperboliques, disposée plus judicieusement que celle de Neper et même que celles que nous employons encore aujourd'hui, est publiée par l'Allemand Byrge, qui, d'après M. Marie, aurait ignoré l'invention de Neper. Vers la même époque, paraît la première Table de logarithmes vulgaires par Briggs.

Il n'y a peut-être pas dans toute l'histoire des Sciences mathématiques de nom plus célèbre, plus populaire surtout, que celui de Galilée. Cette célébrité, le savant florentin la doit à ses infortunes, autant qu'à ses travaux. M. Marie, tout en mettant à profit les recherches récentes, trace de Galilée un portrait qui se rapproche beaucoup plus de la tradition que de ces travaux. Il ne pouvait nous apprendre grand'chose sur les inventions de Galilée : le compas de proportion, le thermomètre, le perfectionnement du télescope, ni sur ses grandes découvertes astronomiques. Il s'est donc attaché à faire ressortir ce qui avait jusqu'ici moins préoccupé les historiens, les progrès accomplis dans la Dynamique. M. Marie nous donne une analyse complète du *Discours sur deux sciences nouvelles,* et conclut : « Si les principes fondamentaux, comme la définition du mouvement accéléré (causé par une force constante de direction et de grandeur), ne s'y trouvent pas expressément énoncés, il restait, après Galilée, peu de chose à faire pour y arriver. »

Avec Kepler, nous entrons dans la septième période. La vie de Jean Kepler a été fort triste. Elle s'est écoulée entre la gène et de perpétuelles menaces de persécutions. On sait que, pour vivre, il dut tirer des horoscopes Après avoir, dans le *Prodromus* et les *Harmonies,* édifié des théories fantaisistes, nous le voyons dans l'*Astronomie nouvelle* exposer les grandes lois qui portent son nom. Parmi les découvertes géométriques de Kepler, mentionnons un théorème sur la détermination du volume, engendré par la ré-

volution d'un segment elliptique symétrique par rapport à l'un des axes tournant autour de sa corde, dont M. Marie reproduit la démonstration.

Après Kepler, nous ne trouvons de grands noms que pour les Sciences physiques. Ce sont Van Helmont, le père de la chimie pneumatique, et William Harvey, qui a découvert la circulation du sang. Peut-être M. Marie aurait-il dû leur associer Jean Rey, chimiste français, créateur de la loi de la conservation de la matière, auquel on a consacré déjà plusieurs travaux. M. Marie aurait pu être également plus affirmatif, en ce qui concerne la loi de réfraction, dont Descartes est certainement l'auteur, malgré les réclamations qui ont été élevées en faveur de Snell.

Parmi les hommes éminents de ce temps, on doit mentionner encore le P. Scheiner, Salomon de Caus, Paul Guldin, Pierre Vernier, le minime Marin Mersenne, Gassendi.

Desargues mérite une place à part. M. Marie rend pleine justice à ce grand savant, longtemps méconnu, si justement appelé le Monge de son siècle. Desargues n'a pas fait faire seulement des progrès remarquables à la géométrie théorique par la théorie de l'involution, à la perspective, à la stéréotomie : on lui doit nombre d'utiles applications aux arts et à l'industrie, comme la construction théorique des profils des dents des engrenages.

Le quatrième Volume s'ouvre avec Descartes, dont l'étude absorbe presque entièrement la huitième période (Descartes à Cavalieri).

Les principaux Ouvrages scientifiques de Descartes sont au nombre de trois : la *Dioptrique,* les *Météores* et la *Géométrie.* Ces Traités devaient, avec le fameux *Discours de la Méthode,* faire partie d'un grand ouvrage résumant toutes les recherches de Descartes sur la Géométrie, la Physique et la Philosophie. Ce Livre était déjà presque terminé en 1636. Mais, comme il contenait quelques théories cosmogoniques d'une orthodoxie quelque peu douteuse, Descartes, par scrupule de conscience, nous dit M. Marie, le supprima et n'en conserva que les quatre Traités. La partie cosmologique de l'Ouvrage ne fut publiée que plus tard dans le Livre des *Principes.* C'est là que se trouvent ces fameux tourbillons si admirés d'abord, si dépréciés depuis, mais qui n'en constituent pas moins la première tentative de réduire les mouvements des

corps célestes à une cause unique. M. Marie pense avec raison qu'ils ont bien pu inspirer les recherches de Newton.

La *Dioptrique* contient la loi de la réfraction. Ici encore M. Marie attribue cette découverte à Snellius; nous avons déjà dit notre sentiment à cet égard.

Dans les *Météores* nous trouvons, pour la première fois, l'explication exacte de l'arc-en-ciel; Descartes n'a pas formulé la condition pour qu'un rayon incident, après ses deux réfractions et sa réflexion, pût affecter l'œil; il a procédé empiriquement, en suivant de proche en proche les rayons qui pénètrent dans l'intérieur de la *goutte*. C'est ainsi qu'il a trouvé pour le plus grand diamètre de l'arc-en-ciel intérieur 41°47′ et pour celui de l'arc-en-ciel extérieur 51°37′. (Les chiffres vrais sont, M. Marie aurait pu l'ajouter, 43° et 52°30′.)

La *Géométrie* restera toujours le plus beau titre de gloire de Descartes. Ce n'est pas là un Traité de Géométrie analytique, mais plutôt, comme le dit si bien M. Marie, un simple aperçu de ce que va pouvoir devenir cette branche de la Science, dès que l'idée de l'inventeur aura été comprise. Que le titre d'inventeur de la Géométrie analytique revienne bien véritablement à Descartes, cela n'est pas douteux un seul instant. Ici, comme ailleurs, on a opposé des compétiteurs au grand savant français et les jalousies nationales ne sont pas restées tout à fait étrangères à ce débat. Beaucoup de géomètres ont, en effet, depuis Apollonius, rapporté des courbes à des coordonnées diverses, par exemple à un de leurs diamètres et à la tangente menée à l'une des extrémités de ce diamètre. Mais ceci ne constitue pas encore la Géométrie analytique. Le mérite de Descartes est d'avoir rapporté toutes les courbes au même système d'axes et non point chaque courbe à un système d'axes choisi exprès pour elle. C'est en essayant de résoudre un problème qui avait beaucoup occupé les géomètres anciens, que Descartes conçut l'idée de sa Géométrie. Ce problème avait arrêté Euclide et Apollonius. La nouvelle méthode le résolvait immédiatement dans son expression la plus générale : l'exemple était donc bien choisi pour faire ressortir les avantages de la Géométrie analytique.

Pour pouvoir appliquer aux grandeurs concrètes les théories de l'Algèbre, Descartes se sert d'une méthode qui l'emporte de beau-

coup sur celle de Viète. Chez Descartes toutes les valeurs, quoiqu'elles aient la forme de carrés, cubes, etc., ne sont en réalité que des lignes toutes simples. Ainsi a^2 est la troisième proportionnelle à la grandeur prise pour unité, et a, etc.

On trouve dans la *Géométrie* une solution très détournée, il est vrai, du problème des tangentes (ou plutôt des normales); elle est suivie de la théorie des fameuses *ovales* qui devaient servir, d'après Descartes, à la construction des lentilles convergentes; le troisième Livre est consacré à l'Algèbre. Il contient la règle des signes et la résolution de l'équation du quatrième degré. M. Marie nous fait encore remarquer que Descartes a eu une grande part à l'interprétation des solutions négatives; ces solutions ne pouvaient plus être considérées comme fausses, puisque la Géométrie analytique leur donnait une interprétation; mais nous ne trouvons rien dans son Livre sur la résolution de l'équation biquadratique et la méthode des coefficients indéterminés.

Les idées de Descartes sur la Mécanique, telles qu'elles nous sont révélées par ses lettres particulières et son *Explication des machines et engins* offrent beaucoup de points intéressants.

Descartes, nous l'avons dit, remplit presque à lui seul la huitième période de M. Marie. Parmi les autres, nous ne pouvons guère mentionner que le P. Rheita, inventeur du télescope terrestre, et le jésuite Riccioli, qui fit de son mieux pour combattre le système de Copernic, mais qui a cependant rendu quelques services à la Science.

Le grand nom de Cavalieri appartient déjà à la période suivante (de Cavalieri à Huygens). L'analyse donnée par M. Marie des travaux du mathématicien italien, si peu étudié aujourd'hui, est très complète. L'auteur s'attache surtout à nous développer l'essence de cette méthode des indivisibles sortie du calcul d'exhaustion des anciens et qui a suppléé longtemps au Calcul intégral. Cette méthode est bien la propriété de Cavalieri, malgré les attaques qui ont été dirigées contre lui par Roberval. Elle consiste à considérer une grandeur continue comme composée d'un nombre infini d'éléments indécomposables; Cavalieri suppose que le volume est formé par des surfaces empilées, les surfaces de lignes et les lignes de points juxtaposées. Ceci est absurde; mais, comme nous le fait remarquer avec justesse M. Marie, l'absurde n'est que dans l'expres-

sion ; en réalité, les surfaces sont des tranches d'une petite hauteur, et ainsi de suite. Par cette méthode, Cavalieri donna une démonstration du théorème de Guldin. Il arriva aussi à quarrer les paraboles de degrés quelconques. Ses découvertes principales sont contenues dans les *Exercitationes geometricæ sex,* dont les deux premières Parties, intitulées *De priori methodo indivisibilium* et *De posteriori methodo indivisibilium,* contiennent l'exposé du calcul.

Passons sur le P. Lalouère, qui ne mérite guère l'attention que comme l'adversaire mal habile et peu scrupuleux de Pascal, pour arriver à Fermat. Ce grand homme, qui a fait tant progresser les Mathématiques, s'est distingué par une insouciance extrême à l'égard de ses découvertes, qui n'ont été publiées en partie qu'après sa mort et dont il a même parfois négligé de rédiger les démonstrations. Un grand nombre de ses lettres et de ses manuscrits, dispersés dans les collections de l'Europe, étaient absolument perdus pour la Science jusqu'à ces derniers temps. C'est aux manuscrits publiés par M. Charles Henry que M. Marie emprunte notamment une remarquable méthode de décomposition des grands nombres en facteurs premiers, méthode qu'on a réinventée au commencement de ce siècle et qui est tous les jours employée. Comment Fermat était-il arrivé à concevoir ses théorèmes arithmétiques? Il nous le dit lui-même dans sa *Relation des nouvelles découvertes en la science des nombres,* document découvert par M. Charles Henry et que M. Marie réédite *in extenso.* La méthode que Fermat appelle la *descente infinie ou indéfinie,* et qui lui servait à prouver tant de théorèmes, nous offre plus d'une énigme encore, comme l'a prouvé M. A. Genocchi ([1]).

([1]) Le célèbre géomètre français, dans la crainte que le loisir ne lui manquât pour mettre par écrit tout au long ses démonstrations et ses méthodes, a voulu faire *sommairement le compte de ses recherches sur le sujet des nombres.* Il expose qu'ayant reconnu l'insuffisance des méthodes ordinaires, il a enfin trouvé *une route tout à fait singulière,* nommée par lui la *descente infinie ou indéfinie.* Au commencement, il s'en servit pour établir les propositions négatives, par exemple, pour prouver qu'il n'y a pas de triangles rectangles en nombres dont l'aire soit un nombre carré. Le raisonnement procède de la manière suivante : « S'il n'y avait aucun triangle rectangle en nombres entiers qui eût son aire égale à un carré, il y aurait un autre triangle moindre que celui-là, qui aurait la même propriété; s'il y en avait un second moindre que le premier, qui eût la

On a fait honneur à Fermat de la première idée du Calcul différentiel; d'après Lagrange, « on peut regarder Fermat comme l'inventeur des nouveaux calculs ». M. Marie est beaucoup moins

---

même propriété, il y en aurait, par un pareil raisonnement, un troisième que ce second qui aurait la même propriété, et enfin un quatrième, un cinquième, etc., à l'infini en descendant; or est-il, qu'étant donné un nombre, il n'y en a point d'infinis en descendant moindres que celui-là : j'entends parler toujours de nombres entiers; d'où l'on conclut qu'il est donc impossible qu'il y ait aucun triangle dont l'aire soit carrée. » Il cachait la manière de déduire d'un triangle un autre plus petit, ce qui était le mystère de sa méthode et engageait les Pascal et les Roberval à la découvrir.

On voit que tout le raisonnement se fonde sur un principe employé déjà par Euclide au sujet des nombres entiers, à savoir qu'aucun nombre ne peut être diminué à l'infini. M. Genocchi remarquait en 1855, dans les *Annales de Tortolini,* que la manière d'exposer la méthode de Fermat adoptée par Euler et Lagrange ne lui semblait pas complètement exacte, puisqu'ils supposent qu'il est nécessaire d'essayer des substitutions effectives de petits nombres, afin de voir si pour ceux-ci la proposition est vérifiée; en effet, Euler veut qu'on fasse *quelques essais* sur des nombres très petits (*Algèbre,* t. II, art. 210, p. 259, et aussi p. 244, 302, 351, 359; Lagrange veut qu'on examine successivement *les premiers nombres de la suite naturelle* (*Mém. de l'Acad. de Berlin,* p. 140; 1777).

Le savant professeur de Turin faisait observer que la même méthode a été appliquée par un contemporain de Léonard Fibonacci, qui a été le premier commentateur d'Euclide, Campanus de Novare, et que, si Euclide a invoqué le principe indiqué pour établir une proposition affirmative et fort élémentaire de la théorie des nombres (tout nombre non premier est divisible par quelque nombre premier), Campanus y a recours pour une proposition d'un ordre plus élevé et négative : aucun nombre ne peut rationnellement être divisé en moyenne et extrême raison. Et M. Genocchi rapportait, traduite dans la langue algébrique d'aujourd'hui, la belle démonstration de Campanus, mentionnait d'autres démonstrations anciennes et récentes, et signalait une règle plus générale imaginée par Chasles pour la division en moyenne et extrême raison.

Il convient encore d'avertir qu'on trouve déjà, énoncé dans le *Liber quadratorum* de Fibonacci, le théorème donné comme exemple par Fermat dans le passage ci-dessus. Fibonacci s'exprimait dans les termes suivants : « Aucun nombre carré ne peut être congru. » Le Traité du géomètre italien ne contient pas la démonstration du théorème; mais il y affirme que la démonstration pourra être déduite d'un autre théorème démontré en cet endroit. M. Genocchi a essayé de remplir cette lacune et a donné deux démonstrations assez simples, il a fait d'autres applications de la méthode expliquée dans ce passage de Fermat et a prouvé : 1° que le nombre 10 n'est pas congru, proposition démontrée aussi par le professeur Mathieu Collins, de Dublin, mais seulement en 1858; 2° qu'aucun congru n'est double d'un carré; 3° que l'équation

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = z^2$$

est impossible en nombres entiers, de même l'équation

$$x^4 + 6x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = z^2;$$

affirmatif sur ce point. Tout en faisant ressortir le mérite de Fermat, notamment en ce qui concerne le problème des tangentes, il analyse d'une part tout ce qui a été fait par ses prédécesseurs,

---

il a énoncé sans démonstration quelques autres théorèmes sur les nombres dans un journal de Turin en 1855 et dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, en 1874. L'un de ces théorèmes était la généralisation du précédent qui se rapporte au nombre 10, car il exprime que le double d'un nombre premier de la forme $8n+5$ n'est jamais congru; les démonstrations ont été données en 1881 dans les *Mémoires de la Société italienne des Sciences* ou *Société des XL*.

Lagrange s'est servi de la méthode de Fermat, non pour démontrer l'impossibilité de certaines équations, mais pour trouver les solutions les plus simples, en nombres entiers, d'équations possibles. M. Genocchi a mentionné cette application dans une Note du 2 avril 1876 sur trois problèmes arithmétiques de Fermat. Mais l'emploi du même artifice pour démontrer certains théorèmes affirmatifs n'a pas été jusqu'ici mis en œuvre par aucun de ceux qui ont tâché de démontrer les propriétés des nombres découvertes par Fermat. On doit donc être surpris de lire, dans le manuscrit de la bibliothèque de Leyde, que Fermat a eu recours à cet artifice pour démontrer, par exemple, que tout nombre premier $4n+1$ se compose de deux carrés. Il avoue que cela lui a coûté beaucoup de fatigue et d'efforts et plusieurs méditations, et lui a pris beaucoup de temps; mais enfin il en est venu à bout. « Et les questions affirmatives passèrent par ma méthode à l'aide de quelques nouveaux principes qu'il y fallut joindre par nécessité. Ce progrès de mon raisonnement en ces questions affirmatives était tel. Si un nombre premier pris à discrétion qui surpasse de l'unité un multiple de 4 n'est pas composé de deux carrés, il y aura un nombre premier de même nature moindre que le donné, et ensuite un troisième encore moindre, etc., en descendant à l'infini jusqu'à ce que vous arriviez au nombre 5, qui est le moindre de tous ceux de cette nature, lequel il s'ensuivrait n'être pas composé de deux carrés, ce qui est pourtant; d'où l'on doit inférer par la déduction à l'impossible, que tous ceux de cette nature sont, par conséquent, composés de deux carrés. »

Il ajoute que d'autres questions *demandent de nouveaux principes* pour y appliquer la descente, et quelques-unes ne peuvent être traitées qu'à grand'peine, comme la proposition : *Tout nombre est la somme de quatre carrés*. « Je l'ai enfin rangée sous ma méthode et je démontre que, si un nombre donné n'était point de cette nature, il y en aurait un moindre, qui ne le serait pas non plus, puis un troisième moindre que le second, etc., à l'infini, d'où l'on infère que tous les nombres sont de cette nature. » Des difficultés égales ou même plus grandes se rencontrent pour démontrer que, si a est un nombre entier non carré, l'équation

$$y^2 = ax^2 + 1$$

aura une infinité de solutions en nombres entiers x et y. « Je la démontre, dit Fermat, par la descente appliquée d'une manière toute particulière. »

« A présent, conclut le savant arithméticien italien, tous les théorèmes qu'on vient de citer ont été démontrés d'une manière rigoureuse, par Lagrange principalement, mais sans qu'on ait jamais fait usage de la méthode que Fermat appelle la *descente*. »

Descartes, Barrow, Cavalieri et tout ce qui restait à faire à Pascal et à Huygens.

Si Fermat faisait peu de cas de ses grandes découvertes, son contemporain Roberval ne prisait que trop les siennes : il fut même entraîné à s'approprier des découvertes d'autrui. Cependant les mérites de Roberval sont grands. On ne peut nier que, s'il a eu tort de vouloir s'approprier l'invention de la Méthode des indivisibles, il a pourtant fait faire à cette partie de la Science un progrès important. Nous trouvons chez M. Marie les démonstrations de deux théorèmes sur les sinus, extraits de son Traité des indivisibles. Parmi les autres découvertes de Roberval, mentionnons la quadrature de la cycloïde et la cubature des volumes engendrés par sa révolution autour de sa base, toutes deux contenues dans le Traité *De trochoide ejusque spatio*. Il a essayé aussi de s'attribuer la rectification de la cycloïde, due à Wren. En revanche, sur un autre point, son mérite a été longtemps méconnu; nous voulons parler de sa Méthode de construction des tangentes réfutée fausse et reprise de notre temps. Mais Roberval a lui-même contribué à cette injustice par l'obscurité de son style.

L'Anglais Wallis peut être regardé comme le continuateur de Roberval. Son *Traité analytique des sections coniques* est le premier Ouvrage où les courbes aient été considérées non plus comme sections d'un cône, mais comme courbes du second degré, d'après la Méthode de Descartes. Dans l'*Arithmétique des Infinis,* il compléta l'œuvre de Cavalieri et de Roberval. On avait déjà quarré la parabole d'un degré quelconque; mais c'est Wallis qui, en débarrassant cette théorie de toute considération géométrique, a donné une démonstration à peu près générale de la formule. M. Marie nous rapporte cette démonstration, ainsi que plusieurs autres extraits des Ouvrages de Wallis. La Méthode s'y trouve poussée jusqu'à ses dernières limites, et M. Marie nous fait justement remarquer à ce propos la singulière tendance de l'esprit humain à prolonger l'usage des anciennes Méthodes au delà même du point où leur domaine s'arrête. On doit encore à Wallis l'expression élégante

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.}{1.3.3.5.5.7.7.9.} \cdots,$$

ainsi qu'une méthode pour la rectification des courbes. Il a, en

même temps que Wren et Huygens, connu le principe de la conservation du mouvement.

Pendant que Cavalieri, Fermat, Roberval et Wallis faisaient progresser les Mathématiques, Otto de Guericke inventait la machine pneumatique; Glauber enseignait nombre de préparations chimiques, Torricelli inventait le baromètre et donnait la loi d'écoulement des liquides. Dans la biographie de ce dernier, M. Marie nous rapporte l'origine et le cours de sa triste querelle avec Roberval et Pascal au sujet de la cycloïde. Il résulte encore une fois de cet exposé que Torricelli était sincère et qu'il a été bien injustement accablé des reproches de Pascal. Citons encore le physiologiste Borrelli qui, le premier, explique les mouvements des muscles; l'astronome Hevelius, l'auteur d'une remarquable carte de la Lune; Claude Perrault, le médecin-architecte qui fit plusieurs découvertes physiologiques; Jean Picard qui appliqua les lunettes à la mesure des angles et qui mesura avec une exactitude étonnante un arc de méridien; Nicolas Le Fèvre, le fondateur de l'enseignement chimique en France et en Angleterre; Viviani, le disciple bien connu de Galilée; Edme Mariotte dont la loi et le flacon pour l'écoulement des liquides sont célèbres, mais qui fit faire bien d'autres progrès à la Physique. M. Marie aurait pu citer sa découverte, merveilleuse alors, du *punctum cœcum* de l'œil.

Pascal est, comme Descartes, à la fois physicien et mathématicien. On sait la grande part qu'il a eue dans les recherches sur la pression de l'air. M. Marie aurait pu rappeler ici les titres réels de Descartes. Quoi qu'il en soit, le baromètre, comme instrument, appartient autant du moins à Pascal qu'à Torricelli; en tout cas, c'est le premier qui l'a désigné comme instrument pour mesurer les hauteurs. L'œuvre mathématiqne de Pascal est étudiée avec beaucoup de soin par M. Marie. Il nous donne des analyses très complètes de la *Lettre de M. Carcavy*, du *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets* et de plusieurs autres Ouvrages du grand mathématicien. Nous ne pouvons suivre l'auteur dans ses développements si pleins d'intérêt. Rapportons cependant cette appréciation des méthodes de Pascal. « Ses Ouvrages, nous dit M. Marie, contiennent sous une forme vicieuse, il est vrai, tous les principes du Calcul intégral et jusqu'aux formules de quadratures des expressions de la forme $\sin^m x\,dx$. Les démonstrations sont purement

géométriques; aucune formule n'est notée, le signe $\int$ n'est même pas employé; de plus le langage de Pascal est exactement celui de Cavalieri, c'est-à-dire qu'il supprime toujours dans tous ses énoncés les facteurs infiniment petits et ne conserve que les sommes infinies des abscisses, des ordonnées, des arcs, etc. Pour cela, quand il doit introduire dans un même énoncé plusieurs sommes, il a toujours soin de supposer égaux entre eux les infiniment petits, ce qui lui permet de les supprimer comme facteur commun. »

C. H.

MÉLANGES.

SUR L'ARITHMÉTIQUE PYTHAGORICIENNE;

PAR M. PAUL TANNERY.

I.

Dans mon étude sur *Domninos de Larissa* (¹), j'ai dit que Jamblique avait eu à sa disposition des documents anciens sur l'arithmétique pythagoricienne, et que son Traité méritait un examen spécial, moins au point de vue mathématique (car il a été suffisamment analysé à cet égard par Nesselmann et M. Cantor) qu'en ce qui concerne les renseignements historiques qu'il renferme: cet examen est le but que je me propose; je ferai en même temps usage des quelques autres ouvrages qui nous ont conservé des traces des doctrines pythagoriciennes sur les nombres.

Le traité de Jamblique sur l'Arithmétique, édité d'une façon assez incorrecte par Tennulius (Arnheim, 1668), formait la quatrième Partie d'un Ouvrage intitulé: *Discours sur la secte pythagorique* et dont nous possédons également les trois premiers Livres, *Sur la Vie pythagorique, Exhortation à la Philosophie, Sur la science mathématique en général,* livres qui n'offrent

---

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, p. 298, octobre 1884.

pour l'histoire des Mathématiques qu'un intérêt tout à fait secondaire. D'un scolie à la vérité incomplet, comme des passages où Jamblique annonce des développements ultérieurs, on a conclu que ce dernier avait dû aller jusqu'à la décade pythagorique et que nous aurions par suite perdu six Livres : *Sur la Physique, Sur l'Éthique, Sur la Théologie, Sur la Musique, Sur la Géométrie, Sur la Sphérique.* Il n'y a pas cependant de preuves décisives établissant que Jamblique avait complètement achevé son Ouvrage, et notamment rédigé les trois derniers *Discours.* Mais Syrianus, dans ses commentaires sur la Métaphysique d'Aristote (Venise, 1556), cite le Ve et le VIIe Livre de Jamblique, et ces citations semblent bien indiquer que ces Livres étaient respectivement consacrés, en fait, à la Physique et à la Théologie.

On peut trouver singulière cette intercalation de trois Livres qui rompent la série de l'exposition des quatre sciences mathématiques reconnues par les pythagoriciens ; mais il faut se rendre compte que, malgré l'apparence, ces trois Livres formaient la suite naturelle de l'Arithmétique, en traitant, conformément à la tradition pythagoricienne, du rôle des nombres dans la nature et de leurs propriétés mystiques, soit dans l'ordre humain, soit dans l'ordre divin. Les citations de Syrianus, qui touchent expressément les nombres, confirment l'exécution de ce plan, très nettement exposé par Jamblique à la fin de son IVe Livre sur l'Arithmétique.

« Arrêtons ici l'introduction suivant le pythagoricien Nicomaque. Plus tard, si Dieu le permet, nous ferons plus complètement cette même introduction arithmétique, et nous te l'offrirons, puisque, par le moyen de celle-ci, tu seras déjà capable d'aller plus loin. Nous y comprendrons tous les autres *épanthèmes* relatifs aux nombres depuis l'unité jusqu'à la décade, et qui rentrent dans la Physique, dans l'Éthique et encore et surtout dans la Théologie; ainsi il te sera plus facile et très simple de recevoir l'enseignement des trois introductions suivantes, je veux dire de la Musique, de la Géométrie et de la Sphérique. »

Ainsi Jamblique annonce, avant de passer aux trois autres sciences mathématiques, un *seul* Traité, que l'abondance des matières lui aura fait diviser en trois Discours, et qu'il considère comme faisant essentiellement partie de l'Arithmétique. On voit aussi qu'en dehors des considérations générales (qu'on peut croire.

étant donné Jamblique, avoir été passablement étendues, mais sans intérêt majeur), ce Traité devait surtout être constitué par des développements sur les propriétés, mystiques et autres, des dix premiers nombres, qu'au moins une partie de l'école, dès le temps d'Aristote, avait pris l'habitude de considérer exclusivement pour les spéculations de cet ordre.

La perte des trois Livres de Jamblique en question est compensée pour nous dans une certaine mesure par l'existence d'une petite compilation anonyme intitulée les *Théologoumènes de l'Arithmétique,* éditée en dernier lieu par Ast (Leipzig, 1817). La date de cette compilation ne peut guère être précisée ; l'auteur le plus récent qu'elle cite est un Anatolius qui paraît avoir été un maître de Jamblique. On l'a attribuée à ce dernier et l'on a prétendu qu'elle représentait son Livre VII, mais cette opinion ne peut se défendre : ce n'est ni le style, ni les procédés de compilation de Jamblique ; la citation faite par Syrianus ne peut s'y retrouver ; enfin, et surtout, elle correspond non pas au Livre VII, mais bien aux Livres V, VI et VII de Jamblique. Elle expose, pour chacun des nombres de la décade pris successivement, à la fois les propriétés d'ordre physique, d'ordre éthique et d'ordre théologique ; nous y voyons par exemple, pour le nombre 5, qu'il y a 5 éléments (propriété physique), que la pentade est au plus haut degré représentative de la justice (propriété éthique), qu'elle est appelée *Némésis,* etc. (propriété théologique).

Évidemment l'auteur a puisé aux mêmes sources que Jamblique ; certains passages se retrouvent exactement comme fond, et sous une forme au moins très voisine, par exemple dans le Traité arithmétique de Jamblique ; mais la confusion qui règne, à l'intérieur du Chapitre consacré à chaque nombre, entre les propriétés de divers ordres, semble assez prouver que le compilateur n'a pas profité du travail opéré par Jamblique pour distinguer ces propriétés d'après leur caractère, et que par suite il a dû écrire vers la même époque, mais avant la publication des trois Livres V à VII. Sa compilation doit donc nous représenter, encore plus fidèlement que ne le feraient ces trois Livres perdus, l'état de la tradition avant Jamblique.

Nous devons en tout cas retenir ceci, que pour ce dernier, d'après cette tradition, le plan d'une arithmétique pythagori-

cienne comprenait, après l'exposé des propriétés générales des nombres conformément à la marche suivie par Nicomaque, l'exposé des propriétés d'ordre mystique spécialement reconnues aux dix premiers nombres.

Il est certain que cette tradition est très antérieure à Jamblique; nous savons que Nicomaque avait composé lui-même des *Théologoumènes arithmétiques,* qui, d'après les détails que nous donne Photius, étaient tout à fait composés sur le même plan que l'Ouvrage anonyme que nous possédons, et dont nous retrouvons, dans ce dernier, de nombreux extraits. Nous possédons encore, d'autre part, le Livre de Théon de Smyrne, *Ce qui en Mathématiques est utile pour la lecture de Platon* (Bouilleau, 1644), dont l'auteur traite d'abord de l'Arithmétique, puis de la Musique, où il comprend la théorie des rapports et des proportions, ce en quoi il suit évidemment la tradition antique; viennent ensuite, passablement développées, les propriétés mystiques de la décade, puis quelques mots sur la Géométrie, la Stéréométrie, et les médiétés, après quoi Théon passe à l'Astronomie (partie publiée par Th. H. Martin, Paris, 1849).

Il serait intéressant de déterminer jusqu'à quel point on doit considérer comme fidèle, en ce qui concerne l'ancienne école pythagorique, cette tradition ainsi bien constatée à partir du premier siècle de l'ère chrétienne et au moins de l'époque des maîtres et précurseurs immédiats de Nicomaque, comme Modératus de Gades. Il est évidemment impossible de faire le départ entre les rêveries mystiques dues aux néopythagoriciens, et celles dont l'ancienne école leur avait donné l'exemple; mais il ne me paraît pas douteux que le plan général d'Arithmétique, avec les développements finaux sur la décade, tel que l'ont conçu Nicomaque, Théon de Smyrne et Jamblique, ne remonte en réalité au ve siècle avant notre ère, car c'est en fait le même programme qu'avait déjà suivi Speusippe, le neveu de Platon, dans son Traité *Des nombres pythagoriques* (1).

---

(1) *Voir,* sur le fragment de Speusippe conservé dans les *Théologoumènes,* mon étude dans les *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux,* t. V, p. 375; 1883. Tout au plus peut-on dire que les tendances mystiques y sont beaucoup moins accusées que dans les écrits néopythagoriciens, et qu'il n'est pas clair que Speusippe se soit étendu sur les propriétés spéciales des nombres autres que 10.

On a cependant besoin de preuves particulières, relatives aux développements que pouvaient déjà présenter, dans l'ordre d'idées mystique, les écrits des anciens pythagoriciens, et il convient, à cet égard, d'examiner les citations expresses d'auteurs déterminés que nous rencontrons dans Nicomaque, dans Théon de Smyrne, dans Jamblique et dans les *Théologoumènes*. J'écarterai de ces citations celles dont la tendance est seulement philosophique, comme celles qui se rapportent au rôle des idées d'unité et de dualité, et j'étudierai en second lieu celles dont le caractère est plus purement scientifique, et qui nous seront surtout fournies par Jamblique.

II.

Quand on parle de citations d'anciens pythagoriciens, on ne peut ajouter foi à celles qui remontent à une époque antérieure à celle de Philolaos, puisque la tradition constante de l'antiquité est qu'il fut le premier qui, dans son ouvrage *Sur la Nature*, exposa les doctrines de l'Ecole, jusque-là réservées au cercle des initiés, et que, d'autre part, il est certain que, dans cette exposition, il s'écarta singulièrement des conceptions primitives. Il est toutefois à remarquer que la tradition attribue soit à Pythagore, soit à ses disciples immédiats, la rédaction de poèmes mis sous le nom d'Orphée, et que l'ensemble de ces poèmes, en écartant les interpolations et falsifications de date récente, et dues surtout à des gnostiques chrétiens, remonte incontestablement aux VIe et Ve siècles avant J.-C.

On ne peut donc négliger absolument les citations des *Théologoumènes* (VI et IX), d'après lesquelles :

1° Les pythagoriciens, suivant les traces d'Orphée, appelaient l'hexade *holomélie,* ce qui paraît se rapporter à la propriété du nombre 6, en tant que parfait, d'être égal à la somme de ses parties aliquotes ;

2° Orphée et Pythagore ont particulièrement appelé l'ennéade *Kourétide, Hypérion, Terpsichore*. Ici nous sommes en plein mysticisme, et nous rencontrons cette synonymie singulière, qui se trouvait déjà si développée, pour tous les nombres de la décade, à l'époque de Nicomaque.

J'attache relativement moins d'importance aux citations du pythagoricien Aristée de Crotone, successeur immédiat de Pythagore, suivant la tradition. Jamblique (p. 168) rapporte qu'il avait parlé de la proportion

$$6 : 8 :: 9 : 12,$$

enseignée à Pythagore par les Babyloniens, et les *Théologoumènes* (VI) disent qu'il avait montré que, dans la décade, il n'est pas possible de trouver un autre nombre que 6 susceptible de tous les rapports de l'harmonie psychique, c'est-à-dire sans doute, pouvant servir de point de départ à une pareille proportion.

Les citations de Philolaos ont plus d'importance, d'autant qu'elles proviennent d'un Ouvrage bien déterminé, dont l'authencité n'est guère contestable, et qui existait certainement encore au temps de Jamblique. On a de cet Ouvrage de nombreux fragments, conservés surtout par Stobée, et dont plusieurs ont un caractère mystique très accusé; mais je crois inutile de m'appuyer sur eux, et je me borne aux citations tirées des quatre Ouvrages que j'examine.

Il semble résulter du texte de Nicomaque (II, 26) que Philolaos avait appelé le cube *harmonie géométrique*, parce que dans les nombres des faces, des arêtes et des sommets de ce polyèdre, il retrouvait la proportion harmonique : 6 . 8 . 12.

Il est à remarquer que, d'après le commentaire inédit d'Asclépius sur Nicomaque, cette appellation du cube aurait été mentionnée par Aristote dans son Traité *De l'âme*, tandis que, dans le texte que nous possédons de ce Traité, cette mention ne se retrouve pas; néanmoins une tendance mystique peut être attribuée à cette dénomination, car on sait de reste que Philolaos définissait l'âme comme une harmonie, ce qu'on peut rapprocher de la citation d'Aristée qui précède. En tout cas, nous avons d'autres témoignages un peu plus précis.

Théon (*Mus.* 49) dit que Philolaos s'était longuement étendu sur les propriétés de la *décade*, et les *Théologoumènes* (X), que d'après lui on l'a appelée *foi;* toutefois le texte ne permet pas de décider s'il lui avait en réalité donné ce nom, ou si quelque néopythagoricien avait trouvé dans son langage un motif suffisant pour adopter cette synonymie.

Les *Théologoumènes* (IV) citent encore un fragment du Livre *De la Nature*, d'après lequel Philolaos distinguait dans l'homme quatre parties primordiales, le cerveau, le cœur, le nombril, les organes génitaux. Ici nous rencontrons dans ce quaternaire, un type d'énumérations semblables des choses qui sont au nombre de trois, quatre, cinq, etc., énumérations fréquentes dans les divers documents relatifs aux pythagoriciens. C'est principalement sous cette forme qu'ils présentaient les propriétés des nombres relativement à la Physique; on doit y voir surtout un procédé mnémotechnique pour le classement des connaissances de toute sorte, mais l'emploi systématique de ce procédé conduisit naturellement à attribuer aux nombres des propriétés mystiques. On peut remarquer au reste que le même procédé se retrouve chez les peuples les plus différents (1), et que, chez les Hindous, il a été l'origine de la synonymie employée pour le système de numération suivi dans les *slokas* de Brahmegupta.

D'après Théon (*Mus*, 49), Archytas aurait écrit un Livre spécial *Sur la décade*; après lui, les *Théologoumènes* (VII) citent un Livre *Sur l'hebdomade* du pythagoricien Proros. D'après Jamblique (*Sur la vie pythagorique*), ce dernier était de Cyrène et particulièrement lié avec Clinias de Tarente, lequel doit avoir vécu au temps de Platon, puisque Aristoxène (dans Diogène Laërce) prétend qu'il aurait empêché le disciple de Socrate de brûler les œuvres de Démocrite. Proros aurait dit que les Pythagoriciens disaient σεπτάς pour désigner le nombre 7; ce témoignage est curieux en ce qu'il indique au sein de l'École une certaine influence exercée au moins par le langage des populations italiotes voisines de la Grande-Grèce.

Les *Théologoumènes* (V) citent enfin un fragment du Livre *Sur les nombres* d'un certain Mégillos; on s'y trouve en pleine synonymie mystique; mais l'époque où vivait ce pythagoricien ne peut être déterminée, et, comme il ne figure pas sur les listes de Jamblique, il est très probablement postérieur au IVe siècle avant J.-C.

Les conclusions à tirer de ce relevé me paraissent les suivantes.

---

(1) Par exemple, dans les *Proverbes* de Salomon, dans les *Triades* des bardes cambriens, etc.

Le plan général d'une Arithmétique traitant d'abord des propriétés mathématiques de tous les nombres, puis des propriétés de toute sorte spéciales aux dix premiers nombres, ce plan que nous retrouvons chez les néopythagoriciens, paraît bien conforme à la tradition de l'ancienne école. Dans la seconde Partie, les deux ordres de synonymie, l'un proprement mnémotechnique, l'autre purement mystique, sont également anciens, le second remontant aux poèmes orphiques; mais leur développement, surtout pour le second ordre, paraît postérieur au IVe siècle, tout en restant antérieur à l'ère chrétienne.

Ces conclusions diffèrent des idées admises en général, en ce que l'on considère plutôt le développement mystique comme s'effectuant à partir de la renaissance du pythagorisme, et comme influencé par les idées orientales; à la vérité, Jamblique est imbu de ces idées, et l'on en trouve des traces dans les *Théologoumènes* (par exemple le mot d'*anges*); mais la synonymie mystique, déjà complètement développée au temps de Nicomaque, a un caractère exclusivement hellène. Il faut d'ailleurs remarquer que la renaissance du pythagorisme a eu lieu non pas à Alexandrie, mais bien à Rome, au premier siècle avant l'ère chrétienne; le chef en est un certain Sextius (Sextus de Jamblique), qui mélange déjà sans doute aux éléments traditionnels de nouvelles formules, mais les emprunte surtout aux stoïciens; ses disciples ont, comme lui, reçu la culture grecque, mais ce sont de purs Romains ou des Occidentaux, comme Modératus, auquel se rattache immédiatement Nicomaque.

Jamblique admet que Sextus a recueilli directement (κατὰ διαδοχήν) la tradition pythagoricienne. Le fait est-il si improbable? Après Aristote, l'École disparaît dans la Grèce propre, et elle ne prend pas pied dans les États fondés par les successeurs d'Alexandre; vers la même époque, la conquête romaine s'étend sur le foyer originaire du pythagorisme, la Grande-Grèce, bientôt après sur la Sicile, et rompt la plus grande partie des liens qui rattachaient ces pays à l'Hellade. La prétendue extinction complète du pythagorisme dans la Grande Grèce est une légende dont les détails ne supportent pas l'examen. Est-il absurde de supposer qu'il s'y soit perpétué obscurément pendant quatre ou cinq générations sous la domination romaine, avant de former (la première de toutes les

sectes philosophiques grecques) parmi les nouveaux maîtres des élèves qui lui donnent une nouvelle vie? On pourrait placer dans cette période le nom de Megillos et aussi ceux de Myonide et d'Euphranor, que nous rencontrerons plus loin.

Il convient de remarquer que, lorsque Nicomaque (II, 14) cite des écrits *théorétiques* où l'on rencontre la mention de nombres *pyramides colures* (sommes de polygones ne commençant pas à l'unité), Asclépius et Philopon sont d'accord, sous des termes différents, pour reconnaître dans ces écrits, non pas des ouvrages *théoriques* sur l'Arithmétique, où il aurait été traité *ex professo* des nombres pyramides, etc. mais bien des *Théologoumènes*, analogues à ceux composés par Nicomaque lui-même. Asclépius dit que *théorétique* est opposé à *éthique*, pour désigner le caractère propre de ces traités pythagoriciens, dont nous recherchons les traces en ce moment; on sait qu'il nous reste de l'École de nombreux fragments *éthiques;* certains, au moins, pourraient être rapportés à l'époque obscure que nous admettons pour les Traités *théorétiques*.

III.

J'aborde maintenant les citations de pythagoriciens qui présentent un intérêt plus proprement scientifique.

Pour Pythagore lui-même, il suffit de mentionner: 1° le fragment de l'écrit *Sur les Dieux* (*Théolog.*, IV), relatif à la distinction des quatre sciences mathématiques, fragment certainement apocryphe, mais conforme à la tradition ; 2° la définition du nombre, attribuée au Maître par Jamblique (p. 11) et qui, évidemment postérieure aux stoïciens, n'offre d'ailleurs aucun intérêt; 3° les affirmations qu'il connaissait le triangle rectangle en nombres (*Théolog.*, I), la propriété des nombres *amis*, 284 et 220 (*Jambl.*, p. 47), les trois proportions arithmétique, géométrique et harmonique (*Nicomaque* II, 22), ainsi que la proportion

$$:6:8:9:12,$$

et l'application des rapports de ces derniers nombres dans la théorie de la musique, ce en quoi il aurait été seulement suivi par

Aristée, Timée de Locres, Philolaos et Archytas (Jamblique, p. 168).

Dans l'ordre des temps, nous rencontrons ensuite Hippasos, que la tradition représente comme ayant formé secte au sein de l'École; ses disciples, les *Acousmatiques,* paraissent se distinguer des *Mathématiciens,* surtout comme observant scrupuleusement nombre de préceptes symboliques dont ils n'ont pas le véritable sens; leur maître aurait été châtié par les dieux d'une révélation de la doctrine relative au dodécaèdre régulier. Les définitions du nombre que Jamblique (p. 11) attribue aux *Acousmatiques* n'ont pas plus d'authenticité ni d'intérêt que celle qu'il rapporte à Pythagore, et les témoignages qui méritent le plus de confiance s'accordent pour reconnaître comme supposés les écrits qui circulaient anciennement sous le nom d'Hippasos. Théon (*Mus.,* 12) dit assez vaguement qu'il avait fait des recherches expérimentales sur l'acoustique, mais il est surtout à remarquer que Jamblique (p. 141, 159, 163) le lie constamment à Archytas, quand il parle de ce dernier à propos des proportions.

Comme les écrits authentiques d'Archytas, en particulier son traité de l'*Harmonique,* dont Nicomaque (I, 3) cite le début ([1]), devaient subsister au temps de Jamblique, à côté des écrits apocryphes qui pouvaient porter aussi le nom de l'ancien pythagoricien ([2]), le fait a une certaine importance, parce qu'il est très possible qu'Archytas y ait cité nommément Hippasos et se soit appuyé sur lui. Lorsque Jamblique notamment rapporte que la proportion harmonique avait d'abord été appelée *sous-contraire,* et que son nom fut changé plus tard d'après Archytas et Hippasos, on peut bien faire remonter au dernier cette appellation, que devait déjà avoir adoptée Philolaos, antérieur à Archytas. Quant à l'invention des trois *médiétés* sous-contraires, il ne semble pas au contraire qu'il faille la faire remonter en tout cas au delà d'Archytas, d'autant que Jamblique se contredit sur cette question;

([1]) Au sujet de la parenté des quatre sciences. Dans cette citation, Hoche aurait dû conserver τοὶ (pour οἱ) devant περὶ τὰ μαθήματα: Archytas désigne ainsi les *mathématiciens* de l'école de Pythagore.

([2]) En particulier ceux qui en feraient l'inventeur des dix catégories d'Aristote.

dans deux passages, il la donne à Archytas et Hippasos, dans un troisième (p. 142) à Eudoxe, disciple d'Archytas, ainsi que le fait également Proclus d'après Eudème; quant aux quatre dernières *médiétés*, Jamblique donne expressément leurs inventeurs, Myonide (1) et Euphranor, comme postérieurs à Eratosthène; ils seraient donc au plus tôt du IIe siècle avant J.-C.

Les citations de Timée de Locres par Jamblique se rapportent à l'ouvrage apocryphe calqué sur le dialogue de Platon qui porte le nom du pythagoricien; il n'y a donc pas à s'y arrêter; et si nous arrivons aux témoignages plus authentiques concernant Philolaos et Archytas, ils n'offrent en réalité qu'un intérêt médiocre, en dehors de ceux que nous avons déjà vus pour le second.

Du premier, Jamblique ne cite que des formules philosophiques sur l'infini et le fini et une prétendue définition du nombre qui présente le même caractère, et qui ne reproduit probablement pas exactement le texte de Philolaos; au reste, le livre *Sur la Nature* n'avait nullement une portée mathématique, et la valeur scientifique de ce Livre consistait surtout dans sa partie physique et astronomique.

Théon (*Arith.*, 3) remarque que Philolaos et Archytas disent indifféremment l'un ou l'unité, c'est-à-dire qu'ils ne distinguent pas entre le nombre un et l'idée platonicienne de l'unité. Il cite d'Archytas (*Arith.*, 5) un fragment probablement emprunté au Livre *De la décade*, et sur lequel nous reviendrons; enfin (*Mus.*, 13), il dit, probablement d'après le Traité sur l'*Harmonique*, qu'Archytas (il ajoute Eudoxe) avait reconnu que les sons les plus hauts correspondaient aux vibrations les plus rapides, et que les rapports numériques correspondant aux accords musicaux devaient exister entre les vitesses des mouvements.

Comme nous savons d'ailleurs qu'Archytas avait introduit d'autres nombres que les quatre premiers dans les rapports musicaux, il est possible que ce soit à cette occasion qu'il ait recherché d'autres médiétés que l'harmonique, et que les recherches de Myonide et d'Euphranor se relient au même ordre d'idées, que

---

(1) La leçon περί τε Μυωνίδην me paraît plus probable que celle suivie par Tennulius : περὶ Τεμνωνίδην.

l'occasion qui leur a donné naissance soit donc plutôt une question de musique qu'une question d'Arithmétique.

Les *Théologoumènes* (IV) citent Clinias de Tarente à propos de la distinction des quatre sciences mathématiques. C'était, nous l'avons dit, un contemporain de Platon.

Nous arrivons enfin aux citations de Jamblique relatives à Thymaridas; à la différence de tous ceux que nous avons rencontrés jusqu'à présent, ce dernier paraît avoir composé un Ouvrage réellement arithmétique, renfermant en particulier une proposition intéressante pour l'histoire de l'Algèbre, et à laquelle Jamblique donne le nom d'*épanthème*.

Cette proposition peut s'exprimer comme suit dans le langage moderne.

Si l'on a, entre n inconnues, les n équations

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= S, \\ x_1 + x_2 &= a_1, \\ x_1 + x_3 &= a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_n &= a_{n-1}, \end{aligned}$$

on a

$$x_1 = \frac{\Sigma_1^{n-1} a_p - S}{n-2},$$

d'où l'on tire immédiatement les autres inconnues.

Jamblique applique cette proportion à la solution en nombres entiers minimi des systèmes d'équations indéterminés :

$$(1)\quad x_1 + x_2 = 2(x_3 + x_4), \quad x_1 + x_3 = 3(x_2 + x_4), \quad x_1 + x_4 = 4(x_2 + x_2)$$

et

$$(2)\quad x_1 + x_2 = \tfrac{3}{2}(x_3 + x_4), \quad x_1 + x_3 = \tfrac{4}{3}(x + x_4), \quad x_1 + x_2 = \tfrac{5}{4}(x_2 + x_3)$$

La solution, d'ailleurs très élégante en fait, se rapproche singulièrement des procédés de Diophante pour des systèmes analogues, et doit, comme principe au moins, remonter à l'époque de l'*épanthème*.

Il y a certainement un grand intérêt historique à déterminer l'âge auquel il faut rapporter Thymaridas ; j'ai déjà discuté ailleurs

la question ([1]) et montré que l'argument de Th.-H. Martin, pour le placer après Théon de Smyrne, se retourne contre son opinion.

Je me contenterai donc de quelques remarques nouvelles, qui me paraissent d'ailleurs suffisantes pour trancher la question.

Pour Jamblique, Thymaridas est incontestablement plus ancien qu'Euclide, car il oppose (p. 11) sa définition de l'unité, περαίνουσα ποσότης (la quotité limite), à celle des auteurs plus récents, (οἱ νεώτεροι) ([2]) (ce suivant quoi chaque chose est dite une), qui n'est autre que celle d'Euclide.

La définition de Thymaridas, à côté d'une expression philolaïque, en offre une autre qui paraît empruntée au langage de Platon; on peut donc la placer au IVe siècle avant J.-C. Si d'ailleurs, d'après le témoignage de Jamblique (p. 36), Thymaridas appelait les nombres premiers *rectilinéaires*, et si l'expression de *linéaires* se retrouve évidemment avec le même sens, dans un fragment de Speusippe (*Théolog.*, X), on n'est pas en droit d'en conclure que Thymaridas ait été antérieur à Speusippe, car rien ne prouve qu'il ait été l'inventeur, ni de l'expression, ni du système de figuration auquel elle se rapporte.

Il convient de donner maintenant quelques explications sur le mot d'*épanthème* (littéralement : *surfloraison*). Ce mot n'appartient nullement à Thymaridas ; Jamblique l'emploie en général pour désigner des additions à l'*Introduction* de Nicomaque, et l'on a pu voir qu'il s'en servait également pour parler des développements relatifs aux propriétés mystiques des nombres de la décade. Dans un passage d'ailleurs assez obscur (p. 53), il parle du procédé des « tableaux divinatoires (τῶν μαντικῶν πλινθιδίων)

([1]) Voir *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux*, t. III, p. 101; 1881, et aussi la préface des *Vorlesungen* de M. Cantor.

([2]) La définition de Thymaridas est donnée d'ailleurs, sans nom d'auteur, par Théon de Smyrne. Dans cette définition, περαίνουσα est pris dans le sens que lui donne Philolaos; il faut entendre par *quotité* l'ensemble des nombres entiers, les fractions appartenant à la πηλικότης, c'est-à-dire à l'ordre des grandeurs continues (comme nous le voyons dans Asclépius et Philopon); c'est ainsi une définition analogue à celle également attribuée aux pythagoriciens pour le nombre : l'intermédiaire entre l'unité et les fractions.

dont il est traité dans les *épanthèmes de l'Introduction arithmétique* » : ces tableaux doivent être ceux qui servaient au mode de divination dont j'ai parlé ici-même ([1]), d'après S. Hippolyte, et qu'on retrouve dans des lettres apocryphes inédites de Pythagore à Télaugès, Laïs, Hélias (ces derniers noms sont des corruptions de celui de Télaugès) ([2]).

Voilà donc un second épanthème, consacré à ce que nous pouvons appeler le principe de la preuve par neuf, et qui, avec celui de Thymaridas et sans doute d'autres encore, forme, en dehors des épanthèmes des *Théologoumènes,* comme un recueil servant, à côté de l'*Introduction* de Nicomaque, à l'instruction des étudiants en philosophie; car c'est à ces étudiants que s'adressent et Nicomaque et Jamblique, et l'un et l'autre professent beaucoup moins réellement le pythagorisme qu'une philosophie éclectique, appropriée à l'enseignement général, et où l'on se préoccupe de Platon et d'Aristote autant que de Pythagore.

IV.

En dehors des pythagoriciens proprement dits, Jamblique nous fournit encore quelques citations qui peuvent donner l'occasion d'éclaircir l'histoire des concepts de l'unité et du nombre.

Nicomaque ne définit pas l'unité; après la définition de Thymaridas et celle d'Euclide, Jamblique rapporte (p. 12) celle de Chrysippe (école stoïcienne), la pluralité une (πλῆθος ἕν); et une autre qu'il donne comme pythagoricienne, l'intermédiaire entre l'unité et les fractions ([3]). Il rejette la définition de Chrysippe, comme contenant une contradiction *in adjecto,* puisque l'idée de pluralité est opposée à celle d'unité. Mais nous pouvons y voir une tentative sérieuse, celle de faire expressément rentrer

---

([1]) *Sur l'invention de la preuve par neuf* (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques,* t. VI; 1882).

([2]) Manuscrits de la Bibliothèque nationale de Paris, nos 2256, 2009, 2419, etc.

([3]) Je ne m'arrête pas à une quatrième anonyme, et qui n'est qu'une formule philosophique.

le concept d'unité dans celui plus général de nombre, tandis que les autres définitions maintiennent plus ou moins l'exclusion des deux concepts.

Originairement, la pluralité ou le nombre ne commençait qu'à 3 ; 1 et 2 n'étaient que les principes de l'impair et du pair, jouissant en puissance, mais non en acte, suivant les termes d'Aristote, des propriétés du nombre. Cette conception, dont la source était dans les habitudes du langage, a été de bonne heure abandonnée pour le nombre 2, mais des traces s'en conservent encore dans Nicomaque, d'après lequel 2 n'est pas, à proprement parler, un nombre premier. Elle est très nette dans la définition pythagoricienne du nombre pair, celui qui peut se diviser à la fois en parties égales et en parties inégales ; l'exception faite par Nicomaque au sujet de la dyade, primordiale du pair, est évidemment une modification postérieure de la définition originaire.

Pour 1, au contraire, sa position en dehors du nombre resta toujours affirmée dans les définitions classiques, celles d'Euclide, et ne fut pas sérieusement contestée.

Cette conception entraîna une conséquence singulière ; d'après Aristote (Théon, *Arithm.*, 5), c'est une doctrine pythagoricienne que l'unité étant principe du nombre en général, aussi bien du pair que de l'impair, ne peut être regardée comme impaire, et qu'il faut l'appeler *paire impaire*. Mais l'autorité d'Aristote ne peut faire regarder cette conclusion comme généralement adoptée par l'École, et quoique Théon, qui d'ailleurs combat cette opinion, semble dire qu'Archytas s'y ralliait, le fragment qu'il cite ne peut être entendu que dans le sens opposé.

En opposition à cette tradition relative au nombre 1, il convient certainement de mentionner un passage, où Jamblique (p. 19) remarque au contraire « qu'il semble y avoir lieu de continuer la série du nombre au-dessous de l'unité par le zéro (τὸ οὐδέν), qui s'introduit souvent naturellement malgré nous dans la théorie ». Ainsi un nombre en général est la moitié de la somme de celui qui le précède et de celui qui le suit ; 1 sera la moitié de 2 et de l'οὐδέν.

Pour le nombre, Nicomaque donne trois définitions : l'une (un *système d'unités*) est attribuée par Jamblique à Thalès, qui l'aurait,

prétend-il, empruntée aux Égyptiens; une autre (une *pluralité déterminée*) serait celle d'Eudoxe; Jamblique ne parle pas de la troisième [*une réunion* (χύμα) *en quotité, composée d'unités*]; elle doit être postérieure à celle d'Euclide (une pluralité composée d'unités).

La définition de Thalès, qui s'applique exclusivement aux nombres entiers, en en distinguant d'ailleurs l'unité, est restée de fait classique à côté de celle d'Euclide, moins simple et ne disant guère plus. Celle d'Eudoxe témoigne, à mon sens, d'un progrès notable dans le concept du nombre; car une pluralité peut être composée, soit d'unités, soit de parties, et l'indétermination laissée par la définition est évidemment calculée; la notion du nombre, conçu comme indifféremment entier ou fractionnaire, doit donc remonter jusqu'à Eudoxe.

La définition d'Euclide, malgré l'apparence, ne constitue pas un pas en arrière; car, dans ses Livres arithmétiques, le géomètre traite des propriétés des nombres entiers, et il était naturel qu'il restreignît, dans sa définition, le concept déjà formé du nombre rationnel.

La troisième définition donnée par Nicomaque, et que l'on peut regarder comme stoïcienne, se distingue par la priorité donnée au concept de quotité (ποσότης) substitué à celui de *pluralité* (πλῆθος) qui, dans le langage ordinaire, ne se distinguait guère de celui du nombre entier; cette définition paraît donc conçue parallèlement à une autre applicable au nombre fractionnaire.

Les Éléments d'Euclide étant devenus classiques, le concept ne fit aucun progrès dans la période qui suit le commencement de l'ère chrétienne, et le langage ne devint nullement plus précis. Au début de son préambule, Diophante définit le nombre comme un composé d'unités, tandis que dans ses problèmes il entend comme nombre en général tout nombre rationnel, et spécifie l'entier comme ὅλος (III, 13) ou ὁλόκληρος (IV, 45).

On ne peut même dire, ce qu'on fait souvent, que la notion du nombre irrationnel ait été absolument étrangère aux Grecs; car on rencontre dans Diophante (par exemple IV, 10), des expressions comme : καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς οὐ ῥητός (et l'inconnue devient non

rationnelle). Le fait que dans ses problèmes d'Analyse indéterminée Diophante ne s'occupe que des solutions rationnelles ne doit pas faire illusion; car l'origine de ces problèmes doit être cherchée dans l'idée qu'il est possible, au moins en certains cas, de trouver des relations rationnelles permettant des éliminations entre des équations de plusieurs inconnues de degré supérieur. Ainsi l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2$$

peut être remplacée par le système

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u^2 + v^2,$$

qui donne rationnellement x, y, z (les trois côtés du triangle rectangle en nombres) en fonction de deux inconnues auxiliaires.

Lorsque les concepts fondamentaux d'une science sont négligés, on peut assurer que le progrès de la Science se trouve enrayé. Le résultat de notre étude est d'ailleurs conforme à cette conclusion; on peut trouver dans Nicomaque, dans Théon et surtout dans Jamblique de nombreuses remarques de détail plus ou moins intéressantes; mais les théories qu'ils exposent leur sont très antérieures, et, somme toute, ils ont été loin de les améliorer. On ne peut leur attribuer aucune découverte importante ([1]), ni quelque perfectionnement sérieux dans le mode d'exposition de ce qui était connu avant eux; bien au contraire, l'absence de toute démonstration réelle, l'appel constant à l'intuition ou à l'induction, sont des signes qui marquent que le niveau des études baisse au lieu de s'élever.

Pour être juste à leur égard, il convient de remarquer que sans doute ils n'avaient pas de modèle qui pût les guider, du moment où ils n'adoptaient pas la forme euclidienne, c'est-à-dire l'appareil

---

([1]) On a récemment prétendu que Nicomaque revendiquait, comme lui appartenant, l'invention de notre Table de multiplication à double entrée; rien n'est moins exact. Si d'ailleurs il s'étend longuement sur les relations des nombres de cette Table, il n'est nullement prouvé qu'elle ait été employée dans l'antiquité pour un but pédagogique; en tout cas, Nicomaque suppose le calcul connu de ses lecteurs.

géométrique pour la démonstration des propriétés des nombres. Cet appareil fut adopté dès la rédaction des plus anciens *Éléments arithmétiques* (bien antérieurs à Euclide) parce qu'il était déjà connu et familier, parce qu'on n'en avait pas d'autre. Thymaridas ouvrit une voie nouvelle, et quand on étudie dans Aristote le symbolisme des lettres employées pour représenter des objets de la pensée, on doit se dire qu'il ne fallait alors qu'un pas aux Grecs pour arriver à l'algorithme de Viète. Ce pas, c'était aux Pythagoriciens, semble-t-il, qu'il incombait de le faire ; ils faillirent à leur rôle et usèrent leurs efforts dans des rêveries mystiques sans issue.

Si l'un d'eux était parvenu à composer un Traité d'Arithmétique, dont les propositions fussent rigoureusement démontrées sans recours à l'appareil géométrique, ce Traité serait sans aucun doute devenu classique et aurait fait oublier les Livres arithmétiques d'Euclide ; des Ouvrages comme ceux de Nicomaque et de Jamblique n'auraient pas eu le succès qu'ils ont eu, bien plus ils n'auraient sans doute pas été écrits ; enfin Diophante, au lieu de nous donner une compilation de problèmes, aurait peut-être pu s'élever jusqu'à l'exposition de méthodes plus ou moins générales, il aurait eu un modèle pour le guider.

Ce qui manque aux Mathématiques grecques, ce sont moins les méthodes (les grands géomètres en possédaient assez pour l'ordre des travaux qu'ils poursuivaient) que des formules propres à l'exposition des méthodes ([1]) ; l'éducation purement géométrique éloignait du cercle d'idées indispensable pour constituer ces formules, elles ne pouvaient être établies tout d'abord que sur le terrain de l'Arithmétique proprement dite ou sur celui de la logistique qui donna naissance à l'Algèbre. Malheureusement la logistique (solution des problèmes numériques) fut, toujours sous

---

([1]) L'incapacité d'exposer clairement une méthode générale sans recourir à des exemples particuliers, l'incapacité par suite de spéculer directement sur la méthode au lieu de spéculer sur les exemples, est ce qui distingue nettement les Mathématiques de l'antiquité et du moyen âge de celles des temps modernes. C'est aussi une des raisons qui peuvent expliquer le déclin rapide de la Science dans l'antiquité.

l'influence des doctrines pythagoriciennes, considérée comme une branche secondaire, rentrant à peine dans la Science, et ne produisit que des recueils d'exercices, utiles ou simplement curieux, qui disparurent devant celui de Diophante.

Ni les Hindous, ni les Arabes ne sont parvenus à combler la lacune qu'offrait l'enseignement mathématique des Grecs; il faut attendre jusqu'au XVIIe siècle.

Le rôle des Pythagoriciens dans l'histoire de la Science doit donc être jugé moins favorablement qu'il ne l'a souvent été; certes ils ont remué beaucoup d'idées, soulevé beaucoup de problèmes, ce qui est toujours utile, mais ils n'ont pas abouti à un résultat définitif, ils se sont détournés de la conquête à faire, si l'on fait abstraction de la théorie de la musique, qui restera l'immortel honneur de l'École. Certes Pythagore lui-même paraît avoir été un mathématicien des plus remarquables, on lui doit au moins d'avoir constitué un enseignement scientifique qui porta des fruits précieux; mais les grands progrès furent obtenus par des hommes en réalité étrangers à l'École ou qui s'en sont détachés après avoir reçu son enseignement, comme Eudoxe par exemple. La légende, admise par Jamblique, d'après laquelle les pythagoriciens seraient seuls restés possesseurs pendant longtemps des connaissances géométriques, est insoutenable. Si leur savoir excita la curiosité, c'est qu'à cette époque les Grecs en général étaient curieux de savoir (φιλομαθεῖς comme dit Platon), et cette curiosité ne s'explique que si elle avait déjà des moyens de se satisfaire dans une certaine mesure. Œnopide de Chios, son compatriote Hippocrate, Théodore de Cyrène, ne sont des pythagoriciens que pour Jamblique; Platon représente formellement son maître Théodore comme partageant, au point de vue philosophique, les doctrines de Protagoras, et il nous montre les sophistes, comme Hippias, enseignant les éléments des sciences en même temps que la rhétorique, parlant *de omni re scibili* et aussi du reste.

Les noms de nombreux mathématiciens, n'appartenant à aucune école définie, ont pu se perdre, mais le soin avec lequel Jamblique recueille toutes les traditions, fausses ou vraies, relatives au pythagorisme, ne permet pas de croire qu'il ait produit quelque savant dont le nom, perdu, aurait mérité d'être conservé; or de

tous les noms qui nous ont été laissés, deux seulement ont été portés par des hommes qui semblent avoir eu une réelle originalité; ce sont ceux d'Archytas et de Thymaridas, dont le dernier seul semble s'être sérieusement occupé de l'Arithmétique.

1re Part

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

БУГАЕВЪ (Н.-В.). — Нѣкоторыя приложенія теоріи эллиптическихъ Функцій къ теоріи Функцій прерывныхъ. [Bougaieff, *Quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques à la théorie des fonctions discontinues*. Moscou, 1884, 260 p. (extrait du Математическій Сборникъ, t. XI et XII)].

Ce travail se compose de quatre Mémoires.

Premier Mémoire. — *Lois numériques particulières qui découlent de la considération des constantes elliptiques* (112 p.).

L'auteur préfère quelquefois désigner la théorie des nombres en la nommant la *théorie des fonctions discontinues*. Sous ce point de vue, l'Analyse indéterminée n'est autre chose que l'Algèbre des fonctions discontinues.

Pour faciliter l'application même de la théorie des fonctions elliptiques à la théorie des fonctions discontinues, l'auteur expose : 1° les propriétés de quelques fonctions auxiliaires, 2° les propriétés de quelques séries auxiliaires, 3° quelques propriétés générales des intégrales numériques suivant les diviseurs.

1. *Quelques propriétés des fonctions auxiliaires.* — On observe dans la théorie des fonctions discontinues la grande signification des fonctions qui deviennent nulles pour quelques nombres particuliers. Parmi ces fonctions, il faut considérer une fonction $p(n)$ qui est égale à l'unité pour les nombres entiers de la forme pn et devient nulle pour tous les autres nombres entiers. Ainsi, par exemple, une fonction $5(n)$ satisfait aux égalités

$$5(5n)=1,\quad 5(5n+1)=0,\quad 5(5n+2)=0,\quad 5(5n+3)=0,\quad 5(5n+4)=0.$$

L'auteur désigne la fonction égale à l'unité pour tous les nombres de la forme $pn+\mu$ et nulle pour tous les autres nombres par la formule $p_\mu(n)$, en posant en bas le nombre μ plus petit que p.

Ainsi la fonction $4_3(u)$ satisfait aux égalités

$$4_3(4n) = 0, \quad 4_3(4n+1) = 0, \quad 4_3(4n+2) = 0, \quad 4_3(4n+3) = 1.$$

Deux fonctions $p(n)$ et $p_\mu(n)$ sont liées par l'équation

$$p_\mu(n-\mu) = p(n). \tag{1}$$

L'auteur donne l'expression analytique de la fonction $p(n)$ en la faisant dépendre de la quantité α, racine primitive de l'équation

$$\alpha^p = 1,$$

où p est un nombre premier.

La fonction $P(u)$, où $P = a^\alpha b^\beta c^\gamma$, dépend des racines primitives α, β, γ des équations

$$\alpha^a = 1, \quad \beta^b = 1, \quad \gamma^c = 1.$$

Comme la fonction $p(n)$ peut être exprimée par l'équation

$$p(n) = \mathrm{E}\frac{n}{p} - \mathrm{E}\frac{n-1}{p}, \tag{2}$$

alors la formule analytique de la fonction $p(n)$ exprime en même temps la fonction $\mathrm{E}\frac{n}{p} - \mathrm{E}\frac{n-1}{p}$.

Dans la théorie des nombres les formules particulières suivantes ont une grande signification :

$$\left\{\begin{aligned} &2\ (n) = \tfrac{1}{2}[1 + (-1)^n], \\ &2_1(n) = \tfrac{1}{2}[1 - (-1)^n], \\ &4\ (n) = 2(n)2\left(\frac{n}{2}\right) = \tfrac{1}{4}[1 + (-1)^n]\left[1 + (-1)^{\frac{n}{2}}\right], \\ &4_1(n) = \tfrac{1}{4}[1 + (-1)^{n-1}]\left[1 + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\right], \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right. \tag{3}$$

2. *Propriétés des quelques séries auxiliaires.* — La série fondamentale, qu'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques, est la série

$$\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\infty} \Theta(u)\frac{q^u}{1-q^u} = \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\infty} q^u \sum_u \Theta(d). \tag{4}$$

Dans cette formule intégrale numérique,

$$\sum_u \Theta(d)$$

est l'expression où le signe sommatoire s'étend à tous les diviseurs du nombre entier u.

Une autre série importante qui lie deux fonctions arbitraires $\xi(u)$ et $\Theta(u)$ est exprimée par les équations

$$(5) \qquad F(q) = \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\infty} \Theta(u) q^u,$$

$$(6) \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\infty} \xi(u) F(q^u) = \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\infty} q^u \sum_u \xi(\delta)\Theta(d),$$

où δ et d sont deux diviseurs conjugués du nombre entier u, satisfaisant à l'équation

$$\delta d = u.$$

Les formules (4), (5), (6), avec les fonctions $p_\mu(u)$, donnent le moyen de trouver le développement de toutes les séries, qui se rencontrent dans la théorie des applications des fonctions elliptiques à la théorie des nombres.

Voici le développement de quelques séries :

$$\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\infty} \xi(u) \frac{q^u}{1-q^{2u}} = \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\infty} q^u \sum_u 2_1(\delta)\xi(d),$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\infty} \xi(u) \frac{q^u}{1-q^{8u}} = \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\infty} q^u \sum_u 8_1(\delta)\xi(d),$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\infty} \xi(u) \frac{q^u}{1+q^{2u}} = \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\infty} q^u \sum_u [4_1(\delta) - 4_3(\delta)]\xi(d),$$

$$\mathrm{S}\, \xi(u) \frac{q^u}{(1-q^u)^2} = \mathrm{S}\, q^u \sum_u \delta\xi(d),$$

$$\mathrm{S}\, \xi(u) \frac{q^u}{(1+q^u)^2} = \mathrm{S}\, q^u \sum_u (-1)^{\delta-1}\delta\xi(d),$$

$$\mathrm{S}\, \xi(u) \frac{q^{3u}}{1-q^{4u}} = \frac{1}{2}\mathrm{S}\, q^u \sum_u [2_1(\delta) - 4_1(\delta) + 4_3(\delta)]\xi(d),$$

. . . . . .

3. *Quelques propriétés générales des intégrales numériques suivant les diviseurs.* — Pour que les théorèmes de la théorie des nombres reçoivent une expression plus simple, l'auteur déduit quelques théorèmes généraux de la théorie des intégrales numériques suivant les diviseurs.

En posant pour chaque nombre entier

$$(a) \qquad \begin{cases} n = a^\alpha b^\beta c^\gamma, \\ n_a = b^\beta c^\gamma, \end{cases}$$

où

$$n_a = \frac{n}{a^\alpha},$$

$$n = a^\alpha n_a,$$

nous avons les théorèmes généraux suivants :

$$(7) \qquad \sum_n \Theta(d) - \sum_{\frac{n}{a}} \Theta(d) = \sum_{n_a} \Theta(a^\alpha d),$$

$$(8) \qquad \sum_n \Theta(d) - \sum_{\frac{n}{a}} \Theta(ad) = \sum_{n_a} \Theta(d),$$

$$(9) \qquad \sum_n \Theta(d) = \sum_{\frac{n}{a}} \Theta(d) + \sum_{\frac{n}{a}} \Theta(ad) - \sum_{\frac{n}{a^2}} \Theta(ad).$$

Ces lois, pour les fonctions arbitraires qui doivent satisfaire à l'équation

$$\Theta(mn) = \Theta(m)\Theta(n),$$

prennent la forme

$$(10) \qquad \sum_n \Theta(d) - \sum_{\frac{n}{a}} \Theta(d) = \Theta(a^\alpha) \sum_{n_a} \Theta(d),$$

$$(11) \qquad \sum_n \Theta(d) - \Theta(a) \sum_{\frac{n}{a}} \Theta(d) = \sum_{n_a} \Theta(d),$$

$$(12) \qquad \sum_n \Theta(d) - [1 + \Theta(a)] \sum_{\frac{n}{a}} \Theta(d) + \Theta(a) \sum_{\frac{n}{a^2}} \Theta(d).$$

Ces formules, avec la formule

$$(13)\qquad \sum_{n}\Theta(d)=\sum_{n}(-1)^{\frac{d}{2}-1}\Theta(d)+2\sum_{\frac{n}{2}}\Theta(d),$$

donnent une quantité infinie de résultats particuliers, qui simplifient l'expression même des différentes lois numériques.

4. Ces théorèmes préliminaires déduits, l'exposition ultérieure ne présente aucune difficulté. Elle n'est autre chose que l'expression des formules d'analyse au moyen des formules de la théorie des nombres.

Dans les formules ultérieures, nous admettons que toutes les fonctions numériques $\xi(x)$ sont nulles pour les quantités fractionnaires de x.

En désignant, pour n entier, $\int(n)=\xi_1(n)$ la somme de tous les diviseurs; $\xi_2(n)$, $\xi_3(n)$ la somme des carrés, cubes, etc., de tous les diviseurs; $\mathcal{E}_n$ l'excès des diviseurs de la forme $4\mu+1$ sur les diviseurs de la forme $4\mu+3$ du nombre n, nous avons les lois suivantes :

$$(14)\qquad \begin{cases} \int(n)-\int\left(\frac{n}{2}\right)+2\mathop{\mathrm{S}}\limits_{u=1}(-1)^u\left[\int(n-u^2)-\int\frac{1}{2}(n-u^2)\right] \\ \qquad =(-1)^{n+1}\left(\mathrm{E}\sqrt{n}-\mathrm{E}\sqrt{n-1}\right)n, \end{cases}$$

$$\int(n)-3\int(n-1)+5\int(n-3)-\ldots+(-1)^{\mu}\int\left[n-\frac{\mu(\mu+1)}{2}\right]+\ldots=0,$$

où

$$(15)\qquad (-1)^{\nu+1}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{1.2.3};$$

dans les cas où l'entier n n'a pas ou a la forme $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$,

$$(16)\qquad \begin{cases} \int(n)-4\int\left(\frac{n}{2}\right) \\ \quad +\mathop{\mathrm{S}}\limits_{u=1}\left\{\int\left[n-\frac{u(u+1)}{2}\right]-4\int\left(\frac{1}{2}\left[n-\frac{u(u+1)}{2}\right]\right)\right\}=0 \text{ ou } n; \end{cases}$$

dans les cas où n n'a pas ou a la forme $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\int(n) - 5\int\left(\frac{n}{2}\right) + 4\int\left(\frac{n}{4}\right) \\ &\quad + 2\sum_{u=1}\left\{\int(n-u^2) - 5\int\left[\tfrac{1}{2}(n-u^2)\right] + 4\int\left[\tfrac{1}{4}(n-u^2)\right]\right\} \\ &= (\mathrm{E}\sqrt{n} - \mathrm{E}\sqrt{n-1})n \end{aligned}\right.$$

ou, en posant

$$\gamma_n = \int(n) - 5\int\left(\frac{n}{2}\right) + 4\int\left(\frac{n}{4}\right),$$

nous avons

$$\gamma_n + 2\sum\gamma_{n-u^2} = (\mathrm{E}\sqrt{n} - \mathrm{E}\sqrt{n-1})n.$$

E (x) représente le plus grand nombre entier non supérieur à x.

Exemple. — Pour $n = 16$, nous avons

$$\gamma_{16} + 2(\gamma_{15} + \gamma_{12} + \gamma_7) = (\mathrm{E}\sqrt{16} - \mathrm{E}\sqrt{15})16 = 16,$$

$$\gamma_{16} = \int(16) - 5\int(8) + 4\int(4) = -16,$$

$$\gamma_{15} = \int(15) = 24,$$

$$\gamma_{12} = \int(12) - 5\int(6) + 4\int(3) = -16,$$

$$\gamma_7 = \int(7) = 8:$$

donc

$$-16 + 2(24 - 16 + 8) = -16 + 2.16 = 16.$$

5. En considérant les différentes questions de la théorie de la partition des nombres, l'auteur démontre entre autres le théorème connu de Liouville, proposé par lui sans démonstration (Liouville, *Journal de Mathématiques*, p. 288; 1860),

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{E}\sqrt{n} + \mathrm{E}\sqrt{n-1} + \mathrm{E}\sqrt{n-2^2} + \mathrm{E}\sqrt{n-3^2} + \ldots \\ &\quad = \mathrm{E}\frac{n}{1} - \mathrm{E}\frac{n}{3} + \mathrm{E}\frac{n}{5} + \mathrm{E}\frac{n}{7} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

L'auteur donne à l'expression même des théorèmes connus quelquefois une forme plus simple et nouvelle.

Voici quelques-uns de ces théorèmes :

Théorème I. — *Le nombre* $N_6(n)$ *des solutions de l'équation*

$$n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2,$$

en y comptant les solutions nulles, positives et négatives, est exprimé par la formule

$$(19) \qquad N_6(n) = \left[16(-1)^{\frac{n_2-1}{2}} 2_n^2 - 4\right] \sum_{n_2} (-1)^{\frac{d-1}{2}} d^2,$$

où, pour $n = 2^\alpha b^\beta c^\gamma = 2^\alpha n_2 = 2_n n_2$,

$$n_2 = a^\alpha b^\beta, \quad 2_n = 2^\alpha.$$

Exemple. — Pour $n = 4$,

$$n_2 = 4_2 = 1, \quad 2_n = 2_4 = 2^2,$$

$$N_6(4) = \left[16(-1)^{\frac{1-1}{2}} 4^2 - 4\right] \sum_{1} (-1)^{\frac{d-1}{2}} d^2 = 16.16 - 4 = 252.$$

En effet le nombre des solutions de la forme

$$(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0 + 0 = 4$$

est égal à

$$2^4 \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.1.2} = 15.16 = 240;$$

le nombre des solutions de la forme

$$(\pm 2)^2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 4$$

est égal à 12.

Donc

$$N_6(4) = 240 + 12 = 252.$$

Théorème II. — *Le nombre des solutions positives de l'équation*

$$8n = (2x_1 + 1)^2 + (2x_2 + 1)^2 + \ldots + (2x_8 + 1)^2$$

est égal à

$$(20) \qquad \xi_3(n) - \xi_3\left(\frac{n}{2}\right).$$

Théorème III. — *Le nombre des solutions de l'équation*

$$n = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \ldots + \varkappa_8^2,$$

en y comptant les solutions nulles, positives et négatives, est égal à

$$(21) \qquad N_8(n) = 16\left[\xi_3(n) - 2\xi_3\left(\frac{n}{2}\right) + 16\xi_3\left(\frac{n}{4}\right)\right].$$

Exemple. — Pour $n = 10$, nous avons

$$N_8(10) = 16[\xi_3(10) - 2\xi_3(5)] = 16(1134 - 2.126).$$

6. Les différentes relations mutuelles des constantes elliptiques donnent aussi les différentes lois numériques.

Ainsi les constantes

$$\sqrt{\frac{kK}{2\pi}} = \mathop{\mathrm{S}}_1^\infty q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2},$$

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2\mathop{\mathrm{S}}_1^\infty q^{n^2},$$

$$\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = 1 + 2\mathop{\mathrm{S}}_1^\infty (-1)^n q^{n^2}$$

donnent la loi numérique

$$(22) \qquad \int(2n-1) = \mathcal{E}_{2n-1} + 4\mathrm{S}\,\mathcal{E}_{n-u}\mathcal{E}_{2u-1}.$$

Les constantes

$$\frac{4k'^2K^2}{\pi^2} = 1 + 8\mathop{\mathrm{S}}_1^\infty (-1)^n \frac{q^n}{(1+q^{2n})^2},$$

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + 2\mathop{\mathrm{S}}_1^\infty q^{n^2} = 1 + 4\mathop{\mathrm{S}}_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}},$$

$$\frac{2k'K}{\pi} = 1 + 2\mathop{\mathrm{S}}_1^\infty (-1)^n q^{n^2} = 1 + 4\mathop{\mathrm{S}}_1^\infty (-1)^n \frac{q^n}{1+q^{2n}}$$

donnent la loi

$$(23)\quad -\int(n)+6\int\left(\frac{n}{2}\right)-8\int\left(\frac{n}{4}\right)=\tfrac{1}{2}[1+(-1)^n]\mathcal{E}_{2n}+2\mathop{\mathrm{S}}(-1)^u\mathcal{E}_u\mathcal{E}_{2n-u}.$$

De même, on peut déduire la loi

$$(24)\quad 2(-1)^n\mathrm{P}_n+\mathcal{E}_n+8(-1)^n\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{n-1}(-1)^u\mathcal{E}_u\mathrm{P}_{n-u}=-\sum_{n_2}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2,$$

où

$$\mathrm{P}_n=\int(n)-4\int\left(\frac{n}{2}\right).$$

On peut déduire par cette méthode une quantité infinie de lois numériques.

7. A la fin du premier Mémoire l'auteur considère les différentes méthodes de déduire les lois numériques particulières et différents types de ces lois.

Les lois (14), (15), (16), (19) appartiennent au premier type.

La loi

$$(25)\qquad n\mathrm{P}_n+2\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{\mathrm{E}\sqrt{n}}(n-5u^2)\mathrm{P}_{n-u^2}=n(\mathrm{E}\sqrt{n}-\mathrm{E}\sqrt{n-1})$$

appartient au second type.

Comme exemples des lois du troisième type, peuvent être considérées les lois

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}&\int(n)-5\int\left(\frac{n}{2}\right)+4\int\left(\frac{n}{4}\right)\\&\quad+4\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}\mathcal{E}_{n-u}\left[\int(u)-5\int\left(\frac{u}{2}\right)+4\int\left(\frac{u}{4}\right)\right]=n\mathcal{E}_n,\end{aligned}\right.$$

$$(26')\qquad \mathrm{C}_n+8\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=n-1}\mathrm{P}_u\mathrm{C}_{n-u}=n\mathrm{P}_n,$$

où

$$\mathrm{P}_n=\int(n)-4\int\left(\frac{n}{4}\right),\quad \mathrm{C}_n=\int(n)-5\int\left(\frac{n}{2}\right)+4\int\left(\frac{n}{4}\right);$$

et la loi

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &8\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{n-1}\left[\xi_3(u)-\xi_3\left(\frac{u}{2}\right)\right]\left\{\int(n-u)-4\int\left[\tfrac{1}{2}(n-u)\right]\right\}\\ &\quad=(n-1)\left[\xi_3(n)-\xi_3\left(\frac{n}{2}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Dans ces lois, un membre dépend de la somme des diviseurs et tous les autres sont les produits de deux fonctions numériques.

Comme exemple de quatrième type peut servir la loi

$$(28)\quad \xi_3(n)-\xi_3\left(\frac{n}{2}\right)=8\left[\mathrm{P}_n\int(1)+\mathrm{P}_{n-2}\int(3)+\mathrm{P}_{n-3}\int(5)+\ldots\right].$$

Deuxième Mémoire. — *Lois numériques générales qui dépendent de la considération des fonctions de Jacobi* (42 p.).

L'auteur donne le nom de *lois générales* aux lois numériques qui dépendent des constantes ou des fonctions arbitraires.

Chaque loi numérique générale donne une quantité infinie de lois numériques particulières. L'auteur déduit de la considération immédiate des fonctions de Jacobi $\mathrm{H}(x)$, $\Theta(x)$, $\mathrm{H}_1(x)$, $\Theta_1(x)$ les quatre lois générales suivantes :

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_n 2_1(\delta)\sin(d\varkappa)+2\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{\mathrm{E}\sqrt{n}}(-1)^u\cos(u\varkappa)\sum_{n-u^2}2_1(\delta)\sin d\varkappa\\ &\quad=(-1)^{n+1}\left(\mathrm{E}\sqrt{n}-\mathrm{E}\sqrt{n-1}\right)\sqrt{n}\sin(\varkappa\sqrt{n}),\end{aligned}\right.$$

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin\varkappa\sum_n\sin 2d\varkappa-\sin 3\varkappa\sum_{n-1}\sin 2d\varkappa+\sin 5\varkappa\sum_{n-3}\sin 2d\varkappa+\ldots\\ &\qquad\qquad+(-1)^{\mu}\sin(2\mu+1)\varkappa\sum_{n-\frac{\mu(\mu+1)}{2}}\sin 2d\varkappa+\ldots=0\\ &\text{ou}\\ &\frac{(-1)^{\nu}}{4}\left[(2\nu+1)\cos(2\nu+1)\varkappa-\frac{\cos\varkappa}{\sin\varkappa}\sin(2\nu+1)\varkappa\right];\end{aligned}\right.$$

dans les cas où l'entier n n'est pas ou est un nombre entier de la

forme $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$,

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_n 2(d)d + 2\sum_n 2_1(\delta)\delta\cos dx \\ &\quad + 2\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}(-1)^u\cos ux\left[\sum_{n-u^2}2(d)d + \sum_{n-u^2}2_1(\delta)\delta\cos dx\right] \\ &= 2(-1)^{n+1}(\mathrm{E}\sqrt{n}-\mathrm{E}\sqrt{n-1})\,n\cos x\sqrt{n}. \end{aligned}\right.$$

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathop{\mathrm{S}}_{u=0}(-1)^u\mathrm{C}_{n-\frac{u(u+1)}{2}}\sin(2u+1)x = 0 \\ &\text{ou} \\ &(-1)^{\nu+1}\frac{\nu(\nu+1)}{2}\sin(2\nu+1)x \\ &\text{ou} \\ &\mathrm{C}_n = \int(n) + 2\sum_n\delta\cos 2dx. \end{aligned}\right.$$

On peut déduire de ces lois générales une quantité infinie de lois numériques particulières : 1° en donnant à la variable x différentes significations particulières, 2° en comparant les coefficients des différents degrés de x, 3° en appliquant toutes ces méthodes ensemble.

Pour expliquer comment ces lois générales donnent des lois numériques particulières, considérons la formule (29).

En la divisant par x et en faisant $x = 0$, nous déduisons la loi

$$\sum_n 2_1(\delta)d + 2\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{\mathrm{E}\sqrt{n}}(-1)^u\sum_{n-u^2}2_1(\delta)d = (-1)^{n+1}(\mathrm{E}\sqrt{n}-\mathrm{E}\sqrt{n-1})\,n.$$

Comme

$$2_1(\delta) = \tfrac{1}{2}[1+(-1)^{\delta-1}],$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_n 2_1(\delta)d &= \frac{1}{2}\sum_n(d) + \frac{1}{2}\sum_n(-1)^{\delta+1}d \\ &= \frac{1}{2}\int(n) + \frac{1}{2}\left[\int(n) - 2\int\left(\frac{n}{2}\right)\right] = \int(n) - \int\left(\frac{n}{2}\right).\end{aligned}$$

Donc la loi particulière prend la forme de la loi (14).

En comparant les coefficients de x^3 nous déduisons la loi

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\xi_3(n) - \xi_3\left(\frac{n}{2}\right) + 2\,\mathbf{S}(-1)^u\left\{\xi_3(n-u^2) - \xi_3\left[\tfrac{1}{2}(n-u^2)\right]\right\} \\ &\quad + 6\,\mathbf{S}_{u=1}(-1)^u u^2\left\{\int(n-u^2) - \int\left[\tfrac{1}{2}(n-u^2)\right]\right\} \\ &= (-1)^{n+1}\left(\mathrm{E}\sqrt{n} - \mathrm{E}\sqrt{n-1}\right)n^2. \end{aligned}\right.$$

Troisième Mémoire. — *Lois générales numériques qui découlent de la considération de quelques fonctions elliptiques* (88 p.).

L'auteur exprime le développement trigonométrique de quelques fonctions elliptiques à la forme des séries infinies au moyen de la fonction $p_\mu(u)$.

Comme exemples de ces développements peuvent servir les séries

$$\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}\sin\mathrm{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = 4\,\mathbf{S}\,q^{\frac{u}{2}}\sum_u 2_1(\delta)2_1(d)\sin dx,$$

$$\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = 4\,\mathbf{S}\,q^{\frac{u}{2}}\sum_u [4_1(\delta) - 4_3(\delta)]2_1(d)\cos dx,$$

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\frac{1}{\sin\mathrm{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}} = \frac{1}{\sin x} + 4\,\mathbf{S}\,q^u\sum_u 2_1(\delta)\sin dx,$$

$$\left(\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}\frac{\sin 2\mathrm{K}x}{\pi}\right)^2 = 8\,\mathbf{S}\,q^u\sum_u 2_1(\delta)(1-\cos 2dx)d,$$

.....

A ces formules doivent être ajoutées les formules

$$\frac{4k\mathrm{K}^2}{\pi^2} = 4\,\mathbf{S}\,q^{\frac{u}{2}}\sum_u 2_1(\delta)2_1(d)d,$$

$$\frac{4k'^2\mathrm{K}^2}{\pi^2} = 1 + 8\,\mathbf{S}\,q^u\sum_u(-1)^{\delta-1}(-1)^d d,$$

.....

Chaque relation des fonctions elliptiques donne une loi numérique générale.

Ainsi la formule

$$\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}\sin\mathrm{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\,\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{1}{\sin\mathrm{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}} = \frac{4k\mathrm{K}^2}{\pi^2}$$

donne la relation

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=\infty} q^{\frac{1}{2}(2n-1)} \int (2n-1) \\
&\quad = \frac{1}{\sin \varkappa} \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\infty} q^{\frac{u}{2}} \sum_{u} 2_1(\delta) 2_1(d) \sin d\varkappa \\
&\qquad + 4 \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\infty} q^{\frac{u}{2}} \sum_{u} 2_1(\delta) 2_1(d) \sin d\varkappa \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\infty} q^{u} \sum_{u} 2_1(\delta) \sin d\varkappa,
\end{aligned}$$

qui donne la loi générale numérique

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\sum_{n} 2_1(\delta) 2_1(d) \sin d\varkappa \\
&\qquad + 4 \sin \varkappa \mathop{\mathrm{S}}_{u=1} \left[\sum_{n-2u} 2_1(\delta) 2_1(d) \sin d\varkappa \sum_{u} 2_1(d) \sin d\varkappa \right] \\
&\quad = 2_1(n) \int (n) \sin \varkappa.
\end{aligned} \right.$$

La relation

$$\left(\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}\right)^2 \sin^2 \mathrm{am} \frac{2\mathrm{K}\varkappa}{\pi} = \left(\frac{2k\mathrm{K}}{\pi} \sin \mathrm{am} \frac{2\mathrm{K}\varkappa}{\pi}\right)^2$$

donne la loi numérique générale

$$(35) \quad 2 \mathop{\mathrm{S}}_{u=1} \left[2_1(u) \sum_{2n-u} \sin d\varkappa \sum_{u} \sin d\varkappa \right] = \sum_{n} 2_1(\delta)(1 - \cos 2 d\varkappa) d.$$

En comparant les coefficients de $\varkappa^2$, nous avons la loi connue

$$(36) \quad \xi_3(n) - \xi_3\left(\frac{n}{2}\right) = \int (2n-1) \int (1) + \int (2n-3) \int (3) + \ldots.$$

L'auteur déduit 23 lois générales numériques.

On peut déduire une quantité infinie des lois numériques générales.

Comme chaque loi générale donne une quantité infinie de lois particulières, alors il est évident que la quantité des lois numériques particulières peut être exprimée par un nombre infini de second degré.

Quelques-unes de ces lois particulières sont dignes d'attention par leur simplicité élégante.

Voici quelques-unes de ces lois qui existent pour les nombres pairs p et les nombres i impairs :

$$(37)\qquad \int(i) = \mathcal{E}_i + 4\mathbf{S}\mathcal{E}_u\mathcal{E}_{i-2u},$$

$$(38)\qquad \left[1+(-1)^{\frac{i-1}{2}}\right]\int(i) = 8\mathbf{S}\mathcal{E}_u\mathcal{E}_{i-4u} + 2\mathcal{E}_i,$$

$$(39)\qquad \mathbf{S}\mathcal{E}_u\mathcal{E}_{i-2u} = \mathbf{S}\mathcal{E}_u\mathcal{E}_{i-4u} \qquad \text{(pour les nombres } i = 4\mu+1\text{)},$$

$$(40)\qquad \mathbf{S}\mathcal{E}_u\mathcal{E}_{i-u} = 2\mathbf{S}\mathcal{E}_u\mathcal{E}_{i-2u},$$

$$(41)\qquad \mathcal{E}_p - 2\mathbf{S}\mathcal{E}_u\mathcal{E}_{p-u} + 4\mathbf{S}\mathcal{E}_u\mathcal{E}_{p-2u} = -\int\left(\frac{p}{2}\right) + 6\int\left(\frac{p}{4}\right) - 8\int\left(\frac{p}{8}\right),$$

$$(42)\qquad \mathbf{S}\mathcal{E}_u\mathcal{E}_{i-2u} = 2\mathbf{S}\mathcal{E}_{2u-1}\mathcal{E}_{\frac{i+1}{2}-u},$$

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned}(-1)^{\frac{i-1}{2}}\int(i) &= (-1)^{\frac{i-1}{2}}\mathcal{E}_i - 4\mathbf{S}(-1)^{\frac{i-1-2u}{2}}\mathcal{E}_u\mathcal{E}_{i-2u}\\ &\quad + 8\mathbf{S}(-1)^{\frac{i-1-4u}{2}}\mathcal{E}_u\mathcal{E}_{i-4u},\end{aligned}\right.$$

$$(44)\qquad \mathcal{E}_i + 8\mathbf{S}\mathcal{E}_{i-2u}\int(u) = \int(i) + 4\mathbf{S}\mathcal{E}_u\int(i-2u),$$

$$(45)\qquad \int(n) - 4\int\left(\frac{n}{4}\right) = \mathcal{E}_n + 2\mathbf{S}\mathcal{E}_u\mathcal{E}_{n-u},$$

$$(46)\qquad \int(i) = \mathbf{S}\mathcal{E}_{2u-1}\mathcal{E}_{2i-(2u-1)},$$

$$(47)\qquad \sum_i(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2 = \mathbf{S}(-1)^{u-1}\mathcal{E}_{(2i-2u-1)}\int(2u-1),$$

$$(48)\qquad \xi_3(i) = \int(i) + 24\mathbf{S}\int(u)\int(i-2u) - 48\mathbf{S}\int(u)\int(i-4u).$$

Dans toutes ces lois le variable u doit prendre tous les nombres entiers jusqu'à ce que la différence où entre u reste positive.

Exemple. — En posant dans la formule (48) $i = 7$, nous avons

$$\xi_3(7) = \int(7) + 24\left[\int(1)\int(5) + \int(2)\int(3) + \int(3)\int(1)\right] - 48\int(1)\int(3)$$

ou

$$1 + 7^3 = 344 = 8 + 24.22 - 48.4.$$

Quatrième Mémoire. — *Lois générales numériques qui dépendent des fonctions arbitraires* (18 p.).

Dans ce Mémoire l'auteur démontre que chaque loi numérique générale, qui dépend de constantes arbitraires, peut être transformée en une loi générale qui dépend de la fonction arbitraire.

En indiquant les méthodes de cette transformation, l'auteur fait leur application à quelques-unes de ces lois.

Ainsi la loi (34) donne la loi

$$(49)\quad \sum\left\{\sum\sum[F(d'-d'')-F(d'+d'')]\right\}=\sum_n 2_1(\delta)[F(0)-(2d)]d,$$

où F est une fonction paire arbitraire, δ et d satisfont à l'équation

$$\delta d = n,$$

$\delta', d', \delta'', d''$ à l'équation

$$\delta' d' + \delta'' d'' = 2n.$$

Cette formule a été proposée par Liouville sans démonstration, (Liouville, *Journal des Mathématiques*, 2e série, t. III, p. 144, form. A, 1858).

Chez nous elle prend une forme plus générale, car chez nous elle est admise pour tous les nombres n pairs et impairs.

Un de mes anciens disciples, professeur de l'Université de Varsovie, M. Baskakoff, enlevé trop tôt à la Science, a démontré entre autres cette formule de Liouville par des méthodes tout à fait arithmétiques.

Comme il existe une quantité infinie de lois qui dépendent des constantes arbitraires, alors on peut trouver une quantité infinie de lois qui dépendent des fonctions arbitraires, tout à fait analogues à celles trouvées par Liouville.

L'auteur donne le moyen de trouver ces lois par les méthodes de la théorie des fonctions elliptiques.

Les difficultés dans les recherches des différentes lois numériques dépendaient de ce qu'on n'avait pas introduit l'algorithme pour les fonctions $p_\mu(u)$ et qu'on n'avait pas connu les différents théorèmes de la théorie des intégrales numériques suivant les diviseurs.

MÉLANGES.

LE VRAI PROBLÈME DE L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES ANCIENNES;

PAR M. PAUL TANNERY.

1. Écartons de l'histoire des Mathématiques la partie proprement bibliographique, je veux dire la constatation matérielle des faits : telle phrase se trouve telle page, soit de telle édition de tel ouvrage, soit de tel manuscrit coté sous tel numéro dans telle bibliothèque; écartons encore ce qui peut, comme dans l'*Aperçu historique* de Michel Chasles, former un des principaux attraits d'un livre, mais appartient en fait à la Science elle-même, bien loin de constituer une partie intégrante de son histoire; j'entends les développements donnés à telle méthode, les relations établies entre elles et d'autres plus récentes, enfin les démonstrations de théorèmes ou solutions de problèmes, soit conçues dans l'esprit des procédés d'autrefois, soit seulement suggérées par leur étude.

Ce départ fait, que reste-t-il en réalité? Un tissu de conjectures, qui sont d'ailleurs à tous les degrés de probabilité, depuis celui qui vaut presque la certitude jusqu'à celui qui diffère à peine du doute, pour ne pas parler des hypothèses encore moins favorisées; et encore ce tissu ressemble assez à la toile de Pénélope, car, s'il est vrai que l'on peut regarder comme allant toujours en augmentant la probabilité moyenne des résultats obtenus par la critique, il n'en est nullement de même pour la probabilité spéciale à chaque assertion particulière; cette probabilité est sujette à de continuelles variations, et il n'est guère de point pour lequel l'opinion aujourd'hui dominante se trouve garantie contre une exclusion soit momentanée, soit définitive, à la suite ou bien de la mise en lumière de quelque fait nouveau, ou bien de l'apparition de quelque nouvelle hypothèse.

Coordonner la totalité des faits matériels, établir la filiation logique de ceux qui concordent entre eux, expliquer comment tels autres se trouvent en désaccord et déterminer, d'après cette explication, quels sont ceux qui ne devront pas être utilisés comme matériaux par l'historien futur, telle est la tâche, toujours ina-

chevée, à laquelle travaille le critique. Et il ne peut guère se faire d'illusions sur le sort réservé à son œuvre; les faits dont il aura signalé l'importance, c'est aux sources mêmes, non dans ses écrits, que ses successeurs iront les rechercher pour les soumettre à un nouvel examen; les erreurs qu'il aura dissipées pourront ne plus jamais revenir embarrasser l'histoire; mais combien ce résultat purement négatif était au-dessous de ses aspirations! Les thèses positives, auxquelles il attachait le plus de poids et consacrait surtout ses veilles, que deviendront-elles, bientôt après sa mort, sinon avant? Qu'il jette un regard sur les exemples que lui offre un passé récent; quelle confiance peut-il garder dans l'avenir, s'il réfléchit à ce que pèsent en réalité aujourd'hui, dans la balance des opinions, les noms encore les plus justement honorés, ainsi celui de Letronne, pour ne pas en citer d'autres?

2. Il faut donc, dans la critique d'érudition, borner son ambition au présent et, sans trop préjuger l'avenir, s'efforcer d'assurer à ses opinions le plus possible de *probabilité actuelle*. Or à quoi se mesure cette probabilité? En fait, c'est à la proportion plus ou moins considérable d'adhésions rencontrées dans le cercle, d'ailleurs fort restreint, des érudits vivants s'occupant de l'ordre de questions dont il s'agit. A peine est-il besoin d'ajouter que, pour une évaluation effective, il conviendrait d'introduire des coefficients personnels; un savant comme Moritz Cantor, comme Friedrich Hultsch, comme J.-L. Heiberg, en vaut plusieurs autres, mais il ne réclame, ni ne peut réclamer l'infaillibilité. Quant à ceux qui sont disparus de la scène et que parfois on invoque encore, ils ne comptent plus guère; ils n'ont pas su ce qui a été appris depuis, ils n'ont pu peser les nouveaux arguments, enfin et surtout, ils n'étaient pas dans le courant d'idées actuel.

Pourquoi insisté-je sur ce dernier point? Je vais chercher à l'expliquer, d'autant qu'il s'agit d'un élément considérable dans l'appréciation des opinions.

Voici déjà la dixième année depuis que j'ai commencé à publier, sur l'histoire des Sciences, quelques-unes de mes conjectures personnelles; à partir du moment où mes humbles essais ont attiré quelque attention, il est une question que j'ai souvent eu à me poser; pourquoi telle hypothèse, que j'émettais presque sans

preuves, souvent à titre de simple possibilité, rencontrait-elle un assentiment général? Comment telle autre au contraire, que je m'étonnais d'être le premier à soutenir, tant elle me semblait naturelle, tant elle ressortait invinciblement pour moi de l'ensemble des faits, comment trouvait-elle des adversaires? Étudiais-je des travaux étrangers, je voyais surgir devant moi le même problème; tel point qui, à mes yeux, ne faisait pas l'ombre d'un doute, telle question qui me semblait devoir se régler en quelques mots, devenait l'objet de discussions approfondies, de polémiques sérieuses et prolongées.

J'ai cru m'expliquer tout cela, au moins dans une certaine mesure, en réfléchissant sur les motifs qui me déterminaient moi-même à adopter ou à rejeter telle ou telle conjecture nouvelle. Certainement, en présence d'une opinion qui n'est pas encore la sienne, le critique cherchera à être aussi impartial que possible; il pèsera le pour et le contre d'après les données objectives de la question, il cherchera à éliminer, autant que faire se peut, tout motif personnel de décision. Mais une pareille élimination est impossible à faire complètement; qu'on parvienne à la réaliser sans exception aucune, on ne sera plus soi-même.

Avant de se hasarder à rien produire, chaque érudit a dû accomplir pour lui-même, au moins à titre provisoire, la coordination logique de l'ensemble des faits qu'il connaît; il a dû jeter ainsi les fondements nécessaires de l'œuvre qu'il rêve. A la vérité, cette coordination, il la remanie sans cesse; mais telle qu'elle est à un moment donné, elle n'en jouera pas moins, qu'il en ait d'ailleurs plus ou moins conscience, le rôle d'un calibre ou d'un gabarit d'essai. Une thèse nouvelle s'y adapte-t-elle d'elle-même, elle aura toute chance d'être acceptée d'emblée; qu'au contraire elle ne se prête pas au cadre préétabli, elle sera l'objet d'une critique plus attentive, de réserves plus scrupuleuses; et cela, indépendamment de la valeur propre des arguments qui l'appuient.

Ce que je viens de dire pour un érudit en particulier peut s'appliquer à l'ensemble; nul ne peut connaître la totalité des faits à coordonner; les éléments employés ne sont donc pas exactement les mêmes pour chacun, leur connexion variera également suivant les tournures d'esprit particulières. Néanmoins, à un moment donné, il y a un ensemble d'idées commun à tous et par suite pré-

dominant; la chance de succès d'une conjecture nouvelle diffère donc selon qu'elle est plus ou moins en harmonie avec cet ensemble commun.

3. Je n'ai nullement la prétention d'exposer quel est aujourd'hui le courant d'idées prépondérant; mais on pourrait croire *a priori* qu'il n'est susceptible que de lentes modifications; je voudrais, par une rapide esquisse des traits les plus importants, du moins à mes yeux, montrer qu'il est au contraire sujet à de brusques variations, soit par suite du travail interne accompli chez chaque érudit, soit en raison du renouvellement continu des savants qui attirent le plus l'attention par leurs travaux.

Il y a une douzaine d'années, la conception générale de l'histoire des Mathématiques, telle qu'elle se dégage, par exemple, de l'œuvre de Hankel, présentait un caractère qui, jusqu'à un certain point, était marqué au sceau des doctrines de l'*évolution,* déjà en grande faveur dans les milieux philosophique et scientifique. Les éléments de la Science ont été élaborés, dans une mesure sans doute mal connue, mais certainement considérable, chez les peuples de l'antiquité dont la civilisation a précédé celle de la Grèce. Depuis cette obscure origine, malgré les apparences contraires, le progrès a été incessant; d'abord les Grecs, puis les Hindous, enfin les Arabes; chaque peuple a développé suivant son génie propre, et en donnant tout ce qu'il pouvait donner des branches spéciales de la Science; l'héritage sacré, fidèlement transmis et successivement accru, arrive aux nations de l'Occident moderne; la diversité de leurs races, l'heureuse rivalité qu'elles déploient, la rapide diffusion chez toutes des découvertes dues à chacune, semblent désormais assurer que le progrès indéfini de l'avenir n'exigera pas, comme dans le passé, de partielles et successives décadences.

Ainsi, autrefois, aux Grecs la Géométrie, aux Hindous l'Arithmétique et l'Algèbre; la spécialité des aptitudes est nettement tranchée, Diophante est à peine un Grec, il n'est pas possible qu'il n'ait point subi quelque influence orientale; si ses écrits ne nous avaient pas été conservés dans la langue qu'il parlait, personne ne pourrait soupçonner qu'ils soient un fruit du génie hellène.

Les deux tendances opposées se réunissent chez les Arabes; ceux-ci s'attachent spécialement à l'Astronomie, mais en même

temps ils commencent cette longue élaboration qui s'achèvera à la Renaissance avant d'aboutir à la révolution cartésienne, à l'ouverture de l'ère glorieuse des Mathématiques modernes. Depuis lors, aucun indice ne peut faire soupçonner qu'il nous manque, comme il manquait aux Grecs, quelque élément nécessaire pour la poursuite des travaux mathématiques, et la Science, à jamais rajeunie, pourra toujours nourrir *un long espoir et de vastes pensers.*

4. Rapprochons de cette esquisse sommaire quelques-uns des traits qui se dessinent dans la partie déjà publiée (1880) des *Vorlesungen* de M. Cantor. Ce Volume marque en effet d'une façon décisive la transition mesurée de l'ancien au nouveau courant d'idées qui, depuis, va s'accentuant de plus en plus. La conception évolutive s'efface; il n'en subsiste que quelques rares éléments dont l'indiscutable vérité s'adapte au changement du point de vue. La Science, en tant que l'on n'abuse point de son nom, éclôt chez les Grecs, presque brusquement, en tout cas intégralement; après avoir donné des fruits immortels, elle subit un irrécusable déclin, végète plus ou moins misérablement pendant de longs siècles, avant de retrouver sa vitalité primitive et de prendre, dans les temps modernes, un nouvel et définitif essor.

L'explication du papyrus mathématique égyptien par Eisenlohr, le déchiffrement de quelques tablettes chargées d'écritures cunéiformes, nous ont révélé des faits curieux et permis de préciser un peu mieux le point de départ des découvertes hellènes; mais, en thèse générale, ces documents ont singulièrement rabaissé l'opinion que l'on se faisait des connaissances mathématiques chez les Égyptiens et chez les Babyloniens, quoique d'ailleurs la plupart des orientalistes soient toujours disposés à s'exagérer ces connaissances, et que notamment l'histoire des origines de l'Astronomie soit encore loin d'être suffisamment éclaircie.

Quant aux mathématiciens hindous et arabes, leur étude plus approfondie n'a nullement confirmé les thèses de Hankel : certes, il reste encore bien apprendre à leur sujet, mais les découvertes, qui sont encore à faire dans leurs écrits, ne semblent plus devoir offrir un intérêt aussi puissant qu'on était porté à l'espérer. Plus on les examine, plus ils apparaissent comme dépendants des Grecs et, malgré quelques inventions heureuses et vraiment originales,

restés en moyenne bien inférieures à leurs devanciers sous tous les rapports. J'ajoute que l'on est encore certainement assez loin d'avoir restitué aux Grecs tout ce qui leur appartient légitimement dans les travaux attribués à leurs héritiers scientifiques. J'en veux donner une seule preuve :

De tous les instruments astronomiques des Arabes, étudiés par A. Sédillot et donnés par lui comme étant de leur invention, le plus intéressant est sans contredit l'*astrolabe planisphère* qui permettait de déterminer l'heure au moyen d'une observation de hauteur sur le Soleil ou sur une étoile, et d'une opération consistant à faire mouvoir l'un sur l'autre deux cercles figurant en projection stéréographique, l'un la sphère mobile, l'autre la sphère fixe. Cet instrument a d'ailleurs joué un rôle historique d'autant plus important que jusqu'à l'invention des horloges à pendule, les astronomes n'avaient aucun moyen exact pour déterminer l'heure pendant la nuit sans observations des étoiles, et que l'*astrolabe planisphère* leur permettait de résoudre le problème sans calcul. Or ce même astrolabe se trouve exactement décrit dans un Traité grec (1) composé par Jean le grammairien (Philopon) au commencement du VIe siècle après J.-C., et la nomenclature grecque des pièces de l'instrument a même été servilement adoptée par les Arabes. Notre auteur le donne d'ailleurs comme connu dès le temps de Ptolémée, et rien ne doit faire supposer qu'en fait l'invention ait été d'une date plus récente (2).

5. Ainsi il est permis de penser que la conception générale ac-

---

(1) Publié par Hase dans le *Rhemircher Museum* en 1839, mais n'en étant pas plus connu.

(2) Je soupçonne que le principe en remonte aux Babyloniens, dont on a des observations faites de nuit et marquées en *heures temporaires;* seulement, avant la découverte de la propriété des projections stéréographiques, l'instrument devait consister en une sphère mobile autour d'un axe incliné comme l'axe du monde, et en un hémisphère creux, fixe et concentrique, analogue à celui des cadrans solaires primitifs. Le nom d'*araignée* (ἀράχνη), donné, dans l'*astrolabe planisphère*, au cercle représentant la sphère mobile (parce qu'il était découpé à jour pour permettre d'obtenir les coïncidences avec l'autre cercle, lequel était massif), était également le nom donné, d'après Vitruve, au cadran *sphérique* d'Eudoxe. En tout cas, il ne me paraît pas douteux qu'un instrument analogue n'ait servi, avant l'invention de la Trigonométrie, à résoudre mécaniquement les problèmes de la sphérique.

tuelle de l'histoire des Mathématiques ira en s'affermissant de plus en plus, au moins pendant une ou deux générations; il est clair d'ailleurs qu'elle revient très sensiblement à celle qui dominait, d'après Montucla, il y a une cinquantaine d'années, vers le moment où Michel Chasles ouvrit une ère nouvelle pour l'étude de cette histoire.

Je ne fais point cette remarque pour en tirer une conclusion sceptique; bien au contraire, la double évolution que j'ai indiquée n'aurait certainement pu s'accomplir sans la coordination historique d'un nombre considérable de faits inconnus ou mal connus il y a un demi-siècle. Qui ne s'est pas mis au courant du mouvement critique depuis cette époque pourrait croire à quelque découverte capitale, à quelque travail hors ligne capable de changer d'un seul coup l'orientation des esprits; il n'en a rien été : le mouvement a résulté d'une quantités de faits souvent assez minimes, de discussions minutieuses, d'études de détail et de monographies fragmentaires.

La véritable conséquence à formuler, c'est que la plus humble contribution ne doit pas être négligée et qu'il ne faut pas se rebuter devant des détails parfois d'apparence fastidieuse; tout au plus convient-il d'ajouter une réserve pour ceux qui craignent les inconvénients du trop grand éparpillement des efforts ([1]); c'est que le travailleur fera bien de tenir compte des courants d'idées dominants, des questions à l'ordre du jour et de relever ainsi la minutie des détails qu'il étudie.

Mon objet maintenant va précisément être, après avoir indiqué les principaux problèmes qui s'imposent aujourd'hui dans l'histoire des Mathématiques anciennes, de montrer, par quelques exemples, comment leur solution dépend de questions qui paraissent, à première vue, d'une importance tout à fait secondaire. On ne s'étonnera pas si je choisis ces exemples parmi des conjectures que j'ai déjà proposées, et qui, à côté d'adhésions parfois peu espérées, ont rencontré de sérieux contradicteurs. En appelant de nouveau l'attention sur elles, j'ai le ferme espoir soit de

---

([1]) Le danger est réel dans le vaste domaine de la Philologie; dans le cercle malheureusement très restreint qui s'occupe de l'histoire des Mathématiques, il est loin d'être à redouter encore.

convaincre ceux qui les ont rejetées jusqu'à présent, soit de provoquer de leur part des recherches fécondes pour la vérité.

6. L'histoire n'a pas pour unique objet la satisfaction d'une vaine curiosité ; c'est l'avenir que finalement doit éclairer l'étude du passé. Or un mathématicien, vraiment digne de ce nom, peut-il ne pas se préoccuper parfois du sort futur réservé à la Science à laquelle il s'est consacré? Peut-on vraiment parler de progrès indéfini? Ne trouvera-t-on pas le tuf un jour, et ne faudra-t-il pas, comme disait Lagrange, abandonner la mine trop profonde? Certes la question n'est pas urgente; à la vitesse actuelle du progrès, il semble bien que l'on ait au moins deux siècles pour se demander ce qu'il conviendra de faire en pareil cas et comment conserver au mieux les trésors acquis, si l'espoir de les accroître est enfin interdit. Mais d'ici là, quelque bouleversement social ne peut-il entraîner la ruine de la Science? Elle n'a plus, dira-t-on, rien à craindre sérieusement des crises passagères, et toute société un peu stable protégera et encouragera forcément les savants, dont les services sont, de nos jours, non seulement utiles, mais même nécessaires. Cela est incontestable pour les chimistes, les physiciens, et, si l'on veut, aussi les astronomes ; la Mathématique pure sera donc garantie par son utilité dans les sciences de la nature. Mais, si la question d'utilité se pose, n'est-il pas à craindre que la protection et les encouragements ne se bornent à certaines branches, et ne délaissent les autres, précisément les plus élevées et les plus abstruses? Supposons maintenant que l'histoire démontre que, pour la Science, l'arrêt dans la marche en avant équivaut à un recul, qu'on ne peut vouloir se borner aux parties nécessaires pour les applications, sans arriver peu à peu à négliger de plus en plus la théorie et à n'en conserver finalement que des débris tout à fait insuffisants; que deviendrait dès lors la garantie de l'*utilité?* Si le danger que je signale ici n'est pas imaginaire, peut-on affirmer que, comme le premier, il est encore bien loin de nous, et qu'une génération prochaine n'aura pas à s'en préoccuper?

On peut voir, devant ces questions, quel intérêt majeur présente l'histoire des Mathématiques anciennes du moment où elles nous offrent l'exemple d'une décadence profonde après un brillant apogée; et l'on peut affirmer, de ce point de vue, que le *vrai pro-*

blème qui s'impose aujourd'hui dans cette histoire est de *préciser les circonstances et de déterminer les causes de la décadence passée, en vue de connaître les précautions à prendre pour éviter une décadence future.*

Je n'ai, bien entendu, aucunement la prétention de résoudre un problème aussi complexe; je voudrais seulement préciser dans une certaine mesure les diverses questions qu'il soulève, et donner quelques indications sur la marche à suivre pour en traiter au moins une.

7. Il est à peine besoin de réfuter sérieusement l'opinion qui attribuerait aux invasions barbares la décadence des sciences grecques. Quand, au VIIe siècle, les Arabes entrèrent dans Alexandrie, la glorieuse cité des Ptolémées pouvait avoir encore une école, mais depuis trois cents ans au moins cette école était incapable de produire autre chose que de pâles commentateurs des œuvres antiques; si parfois encore ils nous font illusion, nous n'en devons pas moins nous dire que le niveau est déjà tombé aussi bas qu'il le fut en moyenne chez les Byzantins pendant les longs siècles du moyen âge. Un exemple suffira pour le prouver :

Richard Hoche a publié (1864 et 1867) un commentaire de Jean le grammairien (Philopon) sur l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque et en même temps, pour le premier Livre seulement, les importantes variantes que lui donnait une réédition de ce commentaire contenu dans un manuscrit de la bibliothèque épiscopale de Zeitz. Philopon, quoique n'étant pas particulièrement mathématicien, était certainement considéré de son temps comme un savant universel de la plus haute valeur; son commentaire doit d'ailleurs reproduire l'enseignement d'un maître également considérable, et dont la compétence mathématique était bien reconnue, Ammonius, fils d'Hermias; il est cependant difficile d'imaginer les erreurs grossières qu'il a entassées dans ses volumineuses dissertations. Or ces erreurs sont en général assez bien corrigées dans la réédition de Zeitz, et l'auteur anonyme fait certainement preuve et d'une meilleure intelligence du texte de Nicomaque et de connaissances mathématiques mieux digérées; Hoche a bien reconnu que cet auteur était postérieur à Philopon, mais il a pensé que ce pouvait être un de ses disciples. Il n'est rien; le manuscrit n° 2377

du fonds grec de la Bibliothèque Nationale de Paris contient le même texte avec des annotations marginales qui établissent que la réédition est due au moine Isaac Argyros, lequel vivait dans la seconde moitié du XIVe siècle.

8. La décadence de la Mathématique grecque remonte donc à une époque bien antérieure au VIIe siècle, et en tous cas on ne peut s'arrêter avant les derniers grands noms que présente l'Ecole d'Alexandrie, ceux de Pappus et de Diophante. C'est l'âge qui précède immédiatement celui de Constantin et du triomphe du christianisme; on a pu dire, avec quelque apparence de raison, que la profonde révolution qui s'ensuivit fut fatale à la Science; il est certain que dès lors se proposa à l'humanité un idéal tout autre que celui qu'avaient fait briller Platon et Aristote, la vie du savant contemplant *la théorie pour elle-même*. Mais si ,depuis la Renaissance, cet idéal retrouvé a gardé d'assez nombreux fidèles, sommes-nous assurés qu'une nouvelle révolution sociale ne l'éteindra pas au profit des doctrines utilitaires?

Au reste l'accusation tombe à faux sur le christianisme; comme les barbares n'ont pas eu la peine de faire crouler la société gréco-romaine, déjà tombée d'elle-même, le christianisme n'a eu qu'à liquider la banqueroute de la philosophie officielle, après le siècle des Antonins. L'idéal platonicien avait dès longtemps disparu devant celui des Stoïciens, *utilitaire au fond et par suite contraire à la Science*, malgré les apparences de sa morale sublime. La secte du Portique arriva, il est vrai, d'assez bonne heure à rallier assez d'intelligences pour qu'il lui fallût tenir en quelque honneur les connaissances scientifiques négligées par ses fondateurs; mais ses doctrines ne pouvaient sérieusement favoriser le développement de ces connaissances, et la suprématie qu'elle obtint semble avoir été au moins inutile pour la Science, aussi bien qu'elle le fut pour le maintien des institutions sociales. Bientôt peut-être l'histoire portera sur cette secte, souvent exaltée, un jugement plus sévère encore.

Quoi qu'il en soit, pour la question qui nous occupe, il s'agit sans contredit d'étudier la période qui remonte depuis Pappus et Diophante jusqu'à l'apogée de la Géométrie grecque, au temps d'Apollonius de Perge. Dans cet intervalle de cinq siècles environ,

un nouveau point de repère nous permet de diviser le problème; la décadence a-t-elle réellement commencé avant l'extension de la domination romaine sur la Grèce et l'Orient hellénisé? A-t-elle au contraire suivi cette extension, qui semblerait dès lors avoir été une des causes déterminantes de cette décadence?

Actuellement la question est très obscure; *a priori,* la perte de l'indépendance pour les États hellènes, la domination d'un peuple dont le génie pratique n'a jamais pu se plier aux abstractions scientifiques, ont dû porter un coup funeste aux études mathématiques sérieuses; mais on peut dire d'un autre côté que, les ruines de la conquête une fois réparées, les pays grecs purent profiter des bienfaits d'une longue paix qui leur avait toujours manqué, que les Romains reconnurent de très bonne heure la supériorité intellectuelle de la race hellène, et que les études scientifiques retrouvèrent bien vite une protection très largement suffisante. Enfin l'histoire montre que, malgré leur défaite momentanée, les Grecs possédaient encore plus de vitalité que les Romains.

9. Il n'est d'ailleurs ni établi historiquement, ni unanimement reconnu que le niveau moyen de la Science pendant la période gréco-romaine ait été inférieur à celui de la période gréco-alexandrine. C'est en ces termes que peut se préciser la première question à résoudre, et, pour l'étudier, il convient de dresser séparément le bilan pour chacune des branches principales à considérer: Arithmétique, Algèbre, Géométrie élémentaire, Géométrie supérieure, Astronomie.

Pour l'Arithmétique, la question, je crois, est aujourd'hui bien tranchée; personne ne peut plus considérer comme des auteurs originaux, ainsi que le faisait Nesselmann, de pseudo-mathématiciens, tels que Nicomaque ou Théon de Smyrne. Les connaissances qu'ils nous ont transmises appartiennent en totalité soit à la période purement hellène, soit à la période alexandrine; si la forme de l'exposition est leur propriété, elle constitue un symptôme irrécusable de décadence. L'Arithmétique théorique n'a été cultivée scientifiquement chez les anciens qu'avec l'appareil géométrique euclidien, et comme travail de ce genre postérieur à notre ère, nous ne connaissons que l'opuscule *des nombres polygones* de Diophante, essai incontestablement malheureux.

En ce qui concerne l'Astronomie, la question de supériorité a été très vivement controversée entre Hipparque et Ptolémée; mais elle offre, pour le problème qui nous occupe, moins d'intérêt qu'on ne pourrait le penser tout d'abord; l'Astronomie comporte en effet deux sortes d'éléments, les uns empruntés à l'observation, les autres à la théorie; pour les premiers, l'astronome le plus récent a toujours l'avantage; Ptolémée a donc incontestablement réalisé des progrès sur Hipparque, de même que les Arabes en ont réalisé sur lui; la question à résoudre pourrait être de savoir si les uns ou les autres ont bien tiré des matériaux dont ils disposaient tout le parti possible; mais nous ne sommes encore capables d'y répondre sérieusement ni pour Hipparque, ni pour Ptolémée, ni pour les Arabes, et en tout cas la réponse n'aurait pas de portée réelle en ce qui concerne la Mathématique pure. Quant à la partie théorique du système de Ptolémée, on est d'accord pour reconnaître qu'elle appartient, comme fond, aux premiers Alexandrins; la théorie des épicycles et la Trigonométrie remontent à Apollonius et à Hipparque. Toutefois il reste nombre de points secondaires à éclaircir, et en tout cas une histoire réelle de la sphérique ancienne est à peu près entièrement à faire.

Pour l'Algèbre et la Géométrie supérieure (Diophante et Pappus), la question est au contraire particulièrement grave et passablement obscure; à la vérité, personne ne soutiendrait plus les paradoxes de Hankel que je rappelais tout à l'heure, et l'on a réuni assez d'indices pour être assuré que les problèmes traités par Diophante lui sont en réalité bien antérieurs; Pappus, d'autre part, nous a laissé un recueil précieux, mais qui n'est, en fait, qu'une compilation de travaux remontant pour la plupart à une date antérieure à l'ère chrétienne. Ces deux contemporains paraissent ainsi avoir obéi au même mouvement qui, à leur époque, après la chute du stoïcisme officiel, ramenait les philosophes vers les sources antiques, et donnait ainsi la passagère illusion d'une renaissance bientôt condamnée à l'avortement. Il n'en est pas moins vrai que le degré d'originalité de Diophante reste incertain, de même que le degré de nouveauté de ses méthodes et de ses notations. Pour être résolues, les questions qu'il soulève réclament de longues discussions et avant tout la publication d'une édition critique de son Ouvrage. Je crois devoir d'autant plus préciser ainsi l'état actuel

du problème, que mon opinion personnelle est mieux arrêtée sur le peu de valeur propre de Diophante, et que cette opinion a été plus favorablement accueillie jusqu'à présent, malgré le défaut de preuves péremptoires.

Pour Pappus, nous possédons désormais ce qui manque pour Diophante, une bonne édition, celle de Hultsch; mais il reste à l'étudier à fond, ce qui demandera des efforts soutenus et répétés, car la mine à exploiter sera difficilement épuisée. Les travaux de Géométrie entre Apollonius et Pappus sont en fait très peu connus, et leur caractère s'apprécie aussi mal que leur importance; si, après les *Coniques* du géomètre de Perge, il n'est paru aucun Ouvrage qui soit devenu classique, le sort qui attendait ses successeurs a peut-être eu son motif dans le déclin des études plutôt que dans l'imperfection de l'œuvre. D'un autre côté, il est certain que les traités classiques d'analyse géométrique ont été l'objet, après leur rédaction, de travaux approfondis qui avaient au moins pour but de faciliter l'étude des matières dont traitaient ces Ouvrages. Les indications que Pappus donne sur ces travaux, les lemmes qu'il en a tirés, doivent être soigneusement examinés pour déterminer quels progrès réels ont pu être réalisés.

10. Ainsi, des cinq branches que nous avons distinguées dans la Science, deux sont à mettre hors de compte; deux autres présentent pour leur histoire des difficultés majeures qui ne permettent pas d'espérer une prompte solution, en ce qui les concerne, du problème que j'ai posé. Heureusement, pour la cinquième branche, il n'en est pas ainsi.

Pour la Géométrie élémentaire en effet, en regard de l'œuvre d'Euclide, nous possédons le *Commentaire sur le premier Livre,* écrit au ve siècle après J.-C. par Proclus, chef de l'École d'Athènes. S'il est possible de démontrer, par l'examen de ce commentaire, qu'aucune idée nouvelle n'a été émise sur les principes de la Science, depuis le premier siècle avant l'ère chrétienne jusqu'à Proclus, la question sera tranchée pour la branche qui nous occupe, comme elle l'est, avons-nous dit, pour l'Arithmétique théorique, et il est clair que pour toute la période correspondante, il y aura un motif suffisant de préjuger défavorablement ce qui concerne les branches supérieures; alors que les éléments sont né-

gligés, il n'est guère à penser que des progrès se réalisent plus haut.

Le *Commentaire* de Proclus peut être divisé en deux Parties bien distinctes : la première, après un double prologue consacré à des considérations générales, d'abord sur l'ensemble des Mathématiques, puis sur la Géométrie en particulier, traite des définitions, des postulats et des axiomes; la seconde Partie commente les propositions du Livre I d'Euclide. Or j'ai déjà avancé à diverses reprises que Proclus avait emprunté à très peu près tout ce qui est réellement mathématique dans son commentaire, pour la première partie à Geminus, auteur du Ier siècle avant l'ère chrétienne, pour la seconde à Porphyre, qui, au IIIe siècle après J.-C., avait commencé à écrire sur les propositions d'Euclide. Si cette double thèse était établie, il ne resterait qu'à constater, ce qui est facile, que le commentaire relatif aux propositions ne présente aucun intérêt réel au point de vue mathématique.

Heiberg (*Philologus*, XLIII, 2, p. 345) m'a objecté que j'estimais trop peu Proclus et que j'exagérais en le qualifiant de *copiste infatigable*. Nous avons cependant un témoignage bien connu depuis longtemps de la façon dont notre philosophe entendait la rédaction d'ouvrages mathématiques : c'est le Traité *De la sphère* de Proclus, c'est-à-dire une copie textuelle des chapitres III, IV, XII et II de l'*Introduction aux phénomènes* qui nous reste, précisément de ce Geminus si souvent cité dans la première partie du *Commentaire sur Euclide*.

Mais je suis le premier à reconnaître que ce témoignage n'est pas suffisant pour établir sérieusement la conjecture que j'ai émise; quel est d'ailleurs l'intérêt de cette conjecture, peut-être d'apparence assez insignifiante de prime abord, je crois l'avoir suffisamment montré; comment donc la discuter à fond? Il faut procéder à une analyse complète, à un examen circonstancié de l'Ouvrage de Proclus, et faire, en procédant suivant les règles de la critique, le départ entre ce qui peut lui appartenir et ce qu'il a dû emprunter à autrui. On reconnaîtra sans aucun doute que Proclus n'est pas simplement un copiste, que de longs développements sont bien de son propre cru; mais on s'apercevra également que son originalité ne s'exerce que sur les questions qu'il considère comme touchant la Philosophie, qu'en somme pour nous, elle n'a qu'une conséquence fâcheuse, c'est que ce qui nous intéresse

vraiment, se trouve noyé dans un fatras pseudo-philosophique dont nous n'avons que faire.

11. Le travail dont j'indique le plan peut sembler devoir être fastidieux dans ses détails, surtout à cause de cet élément néoplatonicien introduit par Proclus dans les questions mathématiques, et qu'il s'agit d'écarter. Mais ce travail n'en est pas moins nécessaire, si l'on veut vraiment résoudre les problèmes posés ; d'ailleurs il offrira un attrait spécial qui suffirait à lui seul pour soutenir l'attention.

Proclus est en fait la source capitale pour l'histoire de la Géométrie chez les Grecs ; en exceptant Pappus, c'est-à-dire la géométrie supérieure, on ne trouve en dehors de lui qu'un petit nombre de documents épars, qu'il serait absolument impossible de coordonner s'il nous manquait. Dès lors la question de savoir où il puise ses renseignements historiques est une des plus graves qui se présentent pour le critique.

Que Proclus n'ait connu par lui-même aucun Ouvrage géométrique antérieur à Euclide, c'est un point unanimement concédé ; mais qu'il n'ait pas même utilisé directement l'*histoire géométrique* composée un peu avant Euclide par le disciple d'Aristote, Eudème de Rhodes, alors qu'il le cite assez fréquemment, je crois avoir été le premier à soutenir cette thèse [1]. Heiberg (*loc. cit.*, p. 492), en la déclarant insuffisamment fondée, remarque très justement qu'elle dépend d'une question plus importante, dit-il, mais trop peu débattue, celle de savoir ce que les derniers siècles de l'antiquité possédaient encore de l'ensemble des écrits plus anciens.

La gravité de cette dernière question n'échappera à personne ; mais il est clair que, si elle touche la Philologie en général, elle ne peut être résolue que par des travaux spéciaux pour les différentes branches de la littérature. L'historien des Mathématiques n'a pas à se préoccuper de savoir au juste quels poètes, perdus pour nous, Proclus pouvait encore lire ; il lui suffit de savoir, en thèse générale, que, dès le ve siècle de notre ère, des Ouvrages qui, cependant, avaient dû rester longtemps accessibles, étaient désormais introu-

---

[1] *Sur les fragments d'Eudème de Rhodes relatifs à l'histoire des Mathématiques* (*Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux*, 1882).

vables; mais, ce point incontestable étant bien admis, il ne peut se dérober devant la tâche qui lui incombe, de discerner si Proclus a, en réalité, directement puisé à telle source antique.

La question ne peut être résolue autrement que par l'étude approfondie du *Commentaire sur Euclide;* c'est seulement après s'être familiarisé avec les procédés de Proclus qu'il est possible de juger quand il fait une citation de première ou de seconde main. Le problème se rattache d'ailleurs à ceux que j'ai posés plus haut; car, à partir du moment où une œuvre aussi intéressante pour le mathématicien que celle d'Eudème a commencé à être négligée, où son autorité n'a plus été invoquée que sur la foi d'autrui, il est bien à présumer que la Science était déjà sur la pente de l'irrémédiable déclin; mais, en même temps, la question se transforme et s'élargit.

Il ne s'agit de rien moins, en fait, que de *la tradition de l'histoire de la Géométrie chez les Grecs;* comment et sur quels documents a-t-elle été composée à l'origine, avec quelle fidélité a-t-elle été transmise, quel degré de probabilité présente donc chacune des données de cette histoire, voilà en effet quels problèmes soulèvera à chaque instant l'étude du *Commentaire* dû à Proclus. Il est clair, par exemple, que tel texte, relatif aux temps avant Euclide, prendra une signification toute différente, suivant que l'on devra le considérer comme emprunté à Eudème, ou comme, au contraire, venant de Geminus; dans certains cas même, l'interprétation littérale pourra changer.

Le travail, ainsi conçu, ne pourra évidemment se borner à Proclus, quoique ce dernier doive toujours fournir, et de beaucoup, la somme de matériaux la plus considérable. Que ce travail soit d'ailleurs indispensable et doive précéder tout essai d'une histoire véritable et réelle de la Géométrie, il est à peine utile de le faire remarquer; il s'agit de l'application d'une des règles les plus élémentaires de la critique; cependant, ce sujet n'a pas encore été traité d'une façon systématique, et, par suite, il est presque neuf. Sans doute, lorsque Bretschneider [1] a recueilli soigneusement les documents relatifs à la période préeuclidienne, si mal traitée

[1] *Die Geometrie und die Geometer vor Euklid.* Leipzig, 1870.

dans Montucla, il lui a bien fallu discuter la valeur de chacun de ces documents; c'est bien aussi ce que fait aujourd'hui, plus complètement et plus judicieusement, G.-J. Allman, qui a repris la tâche de Bretschneider [1]. Mais l'examen critique a toujours porté, en thèse générale, plutôt sur les documents considérés en eux-mêmes, dans leur probabilité intrinsèque, que sur leur origine réelle et sur leur filiation. Il y a là un point de vue important, qui jusqu'à présent, a été trop négligé.

---

[1] *Greek Geometry from Thales to Euclid* publiée dans l'*Hermathena* (Dublin, vol. III, 1877; IV, 1881; V, 1884).

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOUSSINESQ. — Application des potentiels a l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, avec des notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'Analyse. 721 p. in-8°; Paris 1885.

Il a été déjà plusieurs fois question, dans la seconde Partie du *Bulletin*, des recherches contenues dans le Volume que publie M. Boussinesq; elles ont été, en effet, pour la plupart, analysées par l'auteur, dans de nombreuses Communications à l'Académie des Sciences, et, à ce titre, signalées dans notre recueil : nous nous contenterons donc d'en rappeler ici brièvement l'objet.

Ces recherches se rapportent à deux problèmes : le problème de l'équilibre d'un solide limité par un simple plan, et soumis en divers points de ce plan à des pressions arbitraires, et le problème de l'équilibre d'un corps, indéfini dans toutes les directions, sur lequel s'exercent, en certaines régions limitées, des forces extérieures quelconques. Dans les solutions que propose M. Boussinesq s'introduisent divers potentiels, relatifs à des masses fictives : le potentiel ordinaire ou potentiel inverse $\int \frac{dm}{r}$, en désignant par r la distance du point x, y, z à un point a, b, c de l'élément dm de la masse fictive, le potentiel logarithmique à trois variables

$$\int dm \log(r + z - c),$$

le potentiel direct $\int r\,dm$ jouissant de cette propriété que le paramètre différentiel du second ordre de son paramètre différentiel du second ordre soit égal à $-8\pi\rho$, le potentiel sphérique à quatre variables x, y, z, r, jouissant de cette propriété que son paramètre différentiel Δ_2 est égal à sa dérivée seconde par rapport à la quatrième variable r.

M. Boussinesq fait avec détail l'étude analytique de ces divers potentiels, dont les dirivées figurent dans les expressions des déplacements; les masses fictives sont d'ailleurs, suivant les problèmes, à deux ou trois dimensions.

Voici les titres des divers Chapitres qui composent le Livre :

I. Équation différentielle de l'équilibre d'un sol élastique, ho-

rizontal homogène et isotrope, dont la surface supporte des pressions données ou éprouve des déplacements connus.

II. Intégration de ces équations par le moyen de certains potentiels logarithmiques se rapportant à des couches minces de matière étendue sur la surface du corps.

III. Valeurs des déplacements, des déformations et des pressions intérieures, quand les potentiels se réduisent à un seul de leurs éléments.

IV. Calcul des dépressions que produisent, à la surface d'un sol horizontal ou d'un corps élastique plan d'une largeur ou d'une profondeur indéfinies, des pressions intérieures normales, réparties diversement. Retour à la théorie générale de l'équilibre d'un tel corps, pour les cas où les pressions exercées sont obliques.

V. Sur la manière dont se distribue, entre les diverses parties de la surface de contact, la pression d'un solide, qui pèse sur un sol horizontal, ou qu'une force connue pousse normalement contre un corps élastique de dimensions beaucoup plus grandes que celles de la zone touchée.

VI. Étude des potentiels pour les points intérieurs aux masses correspondantes ou potentiantes.

VII. Équilibre d'élasticité d'un solide indéfini sollicité dans une étendue finie par des forces extérieures quelconques.

VIII. Sur les perturbations locales dans la théorie de l'élasticité et sur la possibilité pour le géomètre de remplacer des forces données, s'exerçant sur une petite partie d'un solide, par d'autres forces statiquement équivalentes, appliquées à la même région, très petites en tous sens.

Il nous reste à parler des Notes de l'Ouvrage. L'une est consacrée au potentiel sphérique dont il a déjà été question plus haut; l'auteur s'en sert en particulier pour intégrer l'équation du son. Une autre Note se rapporte à l'intégration d'équations aux dérivées partielles dont le type général est

$$\frac{\partial^{2n}\varphi}{\partial^2 s^n} + A\frac{\partial^n \varphi}{\partial \sigma^n} = 0,$$

où s, σ sont les variables indépendantes et A une constante. M. Boussinesq y parvient en partant de la considération de l'intégrale

$$\varphi = \int_0 f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \psi\left(\frac{s^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

qui jouit de la propriété suivante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \int_0^\infty f\left(\frac{s^2}{2\alpha^2}\right) \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha.$$

La méthode exposée est ensuite appliquée à divers problèmes de Physique et de Mécanique. J. T.

MÉLANGES.

FUNÉRAILLES DE M. SERRET,

le jeudi 5 mars 1885.

DISCOURS DE M. C. JORDAN,

AU NOM DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

La Section de Géométrie est singulièrement éprouvée. Un an s'est à peine écoulé depuis que nous avons eu la douleur de perdre M. Puiseux, qu'une longue et cruelle maladie venait de ravir à la Science et à l'Institut, et voici qu'un de nos Confrères les plus anciens et les plus justement illustres nous est brusquement enlevé.

M. Serret, dont la mort laisse aujourd'hui un si grand vide parmi nous, est né à Paris le 30 août 1819. Entré, après de brillantes études, à l'École Polytechnique, il en sortit dans le service des Tabacs ; mais cette carrière convenait peu à cet esprit passionné pour les pures spéculations des sciences abstraites. Il ne tarda pas à donner sa démission et entra comme examinateur à Sainte-Barbe. Dès ses premiers pas dans l'enseignement, le succès le plus éclatant vint couronner ses efforts et lui montrer qu'il avait trouvé sa voie. En 1848, à peine âgé de vingt-neuf ans, il fut nommé

examinateur d'entrée à l'École Polytechnique. Il remplit ces difficiles fonctions pendant quatorze ans, à la grande satisfaction des candidats, dont l'humble suffrage n'est pas toujours à dédaigner. Ceux qui ont passé par ses mains aiment encore à se rappeler aujourd'hui sa bienveillance, son impartialité, la promptitude et la sûreté de ses jugements.

M. Serret commençait dès la même époque la publication des beaux travaux qui lui ont assigné une place éminente parmi les géomètres.

Le premier Mémoire qu'il ait présenté à l'Académie a pour objet la représentation géométrique des fonctions elliptiques et ultra-elliptiques. Partant de cette propriété de la lemniscate, dont l'importance n'avait pas été soupçonnée avant lui, que les coordonnées d'un point de cette courbe peuvent s'exprimer rationnellement par des fonctions elliptiques de l'arc, M. Serret ne se propose rien moins que de déterminer toutes les courbes qui jouissent de ce caractère et montre qu'il en existe une infinité.

L'impression produite par ce beau travail fut considérable, et l'on sentit dès lors que la place de l'auteur était marquée à l'Institut.

Le Mémoire sur les surfaces orthogonales, qui parut peu de temps après dans le *Journal de Liouville*, ne fut pas moins remarqué; il eut, d'ailleurs, la bonne fortune de servir de point de départ à de nombreuses recherches; plusieurs de nos meilleurs géomètres doivent à leurs études sur cette belle question le commencement de leur réputation.

M. Serret a consacré à la théorie générale des courbes gauches et des surfaces plusieurs autres Mémoires, véritables modèles d'élégance et de clarté, comme tout ce qui est sorti de sa plume. Parmi les beaux résultats qu'ils renferment, on doit signaler particulièrement la détermination des surfaces qui admettent une série de lignes de courbure sphériques.

Le Mémoire sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure parut dans le Tome XVIII du *Journal de Liouville* et doit être assurément compté parmi les œuvres capitales de notre regretté Confrère. La théorie de ces systèmes singuliers d'équations différentielles, que Lagrange avait entrevus sans en achever l'étude,

forme, en effet, un chapitre nouveau et important ajouté au Calcul intégral.

Choisi, en 1849, pour suppléer M. Francœur dans la chaire d'Algèbre à la Sorbonne, M. Serret s'y montra à la fois géomètre éminent et professeur incomparable. De ces savantes leçons est né ce *Cours d'Algèbre supérieure* dont trois éditions successives n'ont pas épuisé le succès et qui jouit d'une autorité si incontestée dans tout le monde savant. « Ce n'est pas un livre sur l'Algèbre, c'est le livre », nous disait un jour un géomètre étranger interprète du sentiment public. Ce bel Ouvrage est, en effet, le guide indispensable pour quiconque veut aborder la théorie des équations. Il réunit, dans une exposition lumineuse, à l'ensemble des résultats obtenus jusque-là dans cette branche de la Science, toute une série de recherches originales et importantes sur les diverses théories qui s'y rapportent, et principalement sur celles des substitutions et des congruences.

En 1856, M. Serret rentra à la Sorbonne comme suppléant de M. Le Verrier à la chaire d'Astronomie. Ce nouveau champ ouvert à son activité ne fut pas moins fécond que les précédents. Un Mémoire classique sur l'équation de Kepler et d'importantes recherches sur le mouvement de rotation de la Terre en furent le fruit.

Tant de travaux ne pouvaient rester sans récompense. M. Serret devint successivement professeur de Mécanique céleste au Collège de France, professeur de Calcul différentiel et intégral à la Sorbonne et Membre du Bureau des Longitudes; enfin, le 19 mars 1860, il fut appelé à succéder à M. Poinsot dans la Section de Géométrie.

Cette haute situation, si légitimement acquise, et dont il ne se servit jamais que dans l'intérêt de la Science, mit en pleine lumière les qualités de son caractère bon, serviable et bienveillant. Non content d'encourager les jeunes gens de ses conseils et de son appui, il prit une part prépondérante à la fondation et à l'organisation de l'École des Hautes Études, dont nous pouvons apprécier aujourd'hui les utiles résultats. C'est également à lui que nous devons la belle publication des *Œuvres de Lagrange*, digne hommage rendu par l'Institut à l'un de ses membres les plus illustres.

Au milieu des désastres de 1870, lorsqu'il fallut réorganiser à la hâte, en province, les cours de l'École Polytechnique, on fit encore appel au dévouement de M. Serret. Cette œuvre patriotique fut le dernier acte de sa vie publique; car cette carrière si brillante allait être brisée avant l'heure, par une catastrophe inattendue.

Dès l'année 1871, notre éminent Confrère avait ressenti une atteinte légère du mal auquel il devait succomber. L'année suivante, à Strasbourg, frappé d'une attaque foudroyante, il fut ballotté un mois entier entre la vie et la mort; la vigueur de sa constitution et les soins pieux dont il était entouré réussirent encore à le sauver; mais sa santé était profondément atteinte, et il se vit obligé de renoncer à la vie active.

Cette pénible épreuve a duré douze années, pendant lesquelles il nous a été donné d'admirer sa patience et la gaîté qui ne l'avait jamais abandonné. Il vivait paisiblement à Versailles entouré d'une famille aimée, dans une tranquille retraite qu'il s'était créée et où il avait su se procurer, au sein même de la ville, quelques-uns des intérêts de la campagne. Il n'en sortait que rarement; il aimait toutefois à venir à nos séances, qu'il suivait assidûment, ne prenant jamais la parole en public, mais prononçant de temps en temps dans les Commissions quelques mots où se manifestaient la rectitude et la lucidité de son esprit, et qui dans sa bouche avaient une autorité particulière.

Nous aimions à penser que notre éminent Confrère resterait encore longtemps auprès de nous et que la catastrophe finale, si longtemps retardée par les soins vigilants d'une compagne dévouée, pourrait être définitivement écartée. Cette espérance vient d'être cruellement déçue.

DISCOURS DE M. Ossian BONNET,

AU NOM DE L'ACADÉMIE ET DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

Messieurs,

L'Académie et la Faculté des Sciences viennent d'être frappées d'un coup terrible et inattendu. Un de nos Confrères les plus sympathiques et les plus aimés, Alfred Serret, a succombé à une

attaque d'apoplexie foudroyante, de la façon la plus tragique, en se rendant à la dernière séance de l'Académie.

Nul n'a ressenti plus douloureusement que moi les effets de cet affreux événement : j'étais le camarade de promotion de Serret à l'École Polytechnique; depuis plus de quarante ans, nous étions liés par la plus étroite amitié, et souvent, réunis dans l'intimité de sa charmante famille, aujourd'hui si désolée, nous aimions à nous entretenir des années de notre jeunesse, à nous rappeler nos premiers travaux, nos premiers efforts. Vous comprendrez donc l'émotion qui m'étreint, quand je pense que c'est devant une tombe et pour des adieux éternels que j'ai mission de parler.

Laissez-moi d'abord rappeler combien était digne de vous l'éminent et cher Confrère que nous avons perdu.

Alfred Serret fut nommé élève à l'École Polytechnique à la suite du concours de 1838. Dès les premiers classements, il s'accusait géomètre; qu'une difficulté se présentât, nous allions la lui soumettre, la solution était immédiate et nos jeunes suffrages lui ouvraient dans l'avenir les portes de l'Institut.

Classé à la sortie de l'École d'abord dans l'artillerie, puis dans l'administration des Tabacs, il ne tarda pas à renoncer aux carrières de l'État pour se consacrer tout entier à la Science et à l'enseignement; une vocation irrésistible l'entraînait déjà de ce côté.

Le premier travail de Serret est une Note publiée en 1842 (deux ans après sa sortie de l'École Polytechnique), et qui a pour objet une représentation géométrique, très originale et très élégante, des fonctions Γ d'Euler. Peu de temps après, il s'occupa d'une série de questions analogues, mais beaucoup plus ardues, sur les intégrales eulériennes, sur les fonctions elliptiques et ultra-elliptiques, sur la représentation de ces fonctions par les arcs de certaines courbes dont il donna la définition et la remarquable génération.

Tous ces travaux, où de sérieuses difficultés sont surmontées avec un rare bonheur, fixèrent l'attention des géomètres. Liouville, dont l'opinion avait alors force de loi, les accueillit avec éloge, les inséra dans son *Journal de Mathématiques* et en fit l'objet de plusieurs Rapports à l'Académie, concluant tous à l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers*. Serret prenait ainsi place parmi les représentants les plus autorisés de la Science

mathématique en France; et, en 1848, ayant à peine vingt-neuf ans, il figurait sur une liste de présentation faite à l'Académie par la Section de Géométrie.

A partir de cette époque, rien n'arrête Serret dans la voie des découvertes : doué d'une puissance d'invention vraiment rare, se livrant avec ardeur à un travail excessif, et qui, hélas! a dû certainement avancer le terme de sa vie, il publie sans interruption pendant plus de trente ans une série de travaux sur toutes les branches des Mathématiques : l'Algèbre supérieure, la Théorie des nombres, le Calcul intégral, la Géométrie, la Mécanique, l'Astronomie. Je voudrais pouvoir m'étendre longuement sur ces travaux remarquables, que l'auteur me communiquait souvent lui-même avant leur publication, que j'ai lus et relus avec un intérêt toujours renouvelé et que, depuis le funeste événement, mon esprit se retrace d'ensemble avec la plus vive admiration; mais le lieu ne permet pas un pareil développement : je me bornerai à dire que l'œuvre de Serret constitue un des bagages scientifiques les plus considérables de notre temps, et que, par le choix des questions traitées, l'habileté et la profondeur des moyens employés, l'élégance et la clarté de l'exposition, elle fournit aux jeunes géomètres, qui veulent grandir, un précieux ensemble de modèles à suivre.

Comme la plupart des carrières bien remplies, celle de notre regretté Confrère présente plusieurs aspects différents. En même temps que l'inventeur fécond et le travailleur infatigable, on trouve, chez Serret, l'homme utile qui sait mettre en œuvre, au grand profit de tous, les ressources naturelles ou acquises de son esprit.

Chargé d'abord des examens d'entrée à l'École Polytechnique et déployant, dans ces délicates fonctions, un très grand tact et une rare sûreté de jugement, il ne tarde pas à être nommé : à la Sorbonne, successivement professeur suppléant d'Algèbre supérieure, professeur suppléant d'Astronomie, professeur titulaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral; puis, au Collège de France, professeur de Mécanique céleste.

Qui de nous n'a présents, à cette heure, les souvenirs qui se rattachent au passage de Serret dans ces chaires diverses? De même que, simple élève à l'École Polytechnique, il dissipait déjà

les premières obscurités de la Science, de même, professeur à la Faculté et au Collège de France, le voyait-on, mis aux prises avec des difficultés de premier ordre, les aplanir avec une simplicité telle et rendre tout si clair, que l'auditeur soupçonnait à peine qu'il venait de franchir l'obstacle qui l'avait d'abord effrayé.

Oui, Serret avait au plus haut degré les qualités du professeur accompli : zèle à toute épreuve, clarté, ordre et méthode, grande facilité de parole, enthousiasme communicatif.

Mais, à côté du chercheur profond et de l'éminent vulgarisateur, il y avait encore, je puis le dire plus qu'un autre, l'homme aimable et bon, le causeur spirituel et bienveillant, l'ami constant et dévoué, et en même temps aussi l'énergique militant dans les questions où l'honneur scientifique était engagé.

Ah! s'il est vrai que trop souvent les jours des hommes d'élite sont comptés, combien la famille, les nombreux amis de Serret devaient craindre qu'il ne fût enlevé trop tôt!

Depuis dix années déjà, l'inique sentence semblait le menacer sans cesse. Nous suivions tous avec angoisse l'affaiblissement progressif de cette belle intelligence, et cependant c'était encore pour ses Confrères un reste de joie que de le revoir chaque semaine à l'Académie, au milieu d'eux; cette satisfaction, il la partageait lui-même au point de n'en vouloir rien perdre; mais elle devait avoir pour tous un terme, hélas! trop proche : la mort est venue trancher subitement une vie dont le cours ordinaire des choses eût rendu déjà la fin prématurée.

J'ai terminé la partie la moins pénible de ma tâche, il m'en reste la plus douloureuse : cher ami, au moment où cette tombe va se fermer sur toi pour toujours, tes Collègues de l'Académie et de la Faculté des Sciences t'apportent le suprême adieu, et du fond de leur cœur attristé t'adressent ces dernières paroles : Si ton existence, comme savant, comme ami et père de famille, a été trop courte pour la Science et pour l'affection, si elle est tout entière pour ceux que tu laisses un songe à réveil cruel, du moins tu as assez vécu pour fonder la durée de ton nom, que rendent impérissable tes actions et tes travaux.

Quant à moi, m'associant à ta famille à jamais inconsolable et désormais privée des joies que tu savais si bien répandre autour d'elle, qu'il me soit permis d'ajouter : cher Serret, ton souvenir

vivra éternellement dans le cœur de ton vieux camarade, de ton ami de quarante-cinq ans qui, en te perdant, perd ses plus chères affections.

DISCOURS DE M. FAYE,

AU NOM DU BUREAU DES LONGITUDES.

Messieurs,

Le Bureau des Longitudes tient à adresser un dernier adieu à M. Serret dont il regrette profondément la fin prématurée. Il n'oubliera jamais les services que M. Serret lui a rendus dans des circonstances difficiles. Il sait qu'il n'a pas tenu à lui de nous en rendre bien d'autres encore. Mais le coup fatal qui l'a frappé, il y a une dizaine d'années, a brusquement interrompu sa brillante carrière. Du moins M. Serret retrouvait-il avec nous, dans un cercle restreint de Collègues amis, quelque chose de ses brillantes facultés. Il suivait attentivement nos travaux, il intervenait dans nos discussions, d'une manière brève, mais toujours droite et nette qui nous prouvait que son esprit et son affection pour nous étaient restés intacts.

Parfois même nous nous prenions à espérer que le temps et les soins pieux dont il était entouré dans son aimable et digne famille nous le feraient retrouver tout entier. Hélas ! c'est la mort qui l'a frappé au moment où nous nous plaisions trop à oublier ses menaces.

C'est pour nous du moins une consolation que de pouvoir nous dire que nos réunions lui ont procuré chaque semaine, jusqu'à la dernière, les satisfactions intellectuelles qu'il pouvait encore goûter et qu'il aurait si bien mérité d'avoir complètes.

Adieu, cher Collègue et ami : tous, nous saluons avec attendrissement vos dépouilles mortelles !

DISCOURS DE M. RENAN,

AU NOM DU COLLÈGE DE FRANCE.

Messieurs,

La mort a d'étranges surprises. Dimanche, vers une heure de l'après-midi, M. Serret assistait à l'assemblée des professeurs du

Collège de France, suivait les discussions à l'ordre du jour, travaillait avec nous à réparer les pertes sensibles que nous avons subies en ces derniers temps; et lundi, vers la même heure, la mort venait le frapper, si subite, si peu annoncée, qu'aucune des personnes qui l'aimaient n'était là pour recevoir son dernier soupir. Il faut féliciter ceux que la clémence du sort soustrait ainsi aux amertumes des suprêmes déchirements. Mais le coup pour ceux qui restent est bien rude. Il est rude surtout quand celui que l'on perd s'est attiré l'affection de tous par le charme de son commerce, l'affabilité de son caractère, sa constante et universelle bonté.

Voué de bonne heure à ces hautes spéculations abstraites qui semblent tirer l'homme hors de la planète qu'il habite et le rendre indifférent aux joies et aux tendresses de la vie, M. Serret garda le meilleur des liens avec la réalité : celui d'une amabilité charmante pour tout ce qui l'entourait, d'une sympathie générale qui ne le laissait froid à rien de ce qui est bon, droit ou grand. Qui le sait mieux que cette famille si dévouée, à laquelle il a donné et de laquelle il a reçu tant de bonheur? Ses collègues et ses confrères ne goûtaient pas moins vivement sa cordialité, sa loyauté, son désir de plaire et de rendre service.

L'extrême variété des sciences enseignées dans un institut comme le nôtre, qui représente le travail original de l'esprit humain dans toute son amplitude, nous rend parfois bien incompétents quand il s'agit de juger les travaux spéciaux de nos collègues. Mais il y a quelque chose que nous savons tous apprécier, c'est la valeur des hommes et des esprits. Pesé à ces deux balances, Serret n'avait pas à craindre d'être trouvé trop léger. Sa manière d'enseigner frappait tous ceux qui avaient assisté, ne fût-ce qu'en profanes, à une de ses leçons. On ne vit jamais, dans une chaire transcendante, pareille clarté, pareil entrain. On sentait une entente profonde de la matière, un ardent amour du sujet, un génie qui se jouait dans les formules les plus hautes, dans les combinaisons les plus ardues.

Faut-il que d'aussi lumineuses intelligences disparaissent! On ne se console de ces dures leçons infligées à notre orgueil qu'en songeant que la science est éternelle, qu'elle n'est point asujettie aux lois fatales de notre fragilité. Ce que nous n'avons pas le temps de faire, d'autres le feront. Ces monuments immenses, ou plutôt

ces collines bâties, qui couvrent la plaine de Babylone, sont faites en briques de quelques centimètres de long. Courte est une vie scientifique; mais immense est un capital où rien ne se perd. Serret a travaillé pour sa part à ce grand édifice de la Science moderne dont les profondeurs cachent tant d'efforts anonymes. Le Collège de France gardera toujours le souvenir de ce professeur excellent, que tous ne pouvaient suivre dans les hautes régions où l'entraînaient ses calculs, mais que tous aimaient, car tous sentaient en lui un homme et un cœur.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE, PAR M. OBRASTZOFF, DE SAINT-PÉTERSBOURG.

Monsieur,

En lisant votre excellent « Cours » de 1873, je suis arrivé à trouver un procédé de démonstration simple de deux propositions que, si je ne me trompe, vous étiez embarrassé de démontrer d'après les méthodes exposées précédemment dans votre Ouvrage.

Je ne sais pas si vous avez trouvé plus tard des démonstrations satisfaisantes; celles que M. Winckler a insérées dans les *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, juin 1874, me semblent plus compliquées que ne l'exige la nature même de la question.

Voici les deux propositions dont il s'agit (p. 359).

Soit, en général, $\frac{P}{Q}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue de Lambert

$$\operatorname{tang} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \ddots}}},$$

P et Q étant des polynômes entiers en x et posons

$$\varphi(x) = \frac{P \cos x - Q \sin x}{x^d}.$$

1° L'intégrale

$$\int \varphi(ax)\varphi(bx)\,dx$$

pourra toujours être obtenue sous forme finie explicite.

2° La fonction $\varphi(x)$ donne aussi ce résultat

$$\int \frac{dx}{\varphi^2(x)} = \frac{P \sin x + Q \cos x}{P \cos x - Q \sin x}.$$

Soit

$$\operatorname{tang} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \ddots - \cfrac{x^2}{2n - 1 - \cfrac{R_n}{R_{n-1}}}}}},$$

où $\frac{R_n}{R_{n-1}}$ signifie tout le reste de la fraction, et $R_0 = -\sin x$, $R_1 = x \cos x - \sin x$. Alors, pour un nombre quelconque $n > 1$, on peut démontrer aisément qu'on a

$$(1) \qquad R_n = (2n-1)R_{n-1} - x^2 R_{n-2},$$

$$(2) \qquad R'_n = x R_{n-1},$$

$$(3) \qquad \left(\frac{R_n}{x^2 R_{n-1}}\right)_{x=0} = \frac{1}{2n+1}.$$

La première de ces formules montre que R_n est de la forme

$$R_n = P_n \cos x - Q_n \sin x,$$

où P_n et Q_n sont des polynômes entiers en x.

Par la même formule on trouve

$$P_n = (2n-1)P_{n-1} - x^2 P_{n-2},$$
$$Q_n = (2n-1)Q_{n-1} - x^2 Q_{n-2},$$

d'où résulte que P_n et Q_n sont le numérateur et le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue proposée. En outre, on aura

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = x^{2n-1}.$$

Et maintenant posons

$$\varphi_n(x) = \frac{R_n}{x^n},$$

et cherchons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\varphi_n^2(x)} = \int \frac{x^{2n}\,dx}{R_n^2}.$$

En multipliant sous le signe de l'intégrale le numérateur et le

dénominateur par R_{n-1} et observant que $R'_n = xR_{n-1}$, nous obtiendrons

$$\int \frac{dx}{\varphi_n^2(x)} = \int \frac{x^{2n-1} R'_n\, dx}{R_{n-1} R_n^2} = \int \frac{x^{2n-1}}{R_{n-1}} d\left(-\frac{1}{R_n}\right) = -\frac{x^{2n-1}}{R_n R_{n-1}} + \int \frac{1}{R_n} d\frac{x^{2n-1}}{R_{n-1}}$$

ou bien

$$\int \frac{dx}{\varphi_n^2(x)} = -\frac{1}{\varphi_n \varphi_{n-1}} + \int \frac{dx}{\varphi_{n-1}^2(x)};$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$\int -\frac{dx}{\varphi_n^2(x)} = -\frac{1}{\varphi_n(x)\varphi_{n-1}(x)} - \frac{1}{\varphi_{n-1}(x)\varphi_{n-2}(x)} - \ldots - \frac{1}{\varphi_1(x)\varphi_0(x)} - \cot x,$$

et ce résultat, à l'aide de l'identité

$$\frac{P_m \sin x + Q_m \cos x}{R_m} - \frac{P_{m-1} \sin x + Q_{m-1} \cos x}{R_{m-1}} = -\frac{1}{\varphi_m(x)\varphi_{m-1}(x)},$$

se réduit à

$$\int \frac{dx}{\varphi_n^2(x)} = \frac{P_n \sin x - Q_n \cos x}{P_n \cos x - Q_n \sin x},$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Remarquons maintenant que

$$\varphi'_n(x) = \varphi_{n-1}(x) - \frac{n}{x}\varphi_n(x),$$

et différentions l'expression $x^{k+1}\varphi_l(ax)\varphi_m(bx)$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^{k+1}\varphi_l(ax)\varphi_m(bx)] &= (k-l-m+1)x^k\varphi_l(ax)\varphi_m(bx) \\ &\quad - x^{k+1}[a\varphi_{l-1}(ax)\varphi_m(bx) + b\varphi_l(ax)\varphi_{m-1}(bx)],\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}(k-l-m+1)\int x^k\varphi_l(ax)\varphi_m(bx)\,dx &= x^{k+1}\varphi_l(ax)\varphi_m(bx) + a\int x^{k+1}\varphi_{l-1}(ax)\varphi_m(bx)\,dx \\ &\quad + b\int x^{k+1}\varphi_l(ax)\varphi_{m-1}(bx)\,dx.\end{aligned}$$

A l'aide de cette formule l'intégrale

$$\int \varphi_n(ax)\varphi_n(bx)\,dx$$

se réduit successivement à une fonction linéaire des intégrales de la forme

$$\int x^n \varphi_i(ax)\varphi_{n-i}(bx)dx,$$

où i doit avoir les valeurs suivantes : $0, 1, 2, \ldots, n$.

Toutes ces intégrales se trouvent par les règles connues.

Saint-Pétersbourg, 18 février 1885.

NOTE DE M. HERMITE.

Dans le tome 76 du *Journal de Borchardt* (p. 303), j'ai remarqué que les expressions

$$P\cos x - Q\sin x, \text{ et } P\sin x + Q\sin x$$

sont les solutions de l'équation de Bessel

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

C'est ce qui m'a conduit aux résultats dont M. Obrastzoff a donné une démonstration élémentaire qui annonce un beau talent d'analyste dans son jeune auteur. Qu'on fasse en effet

$$y = \frac{z}{x^n},$$

on aura, comme on sait, la nouvelle relation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \left[\frac{n(n+1)}{x^2} - 1\right]z,$$

à laquelle satisfait par conséquent la fonction $z = \varphi(x)$. Posant donc

$$u = \varphi(ax), \quad v = \varphi(bx),$$

ces expressions vérifieront les conditions suivantes :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \left[\frac{n(n+1)}{x^2} - a^2\right]u,$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \left[\frac{n(n+1)}{x^2} - b^2\right]v.$$

Or on en tire

$$u\frac{d^2v}{dx^2} - v\frac{d^2u}{dx^2} = \left(a^2 - b^2\right)uv.$$

et, par conséquent,

$$u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx} = \left(a^2 - b^2\right)\int uv\,dx,$$

ce qui donne sous forme explicite la valeur de l'intégrale

$$\int \varphi(ax)\varphi(bx)\,dx.$$

Supposons ensuite $a = b = 1$, nous devrons prendre, pour u et v, les deux solutions de la même équation, c'est-à-dire

$$u = \frac{P\cos x - Q\sin x}{x^n},$$

$$v = \frac{P\sin x + Q\cos x}{x^n};$$

alors de la relation

$$u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx} = C$$

on conclut immédiatement

$$C\int\frac{dx}{u^2} = \frac{v}{u}$$

ou bien

$$C\int\frac{dx}{\varphi^2(x)} = \frac{P\sin x + Q\cos x}{P\cos x - Q\sin x}.$$

Il ne nous reste donc qu'à déterminer la constante C, dans l'équation

$$z_1\frac{dz}{dx} - z\frac{dz_1}{dx} = C,$$

et à prouver qu'elle a pour valeur l'unité. Je remarque, dans ce but, que les expressions

$$z = \frac{y}{x^n}, \quad z_2 = \frac{y_1}{x^n}$$

donnent d'abord

$$z_1\frac{dz}{dx} - z\frac{dz_1}{dx} = \frac{1}{x^{2n}}\left(y\frac{dy}{dx} - y\frac{dy_1}{dx}\right),$$

et ensuite que l'on a (*Journal de Borchardt*, t. 76, p. 304)

$$y = P\cos x - Q\sin x = \alpha x^{2n+1} + \alpha' x^{2n+3} + \ldots,$$
$$y_1 = P\sin x + Q\cos x = \beta + \beta' x + \ldots$$

De ces développements résulte que, dans la quantité $y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx}$, le terme du degré le moins élevé, qui provient de $y_1 \frac{dy}{dx}$, est $(2n+1)\alpha\beta x^{2n}$; nous avons donc $C = (2n+1)\alpha\beta$. J'ai obtenu d'ailleurs, dans l'article cité,

$$\alpha = \frac{1}{3.5.7\ldots 2n+1};$$

quant au coefficient β, c'est précisément le terme constant dans le polygone Q, qui est égal à $3.5.7\ldots 2n-1$, ainsi qu'on le voit aisément; on a donc bien $C = 1$, comme nous nous étions proposé de l'établir.

SUR UNE DROITE QUI SE DÉPLACE DE FAÇON QUE TROIS DE SES POINTS RESTENT SUR LES FACES D'UN TRIÈDRE TRIRECTANGLE;

PAR M. A. MANNHEIM.

M. Darboux, en terminant une Communication qu'il a faite à l'Académie des Sciences sur une *Nouvelle définition de la surface des ondes* (séance du 28 février 1881), a énoncé une élégante proposition concernant une droite qui se meut de façon que trois de ses points restent sur les faces d'un trièdre trirectangle. Je vais démontrer géométriquement une partie de cette proposition, ainsi qu'un complément que vient de me faire connaître M. Darboux et qu'il avait donné dans son Cours à la Sorbonne.

Soient ox, oy, oz les arêtes d'un trièdre trirectangle et D une droite mobile. Cette droite rencontre en a la face du trièdre perpendiculaire à ox, en b la face perpendiculaire à y et en c la face perpendiculaire à oz. Les trois points a, b, c, marqués sur D, étant assujettis pendant le déplacement de cette droite à rester sur les faces qui les contiennent, on sait avec Dupin qu'un point quelconque m de D engendre un ellipsoïde $[m]$. Menons respectivement des points a, b, c les perpendiculaires A, B, C aux faces du trièdre. Ces trois droites déterminent un hyperboloïde (H) qui est le lieu des normales aux surfaces trajectoires des points de D.

On obtient donc la normale en m à l'ellipsoïde $[m]$ en menant la génératrice de (H) *qui est issue de m.*

Considérons le cône directeur de (H); parmi les génératrices de ce cône il y a celles qui sont parallèles à A, B, C. Ces droites forment un trièdre trirectangle inscrit dans le cône directeur de (H). On sait qu'alors on peut amener une arête de ce trièdre à coïncider avec une génératrice quelconque de ce cône, sans que ce trièdre cesse d'être inscrit au cône. Prenons pour arête de ce dièdre la génératrice parallèle à D; par le sommet du cône menons un plan perpendiculaire à cette droite. D'après ce que je viens de rappeler, ce plan coupe le cône suivant deux génératrices perpendiculaires à D et perpendiculaires entre elles. Par suite :

Il y a deux génératrices de (H) *qui rencontrent* D *à angle droit, et ces génératrices sont perpendiculaires l'une à l'autre.*

La droite D, et cette droite considérée dans les positions infiniment voisines qu'elle peut prendre, forment un pinceau [D]. Sur D les foyers de ce pinceau sont les pieds des génératrices de (H), perpendiculaires à D. Ces génératrices sont en ces points les normales aux surfaces focales du pinceau [D]. Comme nous venons de montrer que ces droites existent et qu'elles sont perpendiculaires l'une à l'autre, nous en concluons que *le pinceau* [D] *est un pinceau de normales*. Cela étant vrai, quelle que soit la position de D, nous arrivons ainsi à la proposition de M. Darboux:

La droite mobile demeure, dans toutes ses positions, normale à une surface.

Appelons f et f' les foyers du pinceau [D], F et F′ les normales en ces points aux surfaces focales de ce pinceau. La surface (S), à laquelle la droite D reste normale, a pour centres de courbure principaux les points f et f', et les plans de ses sections principales sont perpendiculaires à F et à F′.

Cherchons à construire f et f'; pour cela nous allons déterminer les points de rencontre de D avec la sphère (Σ), lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à (H).

Parmi les génératrices de (H), il y en a une C′, qui est parallèle à C et qui rencontre à angle droit A et B. Il y a alors sur C′ deux points de la sphère (Σ). De même on a une génératrice A′ qui rencontre B et C à angle droit et une génératrice B′ qui rencontre A et C à angle droit. Sur chacune des droites A′, B′, C′, il y a donc

deux points de (Σ); cette sphère est alors déterminée, et on peut dire que :

La sphère (Σ) *est circonscrite au prisme droit rectangulaire qu'on obtient en menant respectivement de chacun des points marqués sur* D *des plans parallèles aux faces du trièdre qui contiennent les deux autres points marqués sur* D.

Prenons le rectangle, face de ce prisme, qui est dans le plan mené du point a parallèlement au plan des xy, et circonscrivons une circonférence à ce rectangle. Cette circonférence rencontre en deux points la parallèle menée du point a à la droite B. Par ces deux points et les deux points de la droite B, qui appartiennent à (Σ), faisons passer une circonférence de cercle. Cette dernière circonférence, qui est dans le plan (D, B), coupe la droite D aux points f et f' cherchés. Les droites issues de f et f', qui rencontrent A', B', C', sont les droites F et F'.

Nous voyons ainsi comment on construit les centres de courbure principaux de (S) sur la droite D. Les plans des sections principales de cette surface, menés par cette droite, sont du reste perpendiculaires à F et à F'.

Soit (P) le plan de la section principale de S qui contient F. Déplaçons infiniment peu la droite D, de façon qu'elle reste sur ce plan. Cette droite touche alors son enveloppe en f, et la normale en ce point à cette courbe est F. Appelons l le pied de la perpendiculaire abaissée de o sur D et $[l]$ la surface lieu des points, tels que l, relatifs à toutes les positions de D. La surface $[l]$ coupe (P) suivant une courbe dont la normale en l est la droite qui joint ce point au pied n de la perpendiculaire abaissée de o sur F, car cette courbe est sur (P) la podaire de l'enveloppe de D, par rapport au pied de la perpendiculaire abaissée de o sur ce plan.

Le plan (P) coupe le plan des yz suivant une droite à laquelle est perpendiculaire la projection de A sur le plan (P). Cette projection de A contient le point g de F, qui est sur (P) le pied de la génératrice de (H) perpendiculaire à ce plan ; car A et cette dernière génératrice se rencontrent comme étant de système différent.

Prenons maintenant le point i, milieu du segment al, et la surface $[i]$, lieu des points tels que i. Cette surface coupe le plan (P)

suivant une courbe dont on a la normale en i en joignant le point i au milieu du segment gn (¹). Ce point milieu n'est autre que f, comme il est facile de le voir, en vertu de ce théorème :

La génératrice de (H), *qui est parallèle à* D, *est dans le plan* (o, D) *à une distance de* D *égale à la distance du point o à cette droite* (²).

Ainsi la normale en i à la trace de $[i]$ sur (P) est la droite D elle-même.

On a un résultat analogue pour la trace de $[i]$ sur l'autre plan de section principale de (S); donc la droite D est normale à la surface $[i]$. Ceci étant vrai, quelle que soit la position de D, la surface $[i]$ n'est autre que la surface (S).

J'ai ainsi démontré cette partie complémentaire du théorème de M. Darboux :

Les droites, telles que D, *sont normales à la surface lieu des milieux des segments compris respectivement sur ces droites, entre le point où elles rencontrent une des faces du trièdre et la projection orthogonale du sommet du trièdre.*

On voit, par ce qui précède, que l'élégante proposition de M. Darboux m'a donné une nouvelle occasion d'appliquer quelques théorèmes de *Géométrie cinématique* et d'en montrer ainsi l'utilité.

(¹) Voir mon *Cours de Géométrie descriptive*, p. 174.

(²) Ce théorème résulte de ce que la projection de D sur l'une quelconque des faces du trièdre est la diagonale d'un rectangle dont l'autre diagonale a pour extrémités le point o et un point qui appartient à la projection sur cette même face de la génératrice de (H) parallèle à D.

Mars 1885.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

NIELS-HENRIK ABEL. — TABLEAU DE SA VIE ET DE SON ACTION SCIENTIFIQUE, par *C.-A. Bjerkness*, professeur à l'Université de Christiania. — *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 3e série, t. I. — Paris, Gauthier-Villars, 1885.

En 1880, M. Bjerkness publiait dans la *Revue scandinave pour les sciences, les arts et l'industrie*, éditée à Stockholm, une suite de Notices sur Abel. Ces articles, tout d'abord de caractère biographique, ne tardèrent pas à prendre une tournure plus spéciale, plus scientifique. De là, l'origine de ce livre. Dans leur édition des Œuvres d'Abel, MM. Sylow et Lie signalaient l'apparition de cette biographie d'Abel, « biographie détaillée, fondée sur des recherches étendues, dans laquelle M. Bjerkness a tenu compte des matériaux recueillis pour cette édition. Dans ce travail intéressant, ajoutent-ils, on trouve réunies à peu près toutes les données accessibles de la vie d'Abel. Tout en exprimant le vœu que cette biographie soit bientôt traduite dans une langue plus généralement connue, nous devons faire observer que nous ne partageons pas toutes les vues de l'auteur, bien que nous reconnaissions avec lui que c'est à Abel en première ligne que la Science doit la découverte des fonctions elliptiques proprement dites. »

L'édition française répond amplement aux vœux de MM. Sylow et Lie. Ce n'est pas une traduction pure et simple du travail primitif, c'en est plutôt un remaniement. On doit savoir gré à M. Hoüel du travail considérable qu'il s'est imposé pour amener ce livre à sa forme actuelle, à M. Bjerkness de la peine que lui ont occasionnée des corrections nombreuses, des additions importantes.

Le nom du traducteur n'apparaît pas dans l'édition, nous le regrettons vivement. Il convient de citer, à ce propos, l'extrait suivant d'une lettre de M. Bjerkness au Président de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux : « Ce ne sera qu'un acte de justice de reconnaître que, sans l'active assistance de M. Hoüel, cet essai sur une époque importante dans l'histoire des progrès de la Science n'aurait guère existé en français, ou, tout au moins, jamais dans son développement actuel. »

Abel jusqu'en 1825.

Niels-Henrik Abel est né au presbytère de Findö, diocèse de Christiansand, le 5 août 1802. Entré en novembre 1815 à l'École cathédrale de Christiania, il a en 1818 pour professeur de mathématiques Holmbœ. Holmbœ ne tarde point à reconnaître les aptitudes toutes spéciales de son élève; il lui apprend rapidement les éléments, lit avec lui l'*Introductio* d'Euler, les *Institutiones Calculi differentialis* et les *Institutiones Calculi integralis;* il lui donne une méthode, méthode excellente qu'il avait trouvée dans le *Journal de Lindenau et Bohnenberger,* la méthode de Lagrange.

Ce sont les mêmes conseils que, trente ans plus tard, Holmbœ adressait de nouveau à l'auteur de cette biographie. Ces principes, qui constituent la meilleure marche à suivre dans l'étude de l'analyse, ont été nécessairement de la plus grande utilité pour Abel. Nous croyons donc pouvoir, au risque d'allonger un peu notre analyse, les reproduire ici; voici les paroles de Lagrange :

« Je n'étudiais jamais dans le même temps qu'un seul ouvrage; mais, s'il était bon, je le lisais jusqu'à la fin.

» Je ne me hérissais pas d'abord contre les difficultés, mais je les lisais pour y revenir ensuite vingt fois s'il le fallait; si, après tous ces efforts, je ne comprenais pas bien, je cherchais comment un autre géomètre avait traité ce point-là.

» Je ne quittais point le livre que j'avais choisi sans le savoir, et je passais tout ce que je savais bien quand je le rencontrais de nouveau.

» Je regardais comme assez inutile la lecture de grands traités d'Analyse pure; il y passe à la fois un trop grand nombre de méthodes devant les yeux. C'est dans les ouvrages d'application qu'il faut les étudier, on y juge de leur utilité, et on y apprend la manière de s'en servir. Selon moi, c'est aux applications qu'il convient surtout de donner son temps et sa peine; et il faut se borner, en général, à consulter les grands ouvrages sur le calcul, à moins qu'on ne rencontre des méthodes inconnues ou curieuses par leurs usages analytiques.

» Dans mes lectures, je réfléchissais principalement sur ce qui

pouvait avoir guidé mon auteur à telle ou telle transformation ou substitution et à l'avantage qui en résultait; après quoi je cherchais si telle autre n'eût pas mieux réussi, afin de me façonner à pratiquer habilement ce grand moyen de l'analyse.

» Je lisais toujours la plume à la main, développant tous les calculs et m'exerçant sur toutes les questions que je rencontrais, et je regardais comme une excellente pratique celle de faire l'analyse des méthodes et même l'extrait des résultats quand l'ouvrage était important ou estimé.

» Dès mes premiers pas, j'ai cherché à approfondir certains sujets pour avoir occasion d'inventer et de me faire autant que possible des théories à moi sur les points essentiels, afin de les mieux graver dans ma tête, de me les rendre propres et m'exercer à la composition.

» J'avais soin de revenir fréquemment aux considérations géométriques, que je crois très propres à donner au jugement de la force et de la netteté.

» Enfin, je n'ai jamais cessé de me donner chaque jour une tâche pour le lendemain. L'esprit est paresseux, il faut prévenir sa lâcheté naturelle et le tenir en haleine pour en développer toutes les forces et les avoir prêtes au besoin; il n'y a que l'exercice pour cela. C'est encore une excellente habitude que celle de faire, autant qu'on le peut, les mêmes choses aux mêmes heures, en réservant les plus difficiles pour le matin. Je l'avais prise du roi de Prusse, et j'ai éprouvé que cette régularité rend peu à peu le travail plus facile et plus agréable. »

Abel, armé et pénétré de ces conseils, n'eut plus bientôt besoin de guide. Il se mit à étudier Lacroix, Francœur, Poisson, Gauss, Garnier et surtout Lagrange.

En 1821, il entrait à l'Université en qualité de boursier; le secours qui lui était ainsi fourni étant insuffisant, plusieurs des professeurs de l'Université durent se cotiser pour lui constituer de leurs propres deniers une pension.

Étant encore à l'École, Abel crut avoir découvert la résolution de l'équation générale du cinquième degré. Hansteen l'envoya à Degen, à Copenhague, avec prière, s'il était possible, de présenter le travail à la Société Royale des Sciences de Danemark. Abel reconnut vite son erreur, mais cette erreur eut des conséquences

importantes; Degen, dans sa correspondance, exprime le désir de voir le jeune mathématicien appliquer ses forces intellectuelles à l'étude des transcendantes elliptiques. Abel ne laissera pourtant pas de côté ses recherches sur la résolution générale des équations, son génie est assez puissant pour traiter plusieurs sujets à la fois, pour trouver les relations qui existent entre eux.

Un livre manuscrit, écrit en norvégien, découvert au commencement de 1884 et antérieur à l'été de 1883, prouve qu'Abel fit un premier pas dans l'étude des différentielles algébriques en effectuant les réductions qui conduisent aux intégrales hyperelliptiques. Il a entre les mains les *Exercices de Calcul intégral* de Legendre; le conseil de Degen a déjà porté quelques fruits. Ce qui le prouve surabondamment, c'est un voyage à Copenhague dans l'été de 1823. Avant son départ, Abel avait publié dans le *Magazin for Naturvidenskaberne,* 1er semestre, 2e cahier, le Mémoire ayant pour titre *Méthode générale de trouver des fonctions d'une seule quantité variable, lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables indépendantes* (2e éd., 1er vol., I) et aussi un autre Mémoire : *Sur la résolution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies* (2e éd., 1er vol., II). A cette même époque appartiennent aussi, selon toute probabilité, les petits Mémoires qui, d'après les indications d'Holmbœ avaient été écrits en norvégien. Ce sont les premiers Mémoires du second volume de la seconde édition :

I. *Les fonctions transcendantes* $\sum \frac{1}{a^2}, \sum \frac{1}{a^3}, \sum \frac{1}{a^4}, \ldots, \sum \frac{1}{a^n}$ *exprimées par des intégrales définies.*

II. *Sur l'intégrale définie* $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx.$

III. *Sommation de la série*

$$y = \varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \varphi(3)x^3 + \ldots + \varphi(n)x^n,$$

n étant un nombre entier positif fini ou infini, et $\varphi(n)$ *une fonction algébrique rationnelle de n*

IV. *Sur l'équation différentielle* $dy + (p + qy + ry^2)dx = 0$, *où p, q et r sont des fonctions de x seul.*

V. *Sur l'équation différentielle*

$$(y+s)\,dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0.$$

VI. *Détermination d'une fonction au moyen d'une équation qui ne contient qu'une seule variable.*

Abel s'était aussi occupé déjà de l'étude des transcendantes elliptiques. C'est ce que prouve sa lettre à Holmboe datée de Copenhague, le 3 août 1823 ($\sqrt[3]{606432121 9}$), où il parle d'un petit Mémoire sur les *fonctions inverses des transcendantes elliptiques*. On ne sait pas de quel Mémoire il s'agit. Quoi qu'il en soit, Abel était déjà à cette époque sur la trace des fonctions elliptiques, l'idée de l'inversion s'était produite sous une forme encore imparfaite, encore entachée d'erreur. La voie allait s'ouvrir large devant lui.

A son retour de Copenhague, Abel se mit ardemment à l'œuvre. Ce fut dans le cours de ces études qu'il acheva une espèce de traité intitulé *Théorie des transcendantes elliptiques* (2e éd., 2e vol., XIII). Dans ce travail apparaît réellement pour la première fois sa manière de poser les problèmes : ce n'est encore qu'une ébauche, où l'on peut pourtant reconnaître les idées fondamentales qui l'ont guidé dans la rédaction de ses Mémoires ultérieurs.

Abel ne pouvait vivre que grâce à la bourse que lui avait accordée le Sénat de l'Université ; il désirait aller en Allemagne et en France ; une subvention de l'État était nécessaire ; Abel présenta, pour montrer qu'il était digne de cette subvention, un Mémoire sur les différentielles algébriques, Mémoire écrit en français, aujourd'hui perdu. Abel n'obtint pas précisément ce qu'il demandait, on exigea qu'il restât encore quelque temps à l'Université pour se perfectionner dans l'étude des langues savantes et les autres sciences utiles à ses études spéciales.

Vers cette époque, Abel, sur le conseil du professeur Hansteen, entreprit des recherches sur l'influence de la Lune sur le pendule, mais oublia de tenir compte d'une circonstance essentielle, ce qui rendit le résultat inexact. Le Mémoire qu'il publia dans le *Magazin for Naturvidenskaberne* (1824, 1er semestre, 2e fascicule) n'a pas été reproduit dans ses Œuvres.

Cet échec rendit Abel plus circonspect. C'est ce qui explique

ce fait qu'il ait conservé sans les publier les Mémoires écrits en norvégien dont nous avons déjà parlé.

Cependant le problème de la résolution de l'équation générale du cinquième degré l'occupait toujours. Il parvint à trouver l'explication cherchée et publia à ses frais, par suite, sous une forme bien modeste, le *Mémoire sur les équations algébriques où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré* (2e éd., 1er vol., III). La démonstration n'est pas encore suffisante : Abel reviendra lui-même plusieurs fois sur ce problème ; quoi qu'il en soit, Abel partage avec Ruffini l'honneur de cette découverte importante. Il existe d'autres essais d'Abel appartenant à cette même période et particulièrement remarquables. Ce sont des recherches qu'Abel n'a pas publiées lui-même, mais qui sont intéressantes, en ce qu'elles nous montrent les progrès qu'il avait déjà faits dans l'étude des transcendantes. Tel est le Mémoire intitulé : *Propriétés remarquables de la fonction $y = \varphi(x)$ déterminée par l'équation*

$$f(y)\,dy - dx\sqrt{(a-y)(a_1-y)(a_2-y)\ldots(a_m-y)} = 0,$$

$\varphi(y)$ étant une fonction quelconque de y qui ne devient pas nulle ou infinie lorsque $y = a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ (2e éd., 2e vol., VII). Abel y fait une inversion des transcendantes que représentent les intégrales et il remarque le caractère multiplement périodique de cette fonction inverse. Il prend comme exemple l'intégrale élémentaire dont la fonction inverse est sinus. Tel est aussi le Mémoire X du même volume : *Sur la comparaison des fonctions transcendantes,* qui contient en germe le *théorème d'Abel,* suivant l'expression enthousiaste de Legendre, le *monumentum ære perennius.*

Abel publia encore dans le *Magazin for naturvidenskaberne*, en 1825, un petit Mémoire intitulé : *L'intégrale finie $\Sigma^n \varphi(x)$ exprimée par une intégrale définie simple.*

Le 27 août 1825, Abel obtint l'indemnité de voyage qu'il désirait si ardemment. Mais, d'après le témoignage de Holmboe, c'est encore avant son départ qu'Abel avait écrit les Mémoires VIII et IX du 2e volume de la seconde édition : *Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes. — Extension de la théorie précédente.* On peut y remarquer par

exemple, une généralisation très étendue du théorème de l'échange du paramètre et de l'argument dans les transcendantes elliptiques de troisième espèce. Une rédaction plus abrégée du même sujet fut envoyée, probablement par Holmboe, pendant le voyage d'Abel, à la Société Royale des Sciences de Throndhjem et présentée le 22 mars 1826. Ce Mémoire (2e éd., 1er vol., V) fut imprimé dans *Det kongelige norske Videnskabers Selskabs Skrifter*, t. II (1824-1827). Les Mémoires XI et XII de la seconde édition : *Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes. — Sur quelques intégrales définies*, sont également antérieurs à son départ pour l'Allemagne.

Il paraît donc résulter suffisamment de tout ce qui précède qu'avant la fin de 1825 Abel était en possession des principes fondamentaux et des théorèmes principaux qu'il devait développer un peu plus tard : fonctions elliptiques, double périodicité, théorème d'addition, etc.

Septembre 1825. — Mai 1827.

En septembre 1825, Abel partit de Christiania pour Copenhague. Degen venait de mourir. Il rendit visite à von Schmidten, qui l'engagea à aller à Berlin voir Crelle. Abel avait eu d'abord l'intention de se rendre à Göttingue auprès de Gauss. Le conseil de von Schmidten, et aussi des raisons sur lesquelles nous ne pouvons nous étendre dans cette analyse, le poussèrent dans une autre direction.

De Copenhague, Abel se rendit à Berlin en passant par Altona, où il fit la connaissance de Schumacher, l'éditeur des *Astronomische Nachrichten*.

A Berlin, Abel obtint bientôt toute l'estime de Crelle. La création d'un journal de Mathématiques auquel songeait Crelle depuis longtemps fut bien vite décidée. Abel se mit à l'œuvre : il écrivit en français six Mémoires qui furent prêts au commencement de l'année 1826; Crelle les traduisit en allemand et ils parurent dans le premier volume du nouveau journal. Parmi eux se trouvent les nos VI, VII, VIII, IX et X du premier volume de la seconde édition :

Recherche des fonctions de deux quantités variables indé-

pendantes x et y, telles que $f(x, y)$, qui ont la propriété que $f(z), f(x, y)$ est une fonction symétrique de z, x et y.

Démonstration de l'impossibilité algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré.

Remarque sur le Mémoire n° 4 du premier cahier du Journal de M. Crelle.

Résolution d'un problème de Mécanique.

Démonstration d'une expression de laquelle la formule binôme est un cas particulier.

Vers la même époque, Abel préparait aussi un Mémoire très remarquable concernant la série du binôme. Il avait en main le *Cours d'Analyse* de Cauchy. Le Mémoire qu'il composa sous le titre : *Recherches sur la série*

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

fut également traduit en allemand par Crelle et parut dans la quatrième livraison du 1er volume du *Journal de Crelle*, en février ou mars 1827.

En mars 1826, Abel quitta pendant quelque temps Berlin pour aller à Freiberg avec son ami Keilhau. L'équation du cinquième degré l'occupait encore, comme le prouve sa lettre à Crelle du 14 mars. Il voulait en outre écrire pour le nouveau Journal un article en allemand. M. Bjerkness croit qu'il s'agit du Mémoire n° XI du 1er volume de la seconde édition : *Sur l'intégration de la fonction différentielle* $\frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$, R *et* ρ *étant des fonctions entières.* D'après Holmbœ au contraire, le seul Mémoire qu'Abel écrivit en allemand serait le Mémoire n° XIV du 2e volume de la seconde édition : *Note sur la fonction*

$$\psi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots$$

Or Holmbœ dit dans son édition que tous les Mémoires d'Abel qui parurent dans le *Journal de Crelle* étaient rédigés en français : il faudrait donc croire que le Mémoire de Freiberg n'y fut pas inséré; d'ailleurs, une lettre de Crelle à Abel fait présumer que les Mémoires qu'Abel avait rédigés pour le Journal n'y furent pas

tous imprimés. La chose ne présente d'ailleurs en elle-même qu'un intérêt secondaire. Il est certain en tout cas que le Mémoire n° XI, *Sur l'intégration*, était prêt depuis quelque temps déjà, et peu importe où il a été rédigé. Il parut dans le *Journal de Crelle* bien avant les *Recherches sur la formule binôme*.

Abel revient à Berlin, mais pour en repartir de suite. Il y avait trouvé un éditeur bienveillant, auquel il pourrait envoyer ses Mémoires : il n'avait plus rien à y faire. Il part pour Paris, mais, ne voulant pas faire le voyage seul, il prend un chemin détourné. Il passe par Dresde, Prague, Vienne (où il fait la connaissance de Littrow), Trieste, Venise, Bautzen et Schaffhouse. De là, il va directement à Paris où il arrive le 20 juillet 1826.

Le 9 août, il envoie à Crelle son théorème d'addition, le jour même où il se mettait à l'œuvre pour rédiger le *Mémoire sur une propriété très générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes* (2e vol., 2e éd., n° XII). Le 24 octobre, le travail était terminé. Abel ne connaissait encore presque personne à Paris, Littrow lui avait donné une lettre pour Bouvard, ce qui lui permit de visiter l'Observatoire; Cauchy ne fit guère attention à notre jeune Norvégien; Legendre fut aimable, mais des rapports intimes ne s'établirent pas entre les deux analystes. Ce fut à Hachette qu'il dut de pouvoir présenter son Mémoire à l'Institut.

On sait quel a été le sort de ce Mémoire. Legendre et Cauchy furent nommés commissaires. Le manuscrit resta entre les mains de Cauchy qui devait faire le rapport. Legendre avait bien adressé à Abel quelques paroles encourageantes, il les oublia jusqu'à ce que Jacobi lui eût ouvert les yeux. Le 24 juillet 1830, l'Académie des Sciences partageait le grand prix des Sciences mathématiques entre les héritiers d'Abel et Jacobi. Cependant, le Mémoire dut encore attendre jusqu'en 1841. L'Académie chargea alors Libri de surveiller l'impression, une partie de la correction des épreuves dut se faire sans collation avec l'original, le manuscrit ayant disparu.

Le *Journal de Crelle* paraissait à Abel encore trop jeune pour que l'on pût y imprimer de véritables traités comme ceux qu'il avait en tête. Il songea aux *Annales de Gergonne*. Il avait l'intention d'y publier un grand Mémoire sur les fonctions elliptiques, mais il n'envoya qu'un travail de moindre importance : *Recherche*

de la quantité qui satisfait à la fois à deux équations algébriques données.

Abel s'occupait en outre à Paris de la résolution des équations par radicaux; il donne dans une lettre à Crelle, du 4 décembre 1826, un théorème sur la division de la lemniscate. On possède d'ailleurs le cahier dont Abel s'est servi à Paris, on peut voir qu'il y examine la question de permutation du paramètre et de l'argument, de transformation des intégrales de première et de seconde espèce; Abel s'y prépare à la rédaction de ses *Recherches sur les fonctions elliptiques*. D'autre part, Abel a dit à Holmbœ « que déjà lors de son séjour à Paris, en 1826, il avait achevé le plus important de ce qu'il a exposé depuis sur ces fonctions. » Le 29 décembre 1826, Abel partit de Paris pour Berlin; ses recherches sur les fonctions elliptiques constituent alors son occupation principale. Il fournit cependant à Crelle un petit Mémoire *Sur quelques intégrales définies* (2e éd., 1er vol., XV), avant son départ pour la Norvège.

Mai 1827. — Avril 1829.

Crelle cherchait à retenir Abel auprès de lui. Il ne put y parvenir. Abel rejoignit sa fiancée à Copenhague et rentra à Christiania le 20 mai 1827.

Abel espérait obtenir une place de professeur à l'Université : Holmbœ occupait la place; le gouvernement n'avait pas de fonds disponibles. Abel dut attendre dans la gêne et la misère, donnant pour vivre des leçons de Mathématiques, s'endettant auprès de ses amis. Il attendit jusqu'à sa mort.

Il n'en continua pas moins de travailler. La première partie de ses *Recherches sur les fonctions elliptiques* était prête. Elle fut publiée le 20 septembre 1827 dans le second cahier du second volume du *Journal de Crelle*. Cette première partie avait peut-être été remise à Crelle avant le départ de Berlin.

Le 13 juin et le 2 août, Jacobi faisait paraître dans les *Astronomische Nachrichten* les énoncés connus concernant la théorie des transformations.

Pendant ce temps Abel rédigeait la seconde partie des *Recherches*. Il envoyait à Crelle, comme pour lui faire prendre patience,

les *Théorèmes et Problèmes* (2e éd., 1er vol., XXIX), le *Mémoire sur les fonctions qui satisfont à l'équation*

$$\varphi(x)+\varphi(y)=\psi[xf(y)+yf(x)]$$

(XVII), la *Note sur un Mémoire de M. H. Olivier ayant pour titre : Remarques sur les séries infinies et leur convergence* (XVIII).

La rédaction était terminée lorsque la Note de Jacobi, insérée dans le n° 123, année 1827, des *Astronomische Nachrichten* lui tomba sous les yeux. Il ajouta à la seconde partie de son Mémoire une addition contenant la démonstration du théorème énoncé, démonstration découlant immédiatement de formules contenues dans ses *Recherches*.

Les deux parties et l'addition qui constituent les *Recherches sur les fonctions elliptiques* forment le Mémoire n° XVI du volume premier de la seconde édition. L'envoi d'Abel date du 12 février 1828. Le Mémoire fut publié le 26 mai.

Dans l'intervalle, Abel avait eu connaissance de la Note de Jacobi contenue dans le n° 127 des *Astronomische Nachrichten;* le 27 mai il envoyait à Schumacher la *Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques.* Il remarque que le théorème de Jacobi est un cas particulier d'un théorème plus général contenu dans les *Recherches* et s'occupe d'un cas général de transformation (2e vol., n° XX). Le 25 septembre il envoyait à Schumacher une *Addition au Mémoire précédent* (XXI).

Abel s'était ainsi adressé au *Journal de Schumacher*. Il ne délaissait pourtant pas Crelle. Dans le troisième volume, le fascicule paru le 3 décembre 1828 contient de lui les *Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes* (n° XXI, 1er vol.) et un Mémoire *Sur le nombre des transformations différentes qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction rationnelle dont le degré est un nombre premier donné* (n° XXII, 1er vol.), et enfin un *Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce* (n° XXIII, 1er vol.).

Une note au bas de la seconde page du premier de ces trois

Mémoires, note où Abel fait mention de son Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris, mit en éveil Jacobi, qui écrivit à ce sujet à Legendre.

Le 3 octobre 1828, Abel entrait en correspondance avec Legendre. La première lettre d'Abel est perdue. Cela est d'autant plus regrettable que l'on sait qu'Abel y parlait, entre autres choses, de ses découvertes dans la théorie des transcendantes plus élevées que les transcendantes elliptiques. La réponse de Legendre est du 25 octobre. Un mois après, Abel lui écrivait de nouveau, lui donnant quelques éclaircissements, indiquant l'ordre de ses recherches. La seconde lettre de Legendre arriva à Abel lorsqu'il était déjà alité; les éloges qu'il recevait alors durent être pour lui une douce consolation. Crelle avait continué à Berlin ses démarches pour obtenir une chaire pour son jeune protégé. Legendre lui annonçait que la chose allait probablement se faire. Le 6 avril 1829, Abel mourait à Froland. Son maigre traitement de docent à l'Université venait précisément d'être augmenté. Une lettre arrivait alors qui l'appelait à Berlin. Il était trop tard.

Crelle avait encore publié, le 25 janvier 1829, une *Note sur quelques formules elliptiques* (XXIV, 1er vol.). Il avait de plus en sa possession un travail important, *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement* (XXV, 1er vol.), daté de Christiania le 29 mars 1828. Le Mémoire n'est pas terminé. Les manuscrits d'Abel ont prouvé qu'il comptait y ajouter quelques paragraphes. C'est probablement ce qui empêcha Crelle de le publier plus tôt. Le Mémoire ne parut dans le Journal qu'à la date du 28 mars 1829. Une note avertit que l'auteur doit donner des applications aux fonctions elliptiques. Dans le même volume furent publiés les Mémoires XXVI et XXVII : *Théorèmes sur les fonctions elliptiques* et *Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes*. Ce dernier Mémoire, écrit par Abel déjà malade (6 janvier 1829), contenait la démonstration de son grand théorème d'addition. Abel semble avoir désespéré du sort de son Mémoire à l'Institut.

Pendant sa maladie, Abel s'occupait de la rédaction de son grand Mémoire : *Précis d'une théorie de fonctions elliptiques*, qu'il n'a pas pu achever. Ce qu'il put en écrire parut dans le *Journal de Crelle* le 10 juin et le 31 juillet 1829. La seconde édition

(n° XXVIII) contient, outre ce qui est dans le *Journal de Crelle*, quelques fragments tirés d'un manuscrit trouvé en 1874.

C'est à la période de mai 1827 à janvier 1829 qu'appartiennent les Mémoires n°s XVI, XVII, XVIII et XIX du 2e volume de la deuxième édition :

Sur les séries.

Mémoire sur les fonctions transcendantes de la forme $\int y dx$, *où* y *est une fonction algébrique de* x.

Sur la résolution algébrique des équations.

Fragments sur les fonctions elliptiques.

Nous avons dû, dans cette analyse déjà bien longue de l'ouvrage de M. Bjerkness, laisser de côté toute une partie. Nous ne nous sommes occupé ici que de l'*action scientifique* d'Abel, laissant presque de côté la *vie* du grand mathématicien, ses joies et surtout ses tristesses. Il nous était également impossible de suivre M. Bjerkness dans ses considérations sur Jacobi. Certainement Abel ne doit rien à Jacobi ; constatons simplement qu'il est bien difficile sinon impossible de reconnaître jamais ce que Jacobi doit à Abel. Contentons-nous de l'hommage éclatant rendu par Jacobi à son rival dans ses lettres à Lagrange et dans les *Fundamenta nova*, regrettant peut-être un peu que, dans ces mêmes *Fundamenta*, Jacobi n'ait pas donné plus de détails sur les questions de priorité.

G. Brunel.

MATHIEU. — Théorie du Potentiel et ses applications à l'Électrostatique et au Magnétisme. 1re Partie, 1 vol. in-4° ; 178 p. Paris, 1885.

Ce Livre forme la troisième Partie du *Traité de Physique mathématique* dont l'auteur a entrepris la publication ; il est divisé en cinq Chapitres.

Chapitre I. — *Propriétés générales du potentiel.*

L'auteur a exposé ces propriétés d'une façon simple et rapide ; il ne s'est guère attardé aux questions subtiles que soulèvent les démonstrations relatives à l'existence et la continuité des dérivées

ou au principe de Dirichlet ; et, à la vérité, l'intérêt de ces questions n'est que pour les purs géomètres. Relativement à la formule de Green, il observe qu'elle a été employée par Poisson et Fourier dans leurs recherches sur la théorie de la chaleur, longtemps avant l'apparition du Mémoire de Green.

Chapitre II. — *Potentiel de couches de matière distribuées sur des surfaces.*

Cette théorie est exposée en supposant que les couches ont une épaisseur très petite, mais non pas nulle.

Chapitre III. — *Potentiel logarithmique. — Potentiel calorifique. — Second potentiel.*

Les propriétés du potentiel logarithmique sont brièvement exposées. Avec les indications données, le lecteur est en état de reconstruire aisément les démonstrations. Pour ce qui concerne le potentiel calorifique et le second potentiel, M. Mathieu reproduit les propositions qu'il a développées dans le *Journal de Liouville* (1869, 1872, 1879). Il a donné le nom de *potentiel calorifique* à l'expression

$$u = \int \frac{\cos \alpha r}{r} \rho \, d\varpi ;$$

$d\varpi$ désigne un élément de volume, ρ la densité en un point de cet élément, r la distance de ce point à un point x, y, z; α est une constante; l'intégration doit être étendue à tous les éléments d'un volume limité; la fonction u de x, y, z satisfait à l'équation

$$\Delta u = -\alpha^2 u,$$

pourvu que le point x, y, z soit extérieur aux masses. La théorie de ce potentiel est naturellement liée à la théorie de l'intégration de cette dernière équation. De même la théorie du *second potentiel* se lie à la théorie de l'intégration de l'équation

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial x^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0.$$

Le second potentiel est l'expression

$$\int r \rho \, d\varpi,$$

en conservant les notations précédentes.

Chapitre IV. — *Comparaison de la théorie du potentiel avec celle de la chaleur.*

Ce Chapitre est employé en partie à montrer l'identité du potentiel et de la fonction qui représente la température ou un point d'un corps isotrope en équilibre de température. L'auteur fait ensuite la théorie des surfaces de niveau, établit l'expression de ΔV en coordonnées orthogonales quelconques et termine par l'étude de l'expression

$$V = \int \frac{\rho}{r} d\varpi,$$

où

$$r = \sqrt{\frac{(x-a)^2}{A} + \frac{(y-b)^2}{B} + \frac{(z-c)^2}{C}},$$

qui s'introduit dans la théorie de la température des corps cristallisés.

Chapitre V. — *Sur l'attraction de différents corps dérivés des surfaces du second ordre.*

La théorie de l'attraction des ellipsoïdes tient la plus grande place dans ce Chapitre; on y trouvera aussi le calcul du potentiel d'une ellipse d'après M. Betti et quelques développements intéressants sur la détermination des lignes de force. J. T.

GRAM. — Undersegelser angaaende Moengden af Primtal under en given Groense. 1 vol. in-4°, 308 p. Copenhague, 1884.

Ce Volume, outre les recherches personnelles de l'auteur, contient l'analyse détaillée et la critique des principaux travaux relatifs à cette belle et difficile question : combien y a-t-il de nombres premiers compris entre deux nombres donnés?

M. Gram commence par faire une étude approfondie des recherches de Riemann, qui aboutissent, comme on sait, à montrer le rôle que joue le logarithme intégral et qui ont pour point de départ l'identité d'Euler

$$\prod\left(1 - \frac{1}{p^r}\right) = \frac{1}{S(r)},$$

où le produit infini s'étend à tous les nombres premiers plus grands que un et où

$$S(r) = \frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \ldots.$$

Le Mémoire de Riemann est rédigé d'une façon extrêmement brève et le commentaire qu'en a donné M. Gram, les simplifications qu'il a apportées à la démonstration, ses recherches sur la formule finale et sur l'heureuse modification que M. Genocchi y a faite ne seront pas inutiles.

L'Auteur établit ensuite un grand nombre de formules dues à Dirichlet, à MM. Berger, Cesaro, Bougaïeff et à lui-même, où figurent, d'une part, la fonction $\theta(x)$, qui exprime le nombre de nombres premiers et non supérieurs à x, la fonction, à laquelle il attribue un rôle essentiel,

$$\mathfrak{I}(x) = \theta(x) + \tfrac{1}{2}\,\theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \tfrac{1}{3}\,\theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots,$$

la fonction $\mathfrak{F}(x)$, qui désigne le nombre des puissances des nombres premiers jusqu'à x avec un exposant entier, et, de l'autre, la fonction $E(x)$ qui désigne la partie entière de x. Il parvient ensuite aux formules de M. Tchebycheff relatives à la fonction $F(x)$ qui exprime la somme des logarithmes népériens des nombres premiers qui ne surpassent pas x et à la fonction

$$\psi(x) = F(x) + F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + F\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots;$$

il développe les beaux résultats dus à l'illustre géomètre russe et établit, pour cette fonction $\psi(x)$, une formule analogue à celle de Riemann pour la fonction $\theta(x)$.

Sept Tables, qui donnent, dans des limites étendues, les valeurs des principales fonctions numériques dont il a eu à s'occuper, terminent le Livre de M. Gram. J. T.

1re Part

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JAMES GOW. — A SHORT HISTORY OF GREEK MATHEMATICS, Cambridge (University press), 1884. — In-8°, XVI-324 p.

Jusqu'à ces derniers temps l'histoire des Mathématiques anciennes n'avait guère attiré l'attention en Angleterre; nos voisins d'Outre-Manche ne pouvaient opposer aux travaux des autres nations qu'un mauvais Traité de Dean Peacok et quelques brillants articles écrits par De Morgan pour le Dictionnaire biographique de Smith.

Depuis 1877, G.-J. Allmann, professeur à Galway, avait bien publié, dans l'*Hermathena* de Dublin, sur la Géométrie grecque de Thalès à Euclide, trois études successives qui n'ont pas encore épuisé son sujet, mais qui doivent compter parmi les travaux les plus substantiels et les plus originaux qui aient paru sur la matière. Cependant l'Angleterre proprement dite restait encore étrangère au mouvement historique; on doit donc accueillir avec un intérêt particulier le nouveau Volume que vient de publier un *fellow* de l'Université de Cambridge.

L'étendue de ce Volume et son plan général sont parfaitement calculés pour le but que s'est proposé l'auteur : donner un précis de l'histoire de l'Arithmétique et de la Géométrie chez les Grecs, dire tout ce qu'il y a d'essentiel à ce sujet sans entrer dans le détail des controverses, vulgariser enfin, en les coordonnant, les résultats dus aux recherches originales sur les sources. L'exécution du plan est d'ailleurs réellement satisfaisante; l'auteur a recherché les meilleurs matériaux, il les a utilisés avec une critique en général judicieuse, cependant parfois un peu superficielle ; il montre une compétence suffisante, soit en Mathématiques, soit en philologie ; enfin le style est clair et les développements donnés à chaque question sont bien mesurés à son importance.

Je dois expliquer la réserve que je viens de glisser au milieu de ces éloges; je n'ai nullement l'intention de relever une à une toutes les erreurs qui pourraient être signalées, alors que les unes

sont de simples lapsus ([1]), faciles à corriger, alors que les autres sont malheureusement courantes et se retrouvent dans les meilleurs auteurs. J'ai déjà eu l'occasion, au reste, de combattre ici même la plupart de ces dernières; je me réserve de revenir en temps et lieu sur celles que je n'ai pas encore discutées.

Mais ce que je veux faire observer, c'est qu'un historien comme M. Gow, qui n'est point un simple compilateur, partage entièrement la responsabilité d'une erreur, même s'il suit un garant d'une autorité suffisante et s'il a soin de le citer exactement. Il peut bien être excusé, à la vérité, de n'avoir pas vérifié l'assertion qu'il emprunte; il n'en est pas moins vrai qu'en l'adoptant il lui donne plus de poids et la rend plus difficile à écarter. Si je lis cette assertion dans l'auteur qui l'a émise le premier, je puis être en garde contre l'éventualité d'une défaillance accidentelle, toujours possible, même chez un maître de la renommée la mieux assise; si je la retrouve chez un bon historien qui a l'habitude de contrôler ses sources, je suis induit à m'éviter le travail d'une vérification personnelle et dès lors à accepter l'erreur comme vérité.

Je vais donner deux exemples de nature différente : Nesselmann est un des auteurs qui se sont le plus vivement élevés contre les citations inexactes, qui les ont signalées avec le plus d'âpreté; on doit donc attendre de sa part, dans celles qu'il fait, une attention scrupuleuse, dont il fait d'ailleurs généralement preuve, il faut le reconnaître. Or il cite, comme preuve de la renommée de Nicomaque en tant qu'arithméticien, un mot de Lucien : « Tu calcules comme Nicomaque de Gérasa » ; il fait au reste cette citation d'après Fabricius (*Bibl. græca*, V, 635, éd. Harles), qui est donc le premier responsable.

M. Gow, d'autre part, est plutôt philologue que mathématicien; il nous promet lui-même, comme suite de son Ouvrage, un autre travail historique, non pas sur les Mathématiques, mais bien sur les littérateurs alexandrins. Il a pris la peine de rechercher le passage de Lucien, d'après Fabricius, et il l'indique exactement, en

---

([1]) Par exemple : Hermas au lieu de Heronas, p. 313 et 320; le parallélogramme des mouvements confondu avec celui des forces (p. 238), que tous les anciens ont ignoré, tandis qu'ils ont certainement connu le premier de très bonne heure.

lui donnant le même sens que Nesselmann. Il semble donc que je puis avoir toute confiance dans une interprétation, ainsi triplement garantie.

Si cependant je cherche à mon tour dans Lucien, je trouve que la phrase en question n'est nullement un compliment adressé à un calculateur, mais au contraire une raillerie qui est loin de prouver quelque estime pour Nicomaque ([1]).

Au point de vue mathématique, comme compétence, personne ne peut évidemment le disputer à Chasles. Or celui-ci nous dit (*Aperçu*, p. 18-20) que, pour la génération des coniques d'après Apollonius, il faut concevoir, dans le cône oblique à base circulaire, le plan du triangle par l'axe perpendiculaire à celui de la base, et le plan sécant perpendiculaire à celui du triangle par l'axe. Ce n'est pas de sa part une inadvertance de rédaction, comme il en laisse malheureusement échapper parfois ; c'est un point sur lequel il revient souvent, pour affirmer avec insistance que le cas général de la section par un plan quelconque n'a pas été traité dans l'antiquité.

Non seulement M. Gow reproduit ce passage de Chasles, mais encore il nous donne une paraphrase des propositions correspondantes d'Apollonius (I, 11, 12, 13), avec la traduction *in extenso* des énoncés, le tout parfaitement d'accord avec l'assertion de l'auteur de l'*Aperçu*. Comment croire qu'il y a là une erreur capitale, que ne devaient permettre ni le texte grec, ni la traduction latine de Halley?

Et cependant il est matériellement certain que, pour Apollonius, *le plan sécant est tout à fait quelconque*, et le triangle par l'axe assujetti à cette seule condition que le diamètre, qui forme son côté sur le plan de la base circulaire, soit perpendiculaire à l'intersection du plan de cette base avec le plan sécant. Il suit de là qu'A-

---

([1]) Le passage est dans le dialogue du *Philopatris* (12), qui, au reste, ne peut guère être de Lucien. Un des interlocuteurs révèle à l'autre le mystère de la trinité chrétienne; l'autre répond ironiquement : « Tu veux m'apprendre à compter. Tu fais de l'Arithmétique un serment. Tu calcules comme Nicomaque de Gérasa. Je ne sais pas ce que tu veux dire avec ton *trois en un, un en trois*. Veux-tu parler du quaternaire de Pythagore, de la huitaine ou de la trentaine? ». L'auteur du dialogue vise évidemment les *Théologoumènes arithmétiques* de Nicomaque, non pas son *Introduction*.

pollonius ne rapporte nullement, dans cette génération, les coniques à leurs axes, comme il résulte de l'assertion de Chasles et comme ce dernier le croit, de même que M. Gow, mais bien à deux diamètres conjugués dont l'un est l'intersection du plan sécant avec le plan du triangle par l'axe, dont l'autre est parallèle à la trace du plan sécant sur le plan de la base circulaire.

Ces deux exemples suffisent pour montrer que l'historien des Mathématiques ne doit accorder à personne sa pleine confiance; je ne multiplierai donc pas les preuves de cette triste vérité; je préfère signaler et discuter ce qui, dans l'Ouvrage de M. Gow, est réellement neuf ou vaut comme tel.

L'historien anglais ne s'est pas en effet borné à reproduire les documents anciens ou les opinions qu'ils ont provoquées : il a fait çà et là œuvre personnelle, et ses contributions ne sont nullement à négliger.

La meilleure est certainement la discussion (p. 29-48) sur la date de l'invention par les Grecs de leur système de numération alphabétique. Malgré son importance capitale, ce point n'avait encore été nullement élucidé, et l'on se contentait d'ordinaire de faire remonter cette invention au ve ou au vi^e^ siècle avant notre ère, soit avant, soit après Pythagore; M. Gow la fait descendre au temps de Ptolémée Philadelphe, c'est-à-dire après Euclide.

Ses raisons sont les suivantes : le système primitif de numération écrite chez les Grecs, système analogue à celui des Romains, est bien connu par les inscriptions, et, jusqu'à l'ère chrétienne, il y est le seul employé dans la Grèce propre. Le système alphabétique ne commence à apparaître dans les inscriptions que vers 180 avant J.-C. et sur les côtes de l'Asie Mineure; sur les papyrus gréco-égyptiens que vers 257; sur les monnaies (pour lesquelles l'abréviation était la plus utile) qu'en Égypte vers 266. Avant cette époque, on trouve bien, il est vrai, les lettres de l'alphabet employées comme signes numéraux, mais seulement pour désigner, dans leur ordre, les nombres de un à vingt-quatre, comme pour l'indication des chants d'Homère, et sans les trois caractères étrangers à l'alphabet ordinaire et qui représentent respectivement 6, 90 et 900. Enfin aucun alphabet ancien n'a possédé ces trois caractères en même temps que les lettres d'invention postérieure à l'introduction en Grèce de l'alphabet phénicien.

Il semble donc bien que l'invention du système numéral alphabétique soit due à des grammairiens d'Alexandrie (comme Eratosthène par exemple), et qu'il n'ait triomphé de l'ancien système que grâce à son adoption officielle en Égypte, d'où il aura passé successivement aux autres pays hellènes. Cette thèse a d'ailleurs le grand avantage de rendre compte d'écrits comme l'*Arénaire* d'Archimède, et le traité d'Apollonius sur les *pythmènes* (¹), tandis que ces écrits sont assez difficilement explicables, si le système de numération alphabétique avait déjà, à leur époque, une ancienneté de deux siècles.

La seule objection qu'on puisse élever, ce me semble, consisterait à faire ressortir l'improbabilité qu'une invention aussi récente n'ait pas été constatée par un témoignage historique ; mais on peut répondre, je crois que, très probablement pour la mieux faire accepter en dehors de l'Égypte, on lui aura, dès l'origine, attribué une antiquité fabuleuse ; on l'aura, par exemple, mise sous le patronage du nom de Palamède auquel la tradition attribuait déjà l'invention du calcul et celle d'une partie au moins de l'alphabet.

M. Gow a été un peu moins heureux, je crois, pour quelques autres conjectures. Ainsi il recherche l'origine chez les Aryens des noms de nombre de *un* à *dix*, dont les radicaux sont communs à toutes les nations indo-européennes, tandis qu'ils diffèrent pour les noms au delà de *cent*. Il fait la remarque très juste que les trois ou quatre premiers noms de nombre sont des adjectifs déclinables dans les langues à flexion ; les suivants sont au contraire des noms neutres indéclinables ; cette différence indique un stade dans l'invention ; nos ancêtres n'auront pendant longtemps compté que jusqu'à *quatre*, et l'on peut dès lors espérer, dans une certaine mesure, résoudre l'énigme pour les noms de *cinq* à *dix*.

Depuis longtemps, on avait essayé de rapprocher ces deux derniers noms de radicaux signifiant pour l'un « une main », pour l'autre « les doigts ». M. Gow semble préférer indiquer, pour *dix*, « la main droite » (dexter, δεξίος); d'autre part, il suppose que les

---

(¹) Analysé par Pappus au Livre II de la *Collection mathématique*.

(²) Je rappelle que les manuscrits de Rhabdas (XIVe siècle) attribuent nommément à Palamède des Tables d'addition et de multiplication pour le système alphabétique.

noms *six* à *neuf* ont été originairement ceux des doigts de la main droite. D'après les étymologies plus ou moins audacieuses qu'il propose, l'ordre aurait été celui de l'auriculaire à l'index; mais il peut tout aussi bien avoir procédé de l'annulaire au pouce. C'est dire assez que, comme M. Gow en convient lui-même, sa conjecture ne reçoit aucune confirmation *a posteriori* et que l'on peut tout au plus la qualifier de probable *a priori,* par analogie avec les usages actuels des peuples sauvages, dans les langues desquels il y a liaison évidente entre les noms de nombre et l'emploi des doigts pour la numération.

Si ingénieuse que soit la tentative de M. Gow, elle prête sans contredit à de graves objections ; l'analogie indiquée ne permet pas de conclure; car, si nos ancêtres aryens ont probablement passé par des étapes intellectuelles analogues à celles que n'ont pas franchies les sauvages modernes, rien ne prouve que l'évolution de leur esprit ait été absolument identique; il est même à présumer qu'elle a présenté quelques différences, précisément parce qu'elle n'a pas avorté.

Il faudrait au moins pouvoir proposer une explication semblable pour les noms de nombres sémitiques, qui ont, au reste, peut-être été formés avant leurs correspondants aryens. Dans ce cas, il y aurait une véritable analogie; mais le succès d'une tentative dans ce sens est passablement improbable.

On peut aussi observer que si les Aryens ont passé par la numération quinaire, *dix,* qui peut-être signifie seulement deux fois cinq, a dû être dénommé bien avant les nombres de *six* à *neuf;* et ceux-ci ont pu très bien être recomptés, à une certaine époque, sur la main gauche, comme les cinq premiers. En tout cas, il est improbable que nos ancêtres aient eu des noms différents pour les doigts correspondants des deux mains, et même, en supposant l'habitude originaire d'énoncer le nom du dernier doigt mis en mouvement en même temps que le geste était fait, on ne voit pas bien comment la désignation du doigt, sans celle de la main, a pu passer au nombre.

Un fait assez singulier a sans doute été remarqué, mais n'a guère été relevé, parce qu'en tout état de cause il est assez inexplicable. Les radicaux sémitiques pour *six* et *sept* sont presque identiques aux radicaux aryens, tandis que pour les autres noms de nombre il n'y a aucune analogie.

Il n'y a pas une ressemblance moins frappante, pour chaque langue aryenne en particulier, entre le nom de nombre *neuf* et l'adjectif qui signifie *nouveau*. Y a-t-il quelque rapport entre cette ressemblance et le compte des jours de la Lune, qui doit remonter à une très haute antiquité?

Je pose ces questions, non pas pour proposer ou suggérer une solution, mais pour montrer que le problème reste et doit rester ouvert.

J'en dirai autant au sujet d'une autre origine que M. Gow cherche également à élucider, celle du signe qui, dans Diophante, représente le nombre (inconnu), et qui, dans les éditions de Bachet et de S. Fermat, est figuré par le ς grec final.

M. Gow croit qu'il dérive d'un signe hiératique égyptien et notamment le considère comme pratiquement identique avec un caractère qui représente l'hiéroglyphe d'un rouleau de papyrus et se trouve d'ailleurs employé dans l'écriture hiératique, soit comme simple déterminatif, soit pour signifier un « total ». Le signe du *moins* dans Diophante aurait une origine semblable; enfin ces deux conjectures sont reliées à la thèse déjà vieillie de Hankel, qui ne voulait accorder aux Grecs aucune aptitude pour les calculs arithmétiques ou algébriques. Les anciens qui ont fait quelques progrès dans ce sens auraient bien reçu la culture hellène, mais seraient tous en réalité de race sémitique, même Héron, dont le nom signifie « ingénieur » en égyptien ([1]).

M. Léon Rodet avait déjà fait ([2]) des rapprochements analogues entre le signe de l'*inconnue* et du *moins* chez Diophante, d'une part, et de l'autre, certains caractères hiératiques ou démotiques, mais mon savant ami est le premier à reconnaître que des rapprochements de ce genre ne sont nullement démonstratifs, et, en effet, la question ne peut être tranchée ainsi sur deux signes; elle n'a pas d'ailleurs un caractère essentiellement mathématique.

Les Grecs ont employé comme abréviations dans leur écriture, et cela à toutes les époques, des signes qui sont tantôt des signes

---

([1]) Vincent (*Not. et extr. des mss.*, vol. XIX, p. 163). Ceci est une pure rêverie : car le nom de Héron est bien aussi grec que celui de Dion.

([2]) *Sur les notations numériques et algébriques antérieurement au* XVI*e siècle* (*Journal asiatique*, 1881.)

tachygraphiques plus ou moins reconnaissables ([1]), tantôt des symboles idéographiques très clairs : ainsi un rond avec un point au milieu pour désigner un cercle; tantôt enfin des caractères dont l'origine nous échappe et dont la signification nous apparaît comme purement conventionnelle. Les signes de Diophante sont simplement de telles abréviations, qu'on les range d'ailleurs, soit dans la première, soit dans la troisième catégorie.

Il serait évidemment intéressant de rechercher si les copistes grecs, dans le choix de ces abréviations en général, n'ont pas été influencés par la connaissance de symboles hiéroglyphiques ou de caractères égyptiens, hiératiques ou démotiques. Si cette influence était bien démontrée pour un nombre suffisant de symboles grecs, on pourrait l'admettre légitimement pour ceux dont l'origine est douteuse, mais la démonstration n'est ni faite, ni facile à faire; si l'on rencontre quelques analogies qui frappent, on trouve aussi de notables divergences.

Si d'ailleurs il y a quelque ressemblance entre le caractère hiératique indiqué par M. Gow et le ς grec final (ou plutôt avec une des formes du symbole grec représentant $\frac{1}{2}$), le rapprochement est illusoire; car, en réalité, on ignore quel était le signe employé par Diophante; les manuscrits connus de cet auteur sont tous de date récente et l'on rencontre, parfois dans le même, les formes les plus diverses, depuis l'S majuscule, jusqu'à l'*y* italique; d'autres formes encore plus divergentes se trouvent dans l'Euclide d'Oxford ([2]) (daté de 888) et dans les manuscrits d'autres auteurs; chez ces derniers, la plus fréquente est un cercle (parfois avec un point au centre), de la partie inférieure duquel part un trait sinueux.

On voit que la question réclame de très longues recherches et de minutieuses discussions. Pour le signe du *moins*, M. Gow aurait dû remarquer, comme l'avait déjà fait M. Léon Rodet, que la forme donnée par Bachet ne correspond nullement à la description de Diophante qui se rapporte à l'écriture onciale; dans les manuscrits,

---

([1]) Ainsi, ceux donnés par Brugsch, d'après les papyrus grecs, pour l'addition et la soustraction et reproduits page 48 par M. Gow.

([2]) La plus compliquée semble bien être un sigle tachygraphique: les autres ont pu en dériver par simplification.

les formes se ramènent à deux ; l'une qui est nettement un λ, c'est-à-dire l'initiale du mot λεῖψις ; l'autre, la plus ancienne, et qui est bien celle qu'indiquait Diophante, est un Λ majuscule avec une verticale partant du sommet de l'angle et descendant à la même hauteur que les obliques. C'est très probablement un sigle tachygraphique.

Ce signe, de même que tous les autres de Diophante, se trouve parfaitement dans les manuscrits employé comme simple abréviation (¹) en dehors de sa signification technique. En disant le contraire, M. Gow s'est laissé tromper, comme sur nombre d'autres points, par les éditions. Bachet n'a, pour les abréviations, guère suivi que sa fantaisie ; comme d'ailleurs, sur ce point, les manuscrits n'offrent entre eux aucune concordance, il est assez excusable, eu égard surtout aux habitudes de son époque. Sans doute il ne s'imaginait guère qu'on voudrait déduire de son texte des règles relatives aux notations de Diophante ; en tout cas, les remarques minutieuses faites sur cette question par M. Gow sont malheureusement sans valeur, par suite des libertés que Bachet s'est permises.

Je crois avoir suffisamment montré que pour les deux signes de Diophante, qui n'apparaissent pas immédiatement comme des abréviations ordinaires, la question de l'origine reste au moins douteuse ; mais eussent-ils été empruntés aux caractères égyptiens, la thèse de Hankel n'en devrait recevoir aucun appui. Certes, si l'Algèbre consistait dans l'emploi de signes idéographiques, le scribe Ahmès, qui a copié le papyrus mathématique déchiffré par Eisenlohr, devrait être mis bien au-dessus de n'importe quel algébriste arabe (²). Mais, avant de symboliser une opération, il faut en avoir un concept précis, et ce sont bien certainement les Grecs qui ont les premiers conçu clairement la multiplication, la division et l'extraction de la racine. Ils y sont arrivés par l'intermédiaire de la Géométrie ; mais n'était-ce pas nécessaire en raison de l'introduction des quantités incommensurables dans la Science ?

Il va sans dire que je n'admets nullement ce qu'affirme M. Gow p. 51.

« Les Grecs n'avaient pas de nom pour désigner le quotient et

---

(¹) Non seulement d'ailleurs du substantif λεῖψις, mais encore du participe λείψας.

(²) Si les Arabes ont eu des notations algébriques, elles ont généralement disparu des manuscrits.

ne concevaient pas le résultat de la division comme nous. Pour un Grec 5 n'était pas le quotient de $\frac{35}{7}$. L'opération ne consistait pas à découvrir le fait que 5 fois 7 font 35, mais que la septième partie de 35 contient 5, et ainsi généralement en grec une division n'est pas posée dans la forme: Divise a par b, mais dans la forme : Trouve la $b^{\text{ième}}$ partie de a. »

Les Grecs ont en fait pour le quotient un mot tout spécial qui est παραβολή (Diophante, etc.), correspondant à l'expression παραβάλλειν παρά (diviser par). Proprement il s'agit de l'opération par laquelle, connaissant l'aire d'un rectangle et l'un des côtés, on détermine l'autre côté; c'est donc bien tout à fait en Arithmétique l'opération inverse de la multiplication (Cf. Proclus, p. 420).

Les Grecs disaient également μερίζειν παρά (proprement diviser par); l'expression μερίζειν εἰς (diviser en parties), qui correspond au sens indiqué par M. Gow, se trouve encore, mais n'est pas classique. Les Grecs n'ont pas à la vérité de terme correspondant pour désigner le quotient, pas plus qu'ils n'en ont pour désigner le produit de la multiplication; ils disaient ὁ γενόμενος (ἀριθμὸς) ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ou ἐκ τοῦ μερισμοῦ, le résultat de la multiplication ou de la division. Chez les Byzantins, on trouve abusivement πολλαπλασιασμός et μερισμός pour produit et quotient.

On peut remarquer que les Grecs employaient des prépositions différentes pour les deux opérations, ἐπί pour la multiplication, παρά pour la division; ils pouvaient donc les employer sans verbes pour désigner l'opération d'une façon abrégée, comme nous, lorsque nous recourons aux symboles.

Le seul point à concéder à M. Gow est que, pour les nombres simples, les Grecs disaient plus volontiers : Prends la moitié, le tiers, le quart, etc., que : Divise par 2, 3, 4, etc.

J'arrête ici ces critiques, que d'ailleurs je n'ai cru devoir formuler que parce qu'en somme M. Gow a fait un bon Livre; il faut sans doute ne pas s'y fier aveuglément, mais il en est de même, hélas! de toutes les histoires des Mathématiques, et au moins ce n'est pas de ces ouvrages où les erreurs sont plus nombreuses que les pages et lasseraient celui qui voudrait les relever. J'ajoute qu'il est très complet et qu'on y trouve, bien condensés, quantité de renseignements qu'on aurait difficilement ailleurs.

PAUL TANNERY.

RAUSENBERGER (O.) — Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen einer Variabeln. Mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Discontinuitätspunkte nebst einer Einleitung in die allgemeine Functionentheorie, 476 p. in-8°. Leipzig, 1884.

Le Livre de M. Rausenberger commence par une assez longue introduction où sont développés les principes de la théorie des fonctions d'une variable complexe; cette exposition est faite, en général, dans le sens de la doctrine de M. Weierstrass, mais avec un moindre souci de la rigueur. Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter un coup d'œil sur la démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre, qu'a adoptée l'auteur.

Entrant ensuite dans son véritable sujet, M. Rausenberger pose ce problème : Étant donnée une fonction $\theta(x)$, trouver les fonctions $f(x)$ qui jouissent de la propriété

$$f[\theta(x)] = f(x).$$

On peut donner à ces fonctions le nom de *fonctions périodiques* en étendant le sens du mot *périodicité*. Il rapproche d'une façon ingénieuse cette notion de celle qui a conduit Abel à la considération de cette classe d'équations algébriques auxquelles on a donné son nom et, d'un autre côté, montre comment la recherche des fonctions périodiques généralisées se rattache à la recherche des fonctions qui ont un théorème fonctionnel, c'est-à-dire pour lesquelles il existe une relation de la forme

$$f[\varphi(x,y)] = \psi[f(x), f(y)],$$

φ et ψ désignant des fonctions algébriques; si, en effet, une fonction uniforme transcendante $f(x)$ satisfait à une équation de cette forme, elle est périodique.

L'étude de la périodicité *linéaire*, pour laquelle on a

$$\theta(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

se ramène facilement à l'étude de trois types normaux

$$\theta(x) = x + 1,$$
$$\theta(x) = px, \quad \text{avec} \quad |p| < 1$$
$$\theta(x) = px, \quad \text{avec} \quad p^n = 1.$$

Les fonctions périodiques du premier type (à période additive) ont au moins le point ∞ pour point singulier essentiel, les fonctions périodiques du second type (à période multiplicatrice) ont au moins le point o et le point ∞ pour points singuliers essentiels. L'étude des fonctions du premier type conduit aux fonctions exponentielles, trigonométriques, logarithmiques, auxquelles l'auteur consacre une cinquantaine de pages.

Pour les fonctions périodiques du second type, l'exemple le plus simple, et qui se présente comme de lui-même, est donné par la fonction

$$\varepsilon(p, x) = (1+x)(1+px)(1+p^2x)\ldots\left(1+\frac{p}{x}\right)\left(1+\frac{p^2}{x}\right)\left(1+\frac{p^3}{x}\right)\cdots$$

Cette fonction conduit elle-même immédiatement à la série bien connue

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} p^{n^2} x^n;$$

le lieu avec la théorie des transcendantes elliptiques est manifeste : celles-ci se trouvent ainsi introduites d'une façon assez naturelle et, de fait, M. Rausenberger développe, au lieu de la théorie de ces transcendantes, la théorie de celles qu'on en déduirait en remplaçant l'argument x par $\frac{2K}{i\pi}\log x$, en sorte que la seconde période devienne multiplicatrice au lieu d'être additive; les formules qui correspondent aux formules classiques de la théorie des fonctions elliptiques ont une apparence plus simple, à cause de l'habitude qu'ont les typographes de supprimer le signe de la multiplication. De là l'auteur passe à l'étude des fonctions doublement périodiques dans le sens ordinaire du mot. L'étude des fonctions modulaires, c'est-à-dire des fonctions qui ne sont pas altérées par le *groupe* de périodes contenues dans la formule

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

où a, b, c, d sont des nombres entiers qui vérifient l'égalité

$$ad - bc = 1,$$

rentre naturellement dans son cadre; l'auteur, voulant rester strictement élémentaire, n'a pu qu'introduire ces fonctions, en mon-

trant comment elles se présentaient nécessairement dans l'étude des transcendantes elliptiques. Deux Chapitres sont ensuite consacrés aux équations modulaires et aux équations au multiplicateur. Les deux Chapitres suivants se rapportent à ce que M. Rausenberger appelle les fonctions périodiques de seconde et de troisième espèce; les premières satisfont à une ou plusieurs équations de la forme

$$F[\varphi(x)] = \psi[F(x)],$$

où φ et ψ désignent des fonctions algébriques; il y a quatre types de telles fonctions avec un nombre fini de points singuliers essentiels, définis par les équations suivantes :

$$\text{(I)} \qquad F(px) = qF(x), \quad |p| < 1,$$

$$\text{(II)} \qquad F(px) = 1 + F(x), \quad |p| < 1,$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} F(x+1) = F(x), \\ F(x+n) = qF(x), \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} F(x+1) = F(x), \\ F(x+n) = 1 + F(x). \end{cases}$$

Les fonctions périodiques de troisième espèce satisfont à une équation de la forme

$$F[\varepsilon(x)] = \zeta[x, F(x)]$$

où ε désigne une fonction linéaire, et ζ une fonction rationnelle; il y a lieu de considérer les cinq types suivants :

$$\text{(I)} \qquad F(x+1) = \frac{1}{x^k} + F(x),$$

$$\text{(II)} \qquad F(x+1) = xF(x),$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(III)} & F(px) = \dfrac{1}{(x+1)^k} + F(x), \\ \text{(IV)} & F(px) = (x+1)F(x), \\ \text{(V)} & F(px) = xF(x). \end{array}\right\} \; |p| < 1.$$

Enfin un dernier et court Chapitre se rapporte à l'intégration des fonctions algébriques. J. T.

ANGELO GENOCCHI. — Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale. — Pubblicato con aggiunte dal Dr Giuseppe Peano. — Torino, 1884.

Le nom de M. Genocchi, qui figure en tête de ce Livre, est à lui seul une recommandation suffisante. C'est en effet le Cours professé par cet excellent géomètre à l'Université de Turin que M. Peano s'est chargé de publier, avec les modifications et les additions qu'il convient de faire subir à une œuvre de ce genre, quand, de la forme orale, on entreprend de la faire passer à la forme du livre. On retrouve en général, dans cet Ouvrage, ce souci de la partie philosophique et cette rigueur qui distinguent les écrits de M. Genocchi, et dont M. Peano s'est heureusement et fidèlement inspiré, reproduisant bien ainsi l'esprit du Cours du savant professeur.

Sans entrer dans les détails abondants qui rendent si instructive la lecture du Traité de M. Hoüel, l'auteur se préoccupe de l'origine des notions que l'on rencontre au début des Mathématiques. C'est ainsi, par exemple, qu'il éclaire le concept des nombres commensurables ou incommensurables, définissant ces derniers à la manière des Allemands et en particulier de Dedekind, en employant la division de la totalité des nombres commensurables en deux classes, tout nombre de l'une étant inférieur à tout nombre de l'autre. De même encore, dans des Notes nombreuses placées en tête du Livre, il précise les conditions exactes sous lesquelles sont applicables certains théorèmes qu'il démontre dans le courant de l'Ouvrage : en un mot, il recherche surtout la précision, soit dans les énoncés, soit dans les démonstrations. On aime à voir ces notions bien définies se substituer dans l'enseignement aux notions trop vagues que l'on y rencontre parfois. Mais justement à cause de l'esprit de précision qui règne dans ce Livre, il est permis de s'étonner que l'auteur n'ait pas cru devoir y mentionner les théorèmes classiques sur les limites des sommes et des rapports d'infiniment petits, et qui sont le fondement même de la méthode infinitésimale. Sans doute les aura-t-il réservés pour le second Volume, où ils figureraient en tête des applications géométriques : mais ne vaudrait-il pas mieux avoir acquis ces notions avant de parler des différentielles des fonctions et des intégrales ?

Nous venons de dire qu'un seul Volume a paru jusqu'à présent,

contenant le Calcul différentiel et ses applications analytiques, ainsi que les commencements du Calcul intégral.

Les deux premiers Chapitres traitent des fonctions en général, de leurs limites et de leurs dérivées. L'auteur introduit avec raison la notion de limite supérieure ou inférieure qui est si utile pour l'étude des fonctions d'une variable réelle. Il énonce explicitement les théorèmes sur les limites et définit la continuité au moyen de ces théorèmes. De nombreux exercices, souvent traités en entier et choisis de manière à compléter le Cours, terminent chaque Chapitre et sont pour l'étudiant une ressource précieuse.

Le troisième Chapitre contient la théorie élémentaire des séries. Nous y remarquons d'ingénieuses démonstrations pour la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^\lambda}$, ainsi que pour les cas limites de la série du binôme. Cependant certaines règles de convergence importantes ne sont pas mentionnées : par exemple, celles de Duhamel et de Gauss. Les produits infinis ne sont pas oubliés et donnent lieu à d'intéressants exercices.

Après quelques considérations générales sur les fonctions de plusieurs variables réelles, qui commencent le quatrième Chapitre, nous arrivons aux fonctions implicites d'une ou plusieurs variables, définies par une ou plusieurs équations. L'auteur montre d'abord que, sous certaines conditions de continuité bien précises, si l'équation $f(x_0, y) = 0$ admet une racine réelle y_0, il existe une fonction y, continue, ayant une dérivée, se réduisant à y_0 pour $x = x_0$ et vérifiant l'équation $f(x, y) = 0$. Bien que cette démonstration ne soit pas générale, puisqu'elle se borne au cas des valeurs réelles, c'est déjà un grand progrès sur ce que l'on fait dans la plupart des cours élémentaires, où l'on admet la proposition et l'on doit en savoir gré à M. Peano, qui étend d'ailleurs la démonstration au cas de plusieurs variables.

Ces considérations terminent l'étude du Calcul différentiel proprement dit; nous en trouvons les applications analytiques dans les deux Chapitres suivants, où figurent entre autres choses l'étude des cas d'indétermination pour les fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles, et les premières notions, très élémentaires d'ailleurs, sur les variables complexes et les séries ordonnées suivant les puissances d'une variable.

Les applications géométriques étant réservées pour le second Volume, l'auteur aborde, dans les deux derniers Chapitres, la définition des intégrales, rendue bien précise grâce à la notion de limite supérieure et inférieure introduite au commencement du Livre; il donne les règles usuelles d'intégration et termine par l'étude de quelques intégrales définies et des fonctions eulériennes.

En résumé, ce Livre, nous en avons la conviction, est destiné à rendre de grands services aux étudiants italiens, et nous souhaitons vivement que M. Peano ne fasse pas attendre trop longtemps la publication du second Volume d'un Ouvrage conçu dans un esprit aussi moderne et aussi scientifique. A. Paraf.

MÉLANGES.

ESQUISSE HISTORIQUE SUR LA MARCHE DU DÉVELOPPEMENT DE LA NOUVELLE GÉOMÉTRIE [1];

Par Hermann HANKEL.
(Traduction de M. Dewulf, colonel du Génie).

Parmi les Sciences mathématiques, la *Géométrie moderne* est une des plus récentes : elle n'a guère plus de cinquante ans d'âge. Rien ne peut mieux faire connaître son caractère propre que de la comparer à la Géométrie des anciens et de chercher de quelle manière elle est historiquement sortie de celle-ci. A cet effet, il sera nécessaire de reprendre les choses d'un peu haut.

La Géométrie des anciens, telle qu'elle fut développée par Pythagore et par Platon, dont Euclide forma un ensemble rigoureux, et qui célébra son triomphe le plus éclatant dans Archimède et Apollonius, se présente à nos yeux comme un tableau nettement dessiné. Chacun admire la clarté et la netteté des conceptions, la rigueur des déductions dans leur enchaînement, la simplicité dans la re-

[1] Cette étude historique sert d'introduction au *Traité élémentaire de Géométrie projective* de Hankel (*Die Elemente der projectivischen Geometrie in syntetischer Behandlung*. Vorlesungen von Dr Hermann Hankel. Leipzig, 1875. Une analyse de cet Ouvrage a été donnée (*Bulletin*, p. 51; 1877).

présentation qui sont l'apanage de l'ancienne Géométrie et qui en font depuis les temps les plus reculés la matière pédagogique la plus propre à l'éducation sévère de la pensée. Mais ceux qui ont étudié les Mathématiques grecques dans leurs sources n'ont pas manqué d'être frappés de leurs défauts, qui sont également caractéristiques. C'est avec raison qu'on a évité, autant que possible, ces défauts dans les Traités de Géométrie élémentaire modernes. Les anciens ne connaissent d'autre développement que celui qui procède *synthétiquement* d'une vérité à une autre, du simple au composé; ils manquent de principes *généraux*, de méthodes *générales*. Ils ont une prédilection marquée pour tout ce qui est spécial et pour la plus étroite délimitation des idées. Aucun géomètre ancien n'a observé, par exemple, que l'angle formé par deux droites n'est pas *unique* en réalité, mais qu'il y a *deux angles* qui peuvent être regardés, au même titre, comme donnant la mesure de l'inclinaison réciproque de deux droites. Autre exemple : si l'on se propose de diviser un segment de droite AB suivant une certaine loi au point C, la construction prise dans toute sa généralité ne donne pas seulement un point C situé entre A et B, mais aussi un point C′ en dehors du segment AB; cependant le géomètre grec néglige d'emblée le dernier point, et, par exemple, dans la division en moyenne et extrême raison il considère le point C comme donnant seul la solution du problème; même, s'il porte son attention sur le point C′, il le considère comme la solution d'un problème différent du problème proposé, bien qu'ayant avec lui une certaine connexité.

Tous les cas différents possibles dans un problème, relativement à la position des lignes données ou cherchées, fournissaient au géomètre grec autant de problèmes ou de théorèmes divers, et les plus grands mathématiciens de l'antiquité croyaient ne pouvoir se dispenser de traiter, dans leurs écrits, avec la même minutie, la même exactitude et indépendamment les uns des autres, tous les cas imaginables et souvent assez nombreux. Ainsi, dans le célèbre ouvrage d'Apollonius, Περὶ λόγου ἀποτομῆς (*De sectione rationis*), le même problème se trouve divisé en quatre-vingts cas environ, qui ne se distinguent que par la diversité de position.

Aussi il ne vient jamais à la pensée d'un géomètre grec de développer ni même d'indiquer une méthode générale permettant de traiter ces différents cas, au moins dans leur partie essentielle,

ni de déduire de données concrètes un résultat général; tout au plus, trouve-t-on à la fin une maigre récapitulation, où l'on fait observer que le problème est résoluble dans les conditions données dans tous les cas imaginables, comme cela résulte de ce qui précède.

Ainsi la Géométrie ancienne sacrifie à une simplicité apparente la vraie simplicité qui consiste dans l'unité des principes; elle ne parvient qu'à une triviale évidence sensible, au détriment de la notion de la dépendance réciproque des formes géométriques dans tous leurs échanges et dans les variations de leurs positions réellement représentables.

La grande modification que les Mathématiques devaient subir sous ce rapport chez les peuples civilisés de l'époque moderne se fait sentir, d'une manière bien nette, dès le premier moment où, vers la fin du xve siècle, les Mathématiques prirent un nouvel essor. Les résultats furent d'abord insignifiants, il est vrai, mais on aperçoit dès lors une tendance vers la généralisation de la méthode, même aux dépens de la précision, vers la déduction analytique des cas particuliers d'un cas général, même au prix de la rigueur, et vers la réunion de cas différents sous un point de vue unique, même quand l'évidence devait en souffrir. Toutes ces tendances pouvaient s'affirmer librement dans le champ de l'Arithmétique et de l'Algèbre où les anciens n'avaient laissé aucun essai ou, pour mieux dire, n'avaient laissé que des essais qui n'étaient pas en opposition avec cette nouvelle manière de faire.

Il en était autrement pour la Géométrie; ici les mathématiciens de la Renaissance trouvaient devant eux une série d'œuvres magistrales des Grecs; c'était comme un monument achevé et parfait auquel on ne pouvait toucher ni pour y ajouter une pierre, ni pour en arracher une. La vénération que l'on avait pour ces travaux était sans bornes, on les étudiait et on les commentait avec un soin infini; mais la conviction que, dans la voie tracée par les anciens, il était impossible de lutter avec eux ne cessait de devenir plus profonde.

On chercha, dès lors, à y arriver par un chemin différent. On assujettit les objets de la Géométrie, considérés comme *grandeurs*, au calcul algébrique; ce fut le grand philosophe du xviie siècle, *Descartes*, qui, après avoir introduit dans la Science la notion des

grandeurs variables, parvint à représenter par des formules et à soumettre au calcul la nature même des courbes. On donne le nom de *Géométrie analytique* à cette méthode que Descartes fit connaître en 1637, soit parce qu'elle suivait réellement la voie analytique (dans le sens de la logique) en opposition avec la voie synthétique de la Géométrie des anciens, soit parce qu'alors on avait déjà pris l'habitude de nommer Analyse le calcul des grandeurs générales.

De cette Géométrie analytique naquirent de nouveaux problèmes dont les anciens avaient, à la vérité, trouvé des solutions particulières dans des cas spéciaux, mais qui se présentaient maintenant dans toute leur généralité : le problème de mener des tangentes à une courbe analytiquement déterminée, de trouver leurs aires, etc. Ce fut réellement dans l'Analyse infinitésimale, découverte à la fin du XVIIe siècle, et par une voie complètement étrangère à la Géométrie, que ces problèmes trouvèrent leur solution. La nouvelle science, l'Analyse, totalement différente des sciences anciennes, appela naturellement sur elle l'attention de tous les grands esprits. Ce ne fut plus que rarement et, pour ainsi dire, en passant que l'on vit çà et là un géomètre de talent s'occuper de recherches purement géométriques. Au XVIIIe siècle, la méthode géométrique était si abandonnée que l'on se croyait obligé de démontrer analytiquement les propositions établies par la Géométrie d'une manière simple et naturelle, afin de leur donner la véritable rigueur mathématique. On avait donné à ces démonstrations, souvent sans élégance ni simplicité, le nom de *démonstration en forme*. Même la Géométrie analytique, en dehors des simples applications de l'Analyse, ne fit que des progrès insignifiants. A ma connaissance, on n'a découvert, par son moyen, qu'un très petit nombre de propriétés purement géométriques de quelque importance. Sa méthode n'avait guère fait de progrès depuis Descartes; elle était encore employée, même dans l'Ouvrage d'un Euler (*Introductio in Anal. infin.*, t. II, 1748) et appliquée de préférence aux figures, en s'aidant tantôt de constructions, tantôt de calcul, et sa marche était alourdie par des éliminations compliquées. Cela explique comment on prit plaisir à exclure la Géométrie de son propre domaine, et pourquoi Lagrange se flattait d'avoir écrit un Traité de Mécanique sans y employer une seule figure. Son mérite, comparé à celui de ses prédécesseurs, était grand, mais *partiel*, comme toute cette tendance analytique.

La réaction ne pouvait se faire attendre; elle ne prit pas naissance cependant dans le sein de la Science, elle sortit des arts techniques. Les maîtres ès arts des siècles précédents avaient élevé leurs églises et leurs châteaux, creusé leurs ports et leurs canaux, appareillé leurs pierres et leurs charpentes, construit leurs navires et leurs machines, en suivant les antiques traditions, fruits d'une longue expérience transmise de famille en famille. Mais avec le XVIIe siècle avait commencé la décadence des métiers, et les traditions ne pouvaient plus suffire aux nouvelles exigences de l'industrie naissante et au sentiment révolutionnaire du XVIIIe siècle : il fallait les remplacer par quelque chose de rationnel, des procédés guidés par les méthodes de la Science. Dans ses travaux, l'artisan se sert du *trait,* il est plus habile à dessiner qu'à calculer; il ne pouvait et ne voulait se servir de la Géométrie analytique que le moins possible; il avait besoin d'une méthode plus directe.

Le progrès désiré naquit en *France,* pays qui, surtout à cette époque, était incontestablement à la tête du mouvement intellectuel de l'Europe. Ce fut le génie mathématique de *Monge* qui le fit sortir des essais isolés tentés avant lui; il créa la *Géométrie descriptive*, c'est-à-dire l'art de représenter sur un seul plan, au moyen de projections verticales et horizontales, suivant des règles générales et constantes, les figures entièrement définies des lignes, des surfaces et des corps de l'espace, et de déduire de ces représentations les relations géométriques qui résultent de leur forme et de leur situation relative. Cette nouvelle doctrine développée, pour la première fois en public, en 1794, à l'*École Normale,* puis à l'*École Polytechnique* nouvellement fondées à Paris, eut un succès grandiose et retentissant. Elle créa, pour la science géométrique, une notion inconnue jusqu'alors, celle de la *généralité* et de l'*élégance géométrique.*

« La Géométrie ancienne fourmille de figures »; ces figures sont couvertes de lettres qui, suivant l'antique usage, s'introduisant au fur et à mesure des constructions, sont employées dans l'ordre alphabétique. Le lecteur qui veut étudier un Ouvrage de Géométrie doit passer incessamment du texte à la figure pour tâcher de trouver dans le labyrinthe des lettres celle qu'il cherche. Dans ces écrits, le raisonnement est simple, il est vrai, mais sec et insipide. Comme le texte ne peut être compris sans la figure, on ne cherche pas à peindre, au moyen du texte seul, un tableau idéal où l'imagination

puisse voir l'objet géométrique dont il est question. Suivant l'exemple des anciens, on laissait de côté, dans les Ouvrages de Géométrie, toute transition d'un théorème à un autre, on dissimulait toute trace de leur enchaînement naturel et le lecteur était assailli d'une avalanche de propositions isolées, de proportions et de figures.

Dans l'Analyse on était habitué à une exposition différente, plus libre et plus vivante : *Euler* et *Lagrange* avaient créé ce que l'on nomme *élégance analytique;* leurs écrits et ceux de leurs successeurs avaient abandonné l'ancienne forme pédantesque pour lui substituer une exposition limpide et un développement continu qui attache partout le lecteur à l'idée dominante.

Il était nécessaire que la Géométrie fît le même progrès pour passer de l'étroit cabinet au vaste amphithéâtre et commencer une vie nouvelle. *Monge* lui fit faire ce pas; ses écrits sont de vrais modèles d'élégance, de limpide exposition, ils sont dégagés de tout l'attirail ancien. Ce fut lui, l'inventeur du dessin scientifique, qui chassa de la Géométrie ce fatras de figures, non parce qu'il négligeait, comme *Lagrange*, l'intuition géométrique, mais parce qu'il voulait la développer en faisant sortir de sa *description* une image idéale. Pour parvenir à ce résultat, il fallait enrichir le langage géométrique et se servir de tous les auxiliaires utiles. L'usage des lettres employées dans l'ordre alphabétique pour désigner tous les points empêchait d'embrasser les figures d'un coup d'œil; il fallait le remplacer par une description des figures qui permît de grouper clairement les lignes principales et de les désigner de telle manière que les lettres, venant en aide à la mémoire, rappelassent toujours la signification de l'objet géométrique; etc. En tout cela, *Monge* fut un maître. Par l'activité de son enseignement à l'École Polytechnique, qui brillait alors de son plus vif éclat, il fit pénétrer dans toute la France la distinction de sa méthode. Depuis ce temps, le style de ses écrits devint le modèle qui fut imité et presque atteint dans toute la littérature géométrique, tant il est vrai de dire que « le style de l'exposition est toujours très intimement lié à l'esprit des méthodes ».

La Géométrie est redevable à *Monge* et à ses disciples d'un second progrès non moins considérable. Par eux, elle s'éleva à une considération plus libre et plus générale des relations de situa-

tion des figures. Il est, en effet, dans la nature de la Géométrie descriptive d'être indifférente à la position du point d'intersection d'une droite AB par une autre droite, soit sur le segment AB, soit en dehors de ce segment; il suffit, en effet, de changer la position du corps à représenter par rapport aux deux plans de projection pour changer à volonté ces relations. Les droites parallèles apparurent alors, ainsi que le grand géomètre du XVIIe siècle, *Desargues* (mort à Lyon en 1661), l'avait déjà énoncé, comme ne différant pas, en réalité, des droites concourantes, mais comme des droites dont le point d'intersection s'est éloigné à l'infini. De plus les *imaginaires*, devenues familières depuis longtemps à l'*Analyse* et à l'*Algèbre*, ne furent plus un obstacle aux considérations géométriques; *Monge* les regardait comme une conséquence occasionnelle des relations accidentelles de situation qui n'ont aucune influence sur les propriétés essentielles des figures définies par une propriété permanente.

Considérons, par exemple, deux circonférences dans un plan : elles peuvent se couper ou ne pas se couper; dans le premier cas, il y a une droite (la corde commune) qui joint leurs points d'intersection; dans l'autre cas, les points d'intersection sont imaginaires, ce qui revient à dire qu'ils n'ont plus aucune signification géométrique sensible. On peut se demander s'il n'existe pas encore une droite qui correspond alors à la corde commune du premier cas. Pour répondre à cette question, il faut d'abord trouver une propriété de cette corde commune qui ne se lie pas immédiatement à ces deux points d'intersection. On peut, en effet, trouver une propriété de ce genre appartenant à tout point C de la droite. On a (*fig.* 1)

$$PA.PB = \overline{PT_1}^2 = \overline{PT_2}^2 = \overline{M_1P}^2 = \overline{M_1T_1}^2 = \overline{M_2P}^2 - \overline{M_2T_2}^2.$$

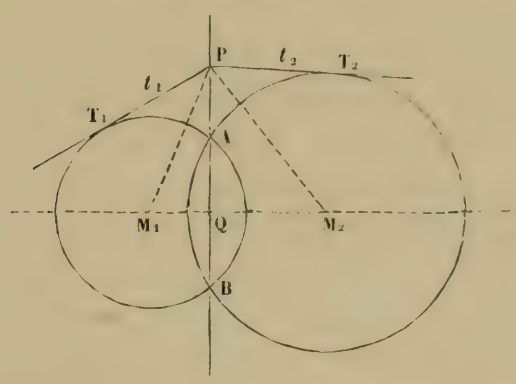
Voyons maintenant sur quelle ligne se trouvent les points P pour lesquels $PT_1 = PT_2$ quand les deux circonférences ne se coupent pas (*fig.* 2). Soit P un point tel que $t_1 = t_2$. Alors $x^2 - r_1^2 = y^2 - r_2^2$; si l'on abaisse du point P une perpendiculaire PQ sur M_1M_2, on déduit immédiatement, de $0 = t_1^2 - t_2^2$,

$$\overline{M_1Q}^2 - \overline{M_2Q}^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

et, réciproquement, cette relation est la condition d'égalité des

tangentes pour chacun des points de la droite PQ. Nous avons ainsi trouvé une droite qui reste toujours réelle, quelle que puisse être la situation relative de ces circonférences et qui a, avec elles, cette relation permanente que les tangentes aux deux circonférences issues de chacun de ses points ont toujours la même longueur. Dans le premier cas, cette droite passe par les deux points d'intersection; dans le dernier cas, nous continuerons à dire qu'elle renferme les deux points d'intersection imaginaires. On peut alors mener de chacun des points de cette droite des tangentes réelles aux deux circonférences: tandis que, dans le premier cas, on ne peut mener de tangentes réelles que des points situés en dehors des deux circonférences; on dit alors que les tangentes issues des points de la corde commune sont imaginaires, mais néanmoins

Fig. 1.



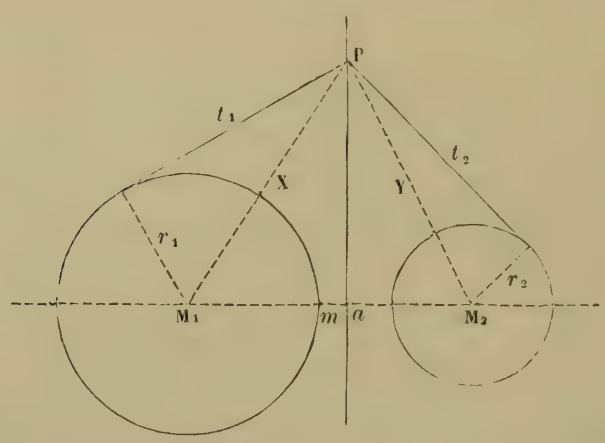
toujours égales. Ces considérations ont été exposées, pour la première fois, en 1815, par *Gaultier*, élève de *Monge;* il donna à cette droite le nom d'*axe radical*. Plus tard on l'a nommée aussi corde commune réelle ou idéale des deux circonférences, ou encore droite d'égale puissance, la puissance d'un point P par rapport à une circonférence M de rayon r étant la différence $\overline{MP}^2 - r^2$.

L'importance du principe que nous venons d'exposer ressortira pleinement de cette observation que les propriétés des droites d'égale puissance découvertes pour deux circonférences de position quelconque sont des propriétés générales de ces circonférences. Imaginons, par exemple, trois circonférences quelconques tracées dans un plan; supposons qu'elles ne se coupent pas, et construisons les droites d'égale puissance de ces circonférences prises deux à deux; ces trois droites se couperont en un même

point dont la puissance sera la même par rapport aux trois circonférences. Cela saute aux yeux immédiatement; puis on conclut de là que les trois cordes communes à trois circonférences qui se coupent concourent aussi en un même point, ce qui est d'une évidence moins spontanée, et ce qui paraît avoir échappé à tous les géomètres jusqu'au commencement du XIXe siècle.

Ainsi la Géométrie acquérait, dans tous les cas semblables, une liberté d'allures qui, examinée du point de vue des anciens géomètres, semblait compromettre au plus haut degré l'évidence et la solidité de la Géométrie. En effet, ce principe, désigné plus tard par *Poncelet* sous le nom de *principe de continuité,* parce qu'il réunit en un tout les divers cas concrets, ne peut pas être démontré géométriquement, l'imaginaire n'étant pas intuitif. C'est bien

Fig. 2.



plutôt un don fait par l'Analyse à la Géométrie pure; car, en Analyse, les grandeurs imaginaires se comportent dans tous les calculs comme des grandeurs réelles. Ce ne fut que l'habitude de considérer les grandeurs réelles et imaginaires comme jouissant des mêmes propriétés au point de vue analytique qui conduisit à ce principe qu'on n'eût jamais découvert sans la Géométrie analytique. La Géométrie pure fut ainsi indemnisée du dommage que lui avait causé la longue tyrannie de l'Analyse, et ce fut peut-être un avantage pour le champ de la Géométrie d'être resté si longtemps inculte pendant que celui de l'Analyse produisait de si riches moissons; les semences allaient s'y développer vigoureusement comme dans une terre vierge.

La Géométrie descriptive a pour objet de représenter sur un

plan les figures de l'espace, de déduire leurs propriétés géométriques de celles de leurs contours apparents et réciproquement.

De là devait naître l'observation spontanée que les contours sur un plan jouissent parfois de propriétés très intéressantes qui sont de simples conséquences de rapports entre les figures de l'espace à trois dimensions et dont la démonstration directe dans le plan est beaucoup plus compliquée. Ainsi, par exemple, il n'y a rien de plus facile que de déduire de la considération de la sphère les propriétés des lignes d'égale puissance que nous venons d'établir. Imaginons une sphère coupée par deux plans suivant deux circonférences C, C′. Prenons un point quelconque P sur l'intersection des deux plans, tirons de ce point toutes les tangentes possibles à la sphère; parmi ces tangentes se trouvent celles que l'on peut mener aux deux circonférences; toutes ces tangentes sont égales entre elles. Rabattons maintenant les deux plans l'un sur l'autre en les faisant tourner autour de leur droite d'intersection, nous obtenons ainsi une figure plane dans laquelle cette droite est celle d'égale puissance par rapport aux circonférences C, C′.

Le théorème des trois droites d'égale puissance, même dans le cas où les circonférences se coupent, est aussi évident lorsqu'on l'étend à l'espace : imaginons que l'on décrive, autour des centres des circonférences, des sphères dont ces courbes soient les équateurs; ces sphères se coupent deux à deux suivant une circonférence dont le plan est perpendiculaire au plan commun des équateurs et le coupe suivant la sécante commune aux deux circonférences.

Le plan qui renferme les points communs aux sphères I et II coupe celui qui renferme les points communs aux sphères II et III suivant une droite perpendiculaire au plan de l'équateur et qui passe par les points communs aux sphères I, II, III. Le plan d'intersection de I et III doit aussi passer par cette droite; en d'autres termes, les trois plans d'intersection passent par la même droite perpendiculaire au plan de l'équateur et les traces de ces plans sur celui de l'équateur passent par le pied de la commune intersection des trois plans. C. Q. F. D.

On voit déjà de quelle importance furent les travaux de *Monge* pour le développement de la Géométrie. L'étude des figures de l'espace, qui avait si longtemps cédé le pas à l'intérêt que l'on portait aux relations abstraites entre les grandeurs, s'éveillait avec une

nouvelle activité. *Monge* lui-même et la grande école fondée par lui enrichirent la Géométrie d'une suite de découvertes de la plus grande importance ; je n'en veux citer qu'une seule des plus connues et des plus élémentaires, celle de la génération de l'hyperboloïde et du paraboloïde hyperbolique par des lignes droites ; l'étude des surfaces du second ordre, qui étaient mal connues jusque-là, fut pour cette École un des principaux champs d'investigation.

Il est impossible d'exposer ici, même en partie, l'œuvre multiple de cette École, et de faire connaître nominativement tous les savants qui se formèrent pendant les quinze années du professorat de *Monge* à l'*École Polytechnique* (1795-1809) et devinrent ses continuateurs : Hachette, Charles Dupin, Brianchon, Malus, Gaultier, Biot, Lancret, etc. Poinsot porta la clarté géométrique de *Monge* dans la Mécanique ; il écrivit une Statique (1804) qui ne le cède en rien, pour l'élégance, à celle de Lagrange, mais qui est plus claire, plus simple, plus intuitive et qui a été d'une étude extrêmement fructueuse.

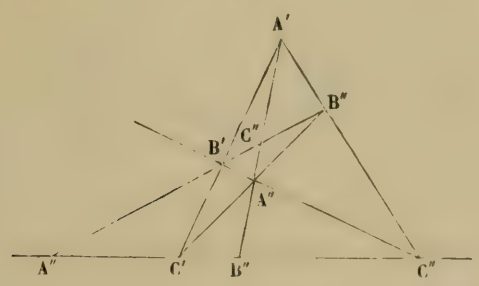
Je ne puis quitter *Monge* sans dire un mot de ses recherches d'un autre ordre qui firent aussi époque et par lesquelles il aida puissamment la nouvelle géométrie, sinon directement, du moins incidemment. *Monge* est aussi le père de la *Nouvelle Géométrie analytique*.

Quoiqu'il ait été précédé dans cette voie par quelques Mémoires de *Lagrange,* il a débarrassé la Géométrie analytique de la lourde confusion des théorèmes de l'ancienne Géométrie ; il fut le premier qui y appliqua méthodiquement les procédés purement analytiques, et qui montra comment, sans l'aide d'aucun autre théorème et par la *simple combinaison des équations des lignes,* on peut résoudre les problèmes de la Géométrie analytique d'une manière plus simple et plus élégante qu'en suivant l'ancienne marche. « En introduisant dans la Géométrie analytique l'*équation de la ligne droite,* Monge posa, pour ainsi dire, la règle fondamentale qui permit d'en bannir toute construction et lui donna la forme nouvelle qui rendit possible son développement ultérieur. » (Plucker, *Analytisch-geometrische Entwickelungen*, t. II, p. 4 ; Monge, *Application de l'Algèbre à la Géométrie,* 1805. *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie,* 1795. Extension générale de cette

nouvelle forme par les Ouvrages de Biot, *Traité analytique des courbes et des surfaces*, 1802; *Essai de Géométrie analytique*, 1805.)

A la même époque, une nouvelle voie fut ouverte à la Géométrie dans une direction différente, moins éloignée, il est vrai, de l'ancienne Géométrie que celle dont nous venons de parler, mais qui s'élève plus haut que toutes les autres. Monge et son École s'occupaient surtout des relations de *forme* et, en particulier, de celles des surfaces et des courbes de l'espace à trois dimensions, le seul, il faut le dire, qui fût accessible alors à la Géométrie. Par une sorte de contraste, *Carnot* traita spécialement, dans sa Géométrie de position (1803), les *relations de grandeur* des figures, et notam-

Fig. 3.



ment celles qui résultent de leur section par des transversales. Comme on le sait, la Géométrie ancienne s'occupait presque exclusivement des grandeurs géométriques; il ne faut donc pas s'étonner si *Carnot*, qui, comme beaucoup trop de ses compatriotes, ne possédait qu'un léger bagage de science mathématico-historique, découvrit, à nouveau, des théorèmes déjà connus de l'antiquité. Quoiqu'il y eût un certain mérite à raviver ces antiques vérités qui étaient tombées dans l'oubli, celui de *Carnot* ne se borna pas là; il enrichit la Science d'un grand nombre de nouveaux théorèmes de cette espèce auxquels il donna une forme applicable aux rapports de position les plus variés, par l'introduction du signe négatif. Il intitula sa Géométrie *Géométrie de position*, parce qu'il résolvait d'un seul coup tous les cas possibles. Ni le nom ni la méthode ne sont restés dans la Science et n'ont rien de commun avec ce que l'on nomme aujourd'hui *Géométrie de situation* (*der Lage*).

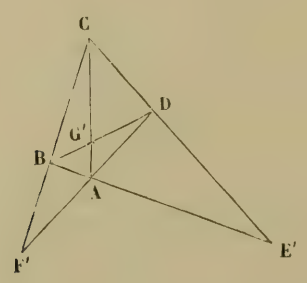
Il est impossible de ne pas rappeler ici que c'est à Carnot que

l'on doit l'introduction de la notion du *quadrilatère complet*. On comprend sous ce nom le système de quatre droites situées dans un plan et illimitées dans tous les sens ; chaque couple de sommets opposés détermine une diagonale : il y a donc trois diagonales qui se coupent en trois points.

Plus tard, on a reconnu qu'il était nécessaire de considérer aussi la notion du *quadrangle complet*. On comprend sous ce nom un système de quatre points A, B, C, D avec les six droites qui les joignent deux à deux, les côtés du quadrilatère. Chaque couple de côtés opposés détermine un point.

Ces deux notions proviennent de la généralisation de celle du quadrilatère simple, connu de l'ancienne Géométrie. Nous ren-

Fig. 4.



controns ici une de ces généralisations si caractéristiques de la Géométrie moderne et sans laquelle tout progrès était impossible.

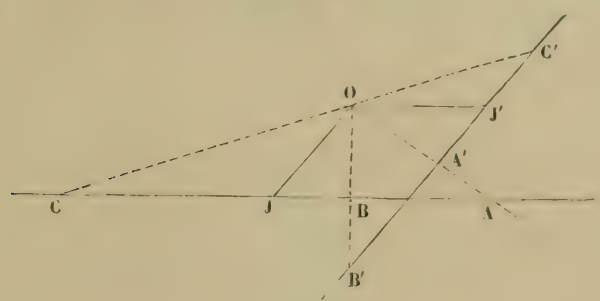
On peut, à juste titre, regarder l'époque de l'apparition de la Géométrie descriptive de Monge et de la Géométrie de position de Carnot comme celle de l'essor de la Géométrie ; mais l'origine de la *nouvelle Géométrie*, considérée comme nouvelle science, doit être fixée un peu plus tard. En effet, ces Ouvrages n'avaient fait autre chose que de débarrasser la Science des chaînes dont les Grecs l'avaient chargée, de ces chaînes qui n'entravaient peut-être pas les Grecs, si l'on tient compte de la nature propre du génie de ce peuple, mais qui pesaient lourdement sur la tendance si différente des nouveaux peuples européens et constituaient un obstacle insurmontable à tout progrès. Ils n'avaient développé aucune méthode nouvelle pouvant faire surgir spontanément, pour ainsi dire, toute une série de vérités inconnues, servir, comme la Géométrie analytique, à résoudre tous les problèmes d'un certain

groupe et se présenter à nos yeux comme l'expression caractéristique d'un véritable progrès scientifique.

Cette origine date bien plutôt d'un des derniers élèves de Monge, de l'officier du Génie *Poncelet* qui, étant prisonnier de guerre des Russes à Saratof (1812-1814), eut le loisir et la vigueur d'esprit nécessaires pour jeter les fondements de son célèbre Ouvrage *Traité des propriétés projectives des figures*, publié en 1822.

Le principe fondamental de cet Ouvrage, si extraordinairement riche en vérités nouvelles, consiste dans l'étude des propriétés des figures planes qui subsistent quand la figure subit une certaine

Fig. 5.



transformation ou projection, et qui, pour ce motif, sont désignées sous le nom de *propriétés projectives*. Cette projection est d'ailleurs différente de celle qui résulte de l'emploi de droites parallèles, comme celle de Monge et de la Géométrie descriptive : c'est la projection dite *projection centrale*, celle qui est particulière à la Perspective.

L'image perspective d'un objet solide ou plan s'obtient en supposant placé devant l'objet un tableau transparent sur lequel on trace les lignes et les points qui correspondent aux lignes et aux points de l'objet réel. Ainsi l'on trouve l'image perspective d'un objet en joignant tous ses points au point de vue O et en marquant les intersections de ces rayons projetants avec le plan du tableau.

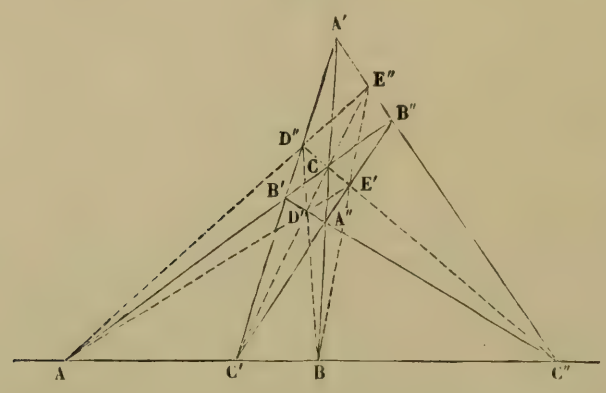
Bornons-nous à la représentation des figures planes ; supposons qu'elles soient situées dans un plan horizontal E, que le plan E′ du tableau soit oblique et que le point de vue O soit au-dessus de ces deux plans : A′ sera ainsi l'image de A, B′ celle de B. Aux points de l'horizon, c'est-à-dire aux points infiniment éloignés de E, correspond sur le plan du tableau E′ une droite unique J′ nommée *ligne de fuite*. C'est sur cette droite que se coupent les perspec-

tives de tous les systèmes de droites parallèles. Poncelet exprima ce fait d'une façon pittoresque en disant que *tous les points d'un plan situés à distance infinie sont sur une seule droite,* la droite à l'infini du plan. Les images de deux droites parallèles quelconques se coupent toujours sur la ligne de fuite J′; tous les points d'une certaine droite J située à distance finie du plan E se projettent à l'infini sur E′, etc.

Tous les points de la droite *s* d'intersection des deux plans, de l'*axe de projection,* se confondent avec leurs images, et toute droite du plan E se coupe, sur la droite *s*, avec son image sur E′.

Il existe une série de propriétés des figures qui subsistent dans les projections de celles-ci; ce sont leurs propriétés *descriptives,*

Fig. 6.



suivant le nom que *Poncelet* leur a donné, ou bien, suivant l'expression préférée aujourd'hui, celles qui ne dépendent que de la *situation* seule. Ainsi il saute aux yeux que, si trois droites se coupent en un même point, leurs perspectives se coupent aussi en un même point; que si trois ou un plus grand nombre de points d'une figure sont en ligne droite, leurs perspectives sont aussi en ligne droite, quoique leurs distances mutuelles soient différentes. On peut supposer, par exemple, que le point d'intersection de trois droites passe à l'infini, auquel cas ces droites sont parallèles, ou bien que, parmi les points d'une droite, un seul passe à l'infini, ou encore que tous s'éloignent à l'infini, ce qui transforme la figure générale en une figure particulière; ainsi, par exemple, il est toujours possible de projeter un quadrilatère quelconque suivant un parallélogramme, une conique quelconque suivant un cercle.

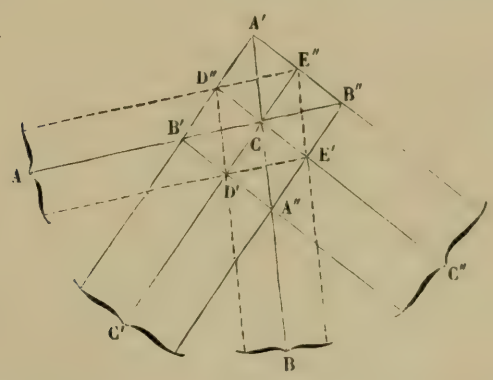
Poncelet a eu l'ingénieuse idée de se servir de cette remarque

pour en déduire les théorèmes relatifs à la situation. Les procédés les plus élémentaires permettent de démontrer un grand nombre de propositions relatives au parallélogramme et au cercle, absolument sans valeur pour ces figures, mais qui deviennent des théorèmes très importants par la projection.

Soient, par exemple, $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ les sommets opposés d'un quadrilatère complet; A, B, C les points d'intersection de ses diagonales. Tirons les droites CC', CC''; leurs intersections avec le quadrilatère nous donnent un quadrangle $E'E''D''D'$ dont nous allons chercher les propriétés.

Pour cela projetons le quadrilatère de manière à faire passer à l'infini ses deux sommets C', C''; ce quadrilatère se transforme

Fig. 7.



ainsi en un parallélogramme; les droites CC', CC'' deviennent parallèles à ses côtés, et $E'E''D''D'$ devient aussi un parallélogramme, c'est-à-dire que ses côtés se coupent à l'infini ou, en d'autres termes, sur la droite qui renferme déjà les points C', C''. De plus, les droites $D'E'$, $D''E''$ sont parallèles à CB' ou coupent cette droite en son point à l'infini; mais l'intersection de CB' avec la droite de l'infini n'est autre que le point A. On voit, de la même manière, que $D'D''$, $E'E''$ se coupent en B. Maintenant, si nous projetons de nouveau notre parallélogramme, nous aurons le théorème suivant.

Si l'on joint deux sommets opposés d'un quadrilatère complet au point d'intersection de ses diagonales, ces droites déterminent sur les côtés du quadrilatère un quadrangle dont les côtés opposés se coupent aux points d'intersection des diagonales du quadrilatère primitif.

Ce ne sont pas seulement les relations de situation qui ne s'al-

tèrent pas par la projection ; il existe aussi des relations de mesure qui jouissent de cette propriété. Un segment AB situé sur une droite change par la projection ; si trois points A, B, C sont sur une même droite, le rapport $\frac{AC}{CB}$ change aussi par la projection ; mais, si quatre points A, B, C, D donnés sont sur une même droite, il existe un certain rapport, nommé *double rapport* (rapport anharmonique ou projectif) qui conserve dans la projection la même valeur que dans la figure primitive ; par exemple, les projections de quatre points harmoniques sont harmoniques.

Il y a encore d'autres rapports de mesure qui ne sont pas altérés par la projection. Pour démontrer leur existence dans une figure donnée, *Poncelet* projette de nouveau cette figure, de manière à lui donner une forme plus simple où ce rapport se trouve facilement.

En fait, une nouvelle méthode géométrique permettant de découvrir et de développer une classe très étendue de propriétés des figures fut ainsi trouvée ; cette méthode, différente en ceci de la Géométrie descriptive doit être considérée comme une méthode purement géométrique ; elle ne s'appuie pas immédiatement comme celle des projections orthogonales, sur la représentation analytique. En effet, la représentation des formes de l'espace par des projections horizontales et verticales n'est autre chose que la traduction géométrique du procédé employé dans la Géométrie analytique pour déterminer ces mêmes formes au moyen de coordonnées. De même que les coordonnées dans la Géométrie analytique, les projections horizontale et verticale des figures se glissent toujours dans la Géométrie descriptive, comme des intermédiaires obligés parmi les figures qui doivent être étudiées en elles-mêmes.

La méthode de Poncelet, au contraire, considère directement les objets eux-mêmes, et l'on comprend ainsi comment la méthode des projections conduit à une si grande richesse de résultats nouveaux auxquels la Géométrie analytique serait parvenue difficilement par les moyens dont elle dispose encore aujourd'hui.

(*A suivre.*)

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOBEK. — Einleitung in die Theorie der elliptischen Funktionen. 1 vol. in-8°, 274 p.; Leipzig, 1884.

L'auteur commence par établir, dans une courte introduction, les premiers éléments de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire; on s'aperçoit de suite qu'il ne veut pas s'y attarder et qu'il s'attache à résumer brièvement les principaux faits de cette théorie plutôt qu'à en approfondir les principes, de façon à lui donner une base solide.

Dans la première Partie de son Livre, il traite des fonctions doublement périodiques : il introduit *a priori* les fonctions θ, établit les propriétés fondamentales des fonctions doublement périodiques par la considération de l'intégrale prise le long du parallélogramme des périodes, en suivant la voie ouverte par MM. Liouville, Hermite, Briot et Bouquet, introduit ensuite les fonctions sn, cn, dn, démontre les théorèmes d'addition pour ces fonctions et les fonctions θ et termine ce Chapitre en donnant la formule de décomposition en éléments simples, que l'on doit à M. Hermite.

La seconde Partie est consacrée aux intégrales elliptiques; on y trouvera l'étude de la surface de Riemann relative à la fonction $y=\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$, l'étude de la fonction de u définie par l'équation

$$u=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

la réduction à la forme normale, l'étude des intégrales de seconde et de troisième espèces, les théorèmes d'addition pour ces intégrales, l'application de la formule de M. Hermite à l'intégration des fonctions doublement périodiques; on remarquera en particulier, dans cette partie, l'exposition, d'après M. Weierstrass, d'une méthode pour le calcul de q au moyen de k.

Enfin le Livre se termine par l'intéressante application de la théorie des fonctions doublement périodiques à l'étude des courbes du troisième ordre. J. T.

MARX (W.). — Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Mit 11 lithographierten Tafeln; 1 vol. in-8°, Nuremberg, 1885.

Le Livre élémentaire que M. Marx nous offre aujourd'hui est la première Partie d'un Traité de perspective dont le second Volume, traitant de la perspective proprement dite, est actuellement sous presse.

Dans la Partie qui vient de paraître, se trouve exposée la méthode de Monge pour la représentation des figures de l'espace, au moyen de leurs projections sur deux plans rectangulaires. L'auteur s'est borné à ce qui, dans nos programmes, fait l'objet de l'enseignement dans les classes de Mathématiques élémentaires, en développant toutefois avec détails l'étude géométrique des polyèdres : son Livre est rendu vraiment pratique par le grand nombre d'intéressants exercices qui s'y trouvent proposés, ou même résolus. En le lisant, on voit que la Géométrie descriptive ne se borne pas à la seule représentation des corps, mais se prête également à la solution simple et effective de beaucoup de problèmes de Géométrie pure.

A. P.

MÉLANGES.

NIELS-HENRIK ABEL.

Tableau de sa vie et de son action scientifique, par C.-A. Bjerknes, professeur a l'Université de Christiania [1];

Par M. J. BERTRAND.

La théorie des fonctions elliptiques a reçu, dans la seconde moitié de l'année 1827, un accroissement considérable. La mine qu'on croyait épuisée révéla les filons les plus riches. Deux étudiants inconnus l'un à l'autre, l'un de vingt ans, l'autre de vingt-trois

[1] Traduction française revue et considérablement augmentée par l'auteur Paris, Gauthier-Villars, 1885, in-8°.

ans, Abel, de Christiania, et Jacobi, de Königsberg, signalèrent en même temps la voie nouvelle. Leurs publications sont presque de même date, leurs principes semblables, leurs génies égaux. Chacun d'eux a puisé aux sources et mérité la gloire d'inventeur; chacun, sans se soucier des questions de priorité, en retrempant son ardeur dans les découvertes de l'autre, y a puisé des forces nouvelles. On racontait en même temps que ni les méthodes, ni leurs conséquences tant admirées, n'avaient rien appris à Gauss. Quelques lignes mystérieuses d'un ouvrage immortel, devenues claires tout à coup, faisaient remonter à l'année 1801, avant la naissance de Jacobi et d'Abel, les droits du prince des géomètres. Gauss, sans rien réclamer, se félicitait, dans sa correspondance intime, de n'avoir plus à rédiger, pour les mettre au jour, des idées pour lui si anciennes.

La loyauté de tous, dans l'histoire de cette grande découverte, avait été jusqu'ici incontestée. Gauss, si l'on ose le dire, semble au-dessus de la gloire. Abel est trop heureux, trop enthousiaste de la Science pour faire des parts dans les régions qu'il découvre et l'immensité qu'il aperçoit. Jacobi, plus habile et plus calme, piquant la curiosité par ses réticences, s'élevant toujours sans dire par quelle voie, dominant les questions les plus hautes, profitait, sans marchander les louanges à Abel, de la fougue du jeune Norvégien.

Legendre, admirable par ses encouragements à Jacobi, plus prompt à applaudir Abel qu'à le comprendre, fier de voir ces deux grands génies le saluer comme leur maître, laissait paraître envers Gauss une haineuse défiance. « Comment se fait-il, écrit-il à Jacobi, que M. Gauss ait osé vous faire dire que la plupart de vos théorèmes lui étaient connus? Cet excès d'impudence n'est pas croyable. »

Si Gauss, sans s'expliquer davantage, osait dire que les théorèmes de Jacobi lui étaient connus, c'est que ses vieux cahiers de notes en contenaient la raison profonde, et l'on pourrait ajouter, lors même que les preuves ne seraient pas devenues évidentes : il fallait le croire, puisque Gauss l'affirmait. Pour l'élévation du caractère, comme pour la puissance du génie, il était le plus grand de tous.

Gauss avait froissé plus d'une fois et exaspéré Legendre. Disant la vérité avec la force et la liberté qu'elle inspire, le grand géomètre n'admettait pas que, sur les questions de fait, ses assertions fussent

mises en doute. Legendre avait fait plusieurs découvertes depuis longtemps connues de Gauss, qui continuait à les appeler les siennes, et il ne répondait rien quand Legendre demandait des preuves. Le temps a toujours décidé en sa faveur. Il serait injuste assurément de tenir dans l'indifférence les circonstances d'une découverte. L'histoire des efforts de chacun et la date des succès obtenus importent à la claire vue des théories comme à la gloire des inventeurs, mais il n'est ni nécessaire, ni possible, ni suffisant surtout, d'adjuger dans une courte sentence la propriété de chaque théorème. Quand l'auteur d'une œuvre d'art est incertain, il faut, entre les prétendants, chercher quel est le véritable. Pour la propriété d'une formule d'Algèbre, le partage n'implique pas contradiction. Gauss connaissait la double périodicité avant la naissance d'Abel. Abel, en 1827, l'avait découverte depuis un an au moins, lorsque, le premier, il la publia dans un Mémoire irréprochable et complet. Jacobi, trois mois avant la publication d'Abel, donna l'énoncé d'un théorème dont la démonstration, publiée par lui six mois plus tard, se rattache intimement à la même découverte.

Si l'on veut bien, pour un instant, supposer ces assertions incontestées, n'est-ce pas visiblement violer la justice que de proclamer sans commentaire le vrai propriétaire de la découverte? Est-ce Gauss? Il l'a connue le premier. Abel? Il l'a publiée. Jacobi, enfin? Sans le secours des deux autres, il a montré, par l'annonce des conséquences, la connaissance assurée des principes. N'est-ce pas là débattre sur les mots? Quelle signification précise aurait une telle décision?

Un professeur éminent de Christiania, inventeur lui-même dans une autre branche de la Science, M. Bjerknes, dans un Livre écrit pour faire connaître et glorifier Abel, refuse à Jacobi sa part jusqu'ici incontestée. Abel, suivant M. Bjerknes, n'a rien emprunté à son rival; c'est une vérité démontrée. Mais Jacobi, sur le point principal, s'est approprié les idées d'Abel. Le hasard lui offrait une gloire imméritée, l'occasion l'a rendu plagiaire.

Je doute qu'un tel paradoxe puisse remplacer la tradition ou l'ébranler. Le savant professeur de Christiania est, sous une forme moins dure, aussi sévère, osons dire aussi peu juste pour Jacobi, que Legendre l'était pour Gauss. Il tient pour sans valeur, quand elles sont sans preuves, les assertions du grand géomètre. L'auteur

retrace, sans omettre un détail, les débuts de l'illustre Norvégien. Le père d'Abel, pauvre pasteur de village, mourut jeune encore, laissant dans la misère sa veuve et cinq enfants. Abel, dans son enfance, fut médiocre écolier. Lorsqu'à l'âge de seize ans il aborda l'Algèbre, l'indifférence pour toute autre étude devint de l'aversion. Son maître, Riddervold, trouva un jour, sur le banc du jeune géomètre, ce billet de la main d'Abel : « Riddervold s'imagine que j'ai écrit ma composition en langue latine ; il se trompe joliment. » Les géomètres les plus illustres, aussi bien que les compilateurs les plus oubliés, étaient étudiés sans aide et sans choix. Francœur et Euler, Garnier et Poisson, Lacroix et Gauss le charmaient et le développaient, inégalement sans doute, mais étaient lus jusqu'à la dernière ligne. Un savoir aussi étendu, écrit M. Bjerknes, oubliant d'illustres exemples, ne pouvait être acquis sans porter préjudice à d'autres branches. Jacobi, admiré par tous ses maîtres, ne négligeait cependant aucune branche d'étude ; il excellait au gymnase comme à l'université, en Philologie aussi bien qu'en Mathématiques, en Histoire comme en Philosophie. Abel, pendant les leçons, rêvait à ses formules. On l'entendit un jour avec étonnement interrompre le cours de Philosophie, en s'écriant à haute voix : *Jeg har det :* « Je le tiens. » L'université de Christiania adjoignait à chacun de ses diplômes une mention plus ou moins flatteuse : *laudabilis præ cæteris, laudabilis, haud illaudabilis* ou *non contemnendus*, étaient les formules adoptées. Abel, pour son *examen artium*, de même que pour l'*examen philosophicum*, fut déclaré *haud illaudabilis*. Il négligeait tout pour l'Algèbre et mêlait des calculs à ses plaisanteries : une de ses lettres est ainsi datée : $\sqrt[3]{6\,064\,321\,219}$; c'est sa manière d'écrire 24 juin 1823 ; en ajoutant quelques décimales sous le radical, il aurait pu indiquer en même temps l'heure, la minute et la seconde.

Abel exerça ses forces naissantes à la résolution algébrique de l'équation du cinquième degré. Son maître d'Astronomie, Hannsteen, soumit son travail à Degen, professeur à Copenhague, qui, sans l'approuver mais sans découvrir la faute, admira la marche des calculs. L'éminent professeur, aujourd'hui oublié, ajoutait, presque prophétiquement :

Je ne puis m'empêcher d'émettre le vœu que le temps et les forces con-

sacrées par M. Abel à une question que je regarde comme stérile soient dirigés vers un sujet dont le perfectionnement aura les plus heureuses conséquences pour l'Analyse entière, je veux dire les transcendances elliptiques. Avec ses dispositions convenables pour ce genre de recherches, le travailleur découvrira des détroits de Magellan conduisant à de vastes régions d'un seul et immense océan analytique.

Avant de découvrir ces détroits, Abel dirigea mal ses premiers pas. Voulant calculer l'action de la Lune sur le pendule, il se trompa complètement. Schumacher refusa le Mémoire d'Abel. « Pour son honneur, écrivit-il à Hannsteen, qu'il n'en soit plus parlé. » On en parla peut-être à Christiania; mais la réputation d'Abel était faite. L'université, bien conseillée, demanda pour cet élève, dont presque toutes les notes étaient médiocres, une récompense exceptionnelle. Une pension lui fut accordée, pendant trois ans, pour se perfectionner d'abord dans les langues étrangères et féconder dans les grands centres scientifiques les inspirations d'un génie qu'on devinait. L'année suivante, il partit pour Berlin en compagnie de trois camarades de l'université : Boeck, gradué en médecine; Keilhau, curieux de l'art des mines, et Tank, dont la philosophie était l'étude. Abel fit, à Berlin, la connaissance de Crelle, qui l'admira, devint son ami et devait proclamer sa gloire. Une erreur s'est glissée dans le récit de M. Bjerknes : « La tentative faite par Crelle pour introduire à Berlin quelque vie dans la Science par l'organisation de réunions scientifiques dans sa propre maison avait, dit M. Bjerknes, complètement échoué, et cela, par l'arrogance insupportable d'un seul sociétaire, le physicien Ohm. » L'illustre auteur de la théorie des courants occupait à Bamberg un très modeste emploi; il n'avait ni le goût, ni le droit d'être arrogant et se serait tenu pour honoré par les invitations du conseiller Crelle. M. Bjerknes le confond avec le mathématicien Ohm, médiocre auteur d'un Livre sur le calcul des variations, qui, lors de son arrivée à Berlin, ayant pris logement dans une rue depuis longtemps nommée la rue Ohm, répondait d'un ton modeste, quand on lui demandait son adresse : « On a bien voulu donner le nom de Ohm à la rue que j'habite. »

L'avenir était sombre pour Abel; on devait, d'après la tradition et la règle, faire de lui, pour une année au moins, un simple maître d'école. La chaire de Mathématiques, pendant le voyage d'Abel,

devint vacante à l'université de Christiania; elle fut donnée à Holmboe, son premier maître. Le rapport du sénat universitaire rappelait, pour motiver ce choix, les titres anciens et sérieux du candidat, en ajoutant toutefois : « Le sénat considère comme un devoir de faire observer combien il importe, au point de vue de la Science en général et de notre université en particulier, que l'on ne perde pas de vue l'étudiant Abel. » M. Bjerknes juge le sénat excusable; mais la préférence accordée au maître excellent et dévoué sur son admirable mais très jeune élève lui paraît au fond singulière. Abel fut plus juste; la lettre qu'il écrivit à Holmboe leur fait honneur à tous deux :

Reçois mes bien sincères félicitations, écrit Abel à son maître, et sois certain qu'aucun de tes amis ne s'en réjouit plus que moi. Tu peux bien croire que j'ai souvent souhaité un changement dans ta situation; car rester maître dans une école, c'eût été horrible pour quelqu'un qui s'intéresse vivement à la Science, et maintenant tu vas t'occuper sérieusement de te chercher une bien-aimée, n'est-ce pas?

M. Bjerknes s'étend longuement sur le parti pris par Abel de ne pas visiter Göttingue ; Gauss l'effrayait, ou, pour adopter les termes mêmes de l'auteur, Abel n'aimait pas Gauss. M. Bjerknes s'en réjouit; favorable avant tout à la gloire de son illustre compatriote, il aurait craint qu'après une visite à Göttingue on eût cherché dans les idées d'Abel l'inspiration d'un maître plus grand que lui. Cette crainte, on le devine, n'était pas celle d'Abel. Il redoutait autour de Gauss, comme autour de Cauchy, un rempart triple de dédain et d'orgueil. Comment être admis, sans un blocus en règle, à contempler de si hautes renommées? Rien n'était plus injuste. L'inaccessible majesté de Cauchy fera sourire ceux qui l'ont connu, et quant à Gauss, ses lettres à Schumacher, familières et intimes, nous le montrent, pendant quarante-deux années consécutives, plein de franchise, de bonté et, malgré son amour du repos, d'intérêt pour tous. Les cordiales réceptions dont il honorait Encke étaient comptées, par l'éminent astronome, comme l'un des meilleurs souvenirs de sa vie ; et la conversation du grand géomètre, élevée et profonde sur tous les sujets, le laissait dans l'enthousiasme, presque dans l'ivresse. Abel aurait été le bienvenu à Göttingue, comme le fut vingt ans plus tard le jeune Eisenstein, dont

Gauss disait : « Ses moindres productions font honneur à un si jeune homme, ses meilleures grandiraient le nom du plus habile. »

M. Bjerknes cependant insiste sur la répulsion d'Abel, sur sa *rancune,* sur son *aversion* même pour le grand homme qu'il ne vit jamais. Que s'était-il passé? Schumacher, paraît-il, aurait soumis à Gauss un Mémoire proposé par Abel, bien jeune encore. C'était une première tentative pour démontrer l'impossibilité de résoudre algébriquement les équations. Gauss, qui n'aima jamais à examiner les manuscrits d'autrui, se serait écrié, après un coup d'œil jeté sur celui d'Abel : « C'est une abomination d'écrire de telles choses! » *Es ist ein Gräuel so was zusammen zu schreiben!*

Gauss n'avait pas sans doute gardé souvenir de cette boutade, lorsque, cinq ans après, il écrivit à Schumacher : « La mort d'Abel, qu'aucun journal n'a annoncée, est une grande perte pour la science. Si l'on publie ou si vous apprenez quelque chose sur la fin de ce grand esprit, je vous prie de me l'envoyer. Je serais bien aise d'avoir son portrait, s'il était possible de se le procurer. Humboldt, à qui j'avais parlé de lui, était décidé à tout faire pour l'attirer à Berlin. » Abel, pour pénétrer jusqu'à l'auteur de ces lignes, n'aurait eu besoin d'aucun blocus.

Ni la crainte d'être froidement accueilli, ni son injuste aversion pour Gauss, n'auraient éloigné Abel de Göttingue; mais, cédant à la curiosité et poussé par l'inquiétude de la jeunesse, il préféra l'itinéraire plus attrayant choisi par ses compagnons. Les jeunes Norvégiens visitèrent Dresde, Prague, Vienne, Trieste, Venise et, pour se rendre à Paris, traversèrent lentement la Suisse, assidus aux théâtres plus qu'aux académies, jugeant les pièces, admirant les acteurs et mettant la Science en oubli. « Ah! s'écriait Abel, en sortant d'une représentation de *Guillaume Tell*, tu aurais vu ce que c'est que jouer. — Certainement, écrivait Boeck, Abel ne pourra rien apprendre d'un tel voyage; mais il pourra voir un peu de monde, il fera de nouvelles connaissances et perdra de vue quelques-unes de ses anciennes relations. »

Il doit te sembler bien horrible, écrivait Abel à Holmboe, de gaspiller ainsi tant de temps; mais je ne crois pas qu'on puisse appeler cela du gaspillage. On apprend en voyage maintes choses bien connues dont je pourrai tirer plus de profit que d'une étude acharnée de Mathématiques; outre cela, il me faut toujours, comme tu sais, des périodes de paresse, pour

pouvoir faire rage avec des forces renouvelées. Quand je serai à Paris, je commencerai à travailler avec fureur, je lirai, j'écrirai, j'élaborerai mes affaires d'intégration, la théorie des fonctions elliptiques; ce que, grâce à Crelle, j'espère bien voir imprimer à Berlin.

Abel, en effet, élabora à Paris son Mémoire sur les fonctions elliptiques, qui, imprimé à Berlin, reste un de ses plus grands titres de gloire. Mais en travaillant, soit timidité, soit embarras à parler notre langue, Abel ne sut lier à Paris aucune relation.

Jusqu'à présent, écrit-il à Holmboe, après plusieurs mois de séjour, je n'ai fait connaissance qu'avec MM. Legendre, Hachette et Cauchy, et quelques mathématiciens moins célèbres, quoique fort habiles : M. Saigey, rédacteur du *Bulletin des Sciences*, et M. Lejeune-Dirichlet, qui vint me voir l'autre jour, me croyant son compatriote. C'est un mathématicien de grande pénétration. Legendre est d'une complaisance extrême, mais malheureusement fort vieux. Cauchy est fou et avec lui il n'y a pas moyen de s'entendre, bien que, pour le moment, il soit celui qui sait comment les Mathématiques doivent être traitées; ce qu'il fait est excellent, mais très brouillé. Poisson, Fourier, Ampère, etc., s'occupent exclusivement de magnétisme et d'autres sujets physiques. M. Laplace n'écrit plus rien, je pense; je l'ai vu souvent à l'Institut; c'est un petit homme très gaillard; mais il a le défaut que le Diable boiteux impute à Zambuto, il coupe la parole aux gens. Poisson est un homme court avec un joli petit ventre, il porte son corps avec dignité; M. Fourier de même; Lacroix est terriblement chauve et extraordinairement vieux (il avait soixante ans).

Abel, décidément, ne savait ni juger d'un coup d'œil, ni peindre d'un trait.

Mais abordons la question capitale. Faut-il, contrairement à la tradition, accorder à Abel, et à lui seul, l'honneur d'avoir découvert la double périodicité et étudié les fonctions inverses? Jacobi aurait-il dû, loyalement, déclarer que sans lui il n'en aurait rien su?

Les contemporains, les admirateurs, les amis d'Abel, Legendre, dont les circonstances rendent l'autorité si grande, Poisson, Dirichlet, Crelle et Holmboe, ses éditeurs affectueux, n'ont jamais formé un seul doute. Les découvertes d'Abel et celles de Jacobi à leurs yeux ont été simultanées et indépendantes. Ainsi conclut aussi M. Königsberger dans sa savante et minutieuse étude historique, faite en 1879, lors du cinquantième anniversaire de ce grand progrès de la Science. Ajoutons que MM. Sophus Lie et Sylow,

éditeurs des œuvres d'Abel (Christiania, 1881), refusent eux-mêmes de suivre M. Bjerknes dans sa thèse trop exclusivement favorable au grand génie qui leur doit un si admirable monument.

C'est dans l'étude des documents depuis longtemps connus que M. Bjerknes croit lire la condamnation de Jacobi; car telle est la conclusion, et peut-être le but de son Livre. Deux découvertes également admirées ont signalé l'année 1827 : la théorie générale de la transformation et celle de la double périodicité, conséquence elle-même presque nécessaire de l'étude des fonctions inverses, dont elle est le point de départ et la base.

Les formules générales de la transformation ont été données pour la première fois par Jacobi dans une lettre datée du 13 juin 1827 et insérée par Schumacher dans le n° 123 de son journal.

Gauss, sans se prononcer sur l'importance de la découverte, l'avait accueillie avec humeur : « Je vous retourne la lettre de Jacobi, mon cher ami, écrit-il à Schumacher, qui demandait son avis sur l'insertion, le théorème qu'il énonce résulte de mes recherches (inédites). Vous paraissez disposé à accueillir ces énoncés sans preuves, une telle forme de publication n'est pas la mienne. Je m'abstiens de la juger; mais, je vous en prie, quand vous recevrez de telles communications, abstenez-vous de me les envoyer. »

Le seul Mémoire publié alors par Abel sur les intégrales elliptiques était dirigé dans une voie tout opposée; Abel avait en vue des cas où, l'intégration s'effectuant par logarithmes, la transcendante nouvelle n'existe pas.

C'est au mois de septembre 1827, trois mois après la publication des énoncés de Jacobi, qu'Abel, dans le *Journal de Crelle*, publia le Mémoire que dès l'année précédente, le 15 juin 1826, il formait à Venise le projet de composer pendant son séjour à Paris. Ce Mémoire contient l'étude des fonctions inverses; le principe de la double périodicité y paraît à chaque page; il n'y est pas question de la transformation. L'application stricte des règles du droit serait ici facile : Gauss n'a rien publié, il n'a droit à rien; la découverte de la transformation doit porter le nom de Jacobi; celle de la double périodicité, plus féconde et plus vaste, appartient à Abel.

Cette sommaire décision serait inique; voici pourquoi. La démonstration des théorèmes de Jacobi, que l'inventeur, il est vrai, fit attendre six mois, reposait sur l'emploi des fonctions nouvelles. Abel, de son côté, fit attendre quelques mois la seconde Partie de son beau Mémoire; il y donne comme corollaire la démonstration des théorèmes de Jacobi. Chacun des deux rivaux, sans se détourner de la voie, recontrait le terrain d'où partait son rival. Quand Abel reçut, en présence de Hansteen, les n°s 123 et 127 des *Astronomische Nachrichten* de Schumacher, son trouble fut manifeste; il devint pâle et courut chez le confiseur avaler un bitter de Schnaps; il s'effrayait de l'apparition d'un tel rival, sans s'en plaindre toutefois, ni mettre en doute sa loyauté.

M. Bjerknes, qui commente sans la reproduire la très curieuse lettre dans laquelle Hansteen donne ces détails, aurait mieux fait de la donner tout entière : « Jacobi marche sur ses talons », dit-il (*da Jacobi traeder ham i Haelene*). C'est une appréciation importante de celui qui, fort étranger à ces matières, a été frappé de la pâleur d'Abel.

Quand Jacobi reçut le second cahier du *Journal de Crelle*, personne ne le vit pâlir; il traduisit le Mémoire d'Abel dans la notation qui, dit-il, lui était habituelle et l'envoya à Legendre. « Depuis ma dernière lettre, lui écrit-il, des recherches de la plus grande importance ont été publiées sur les fonctions elliptiques de la part d'un jeune géomètre qui, peut-être, vous sera connu personnellement. Comme je suppose que le Mémoire ne vous est pas connu, je veux vous en raconter les détails les plus intéressants. » Singulier procédé, on l'avouera, pour dissimuler le plagiat que, suivant M. Bjerknes, il s'apprête à commettre! Jacobi donne enfin sa démonstration; elle est fondée sur la considération des fonctions inverses. Il adopte la notation qui, disait-il à Legendre, lui est habituelle; le signe sin am est proposé pour la première fois aux géomètres, qui en font un si grand usage.

Lorsque Abel publie la seconde Partie de son Mémoire et la généralisation des théorèmes de Jacobi sur la transformation, Jacobi écrit à Legendre :

M. Abel a trouvé, de son côté, la théorie de la transformation, dans la publication de laquelle je l'ai prévenu de six mois. Le n° 138 des *Astronomische Nachrichten* contient une déduction rigoureuse du théo-

rème de transformation dont le défaut s'était fait sentir dans mes annonces sur le même sujet. *Elle est au-dessus de mes éloges, comme elle est au-dessus de mes travaux.*

Jacobi, on doit le remarquer, dans sa connaissance imparfaite de la langue française, s'exprime peu clairement quand il parle de la déduction rigoureuse *dont le défaut s'était fait sentir*. La démonstration faisait défaut dans sa première Note, contenant l'énoncé seulement; en rappelant cette omission volontaire, il ne veut nullement signaler comme défectueuse la preuve irréprochable qu'il a donnée dans le n° 127 des *Astronomische Nachrichten*.

Abel enfin, peu de mois avant sa mort, apprenant que Jacobi se propose de développer dans un grand Ouvrage les courtes Notices auxquelles il s'est borné, écrivait à Legendre : « Il me tarde de connaître l'ouvrage de M. Jacobi; il doit s'y trouver des choses merveilleuses; M. Jacobi va perfectionner à un degré inespéré, non seulement la théorie des fonctions elliptiques, mais encore les Mathématiques en général. *Je l'estime on ne peut plus.* »

Peut-on imaginer rien qui soit plus net, plus loyal, plus honorable pour les deux inventeurs?

Legendre enfin, opiniâtre dans ses soupçons, écrivait à Jacobi ; « Je remarque que votre possession à vous et à M. Abel est bien assurée contre l'envahisseur ; M. Gauss ne s'avisera pas, je pense, d'écrire qu'il avait trouvé tout cela avant vous. »

Ces citations, que chacun peut comprendre, font connaître et justifient la tradition adoptée ; mais d'autres textes, depuis longtemps connus d'ailleurs, conduisent M. Bjerknes à des conséquences que personne avant lui n'avait aperçues.

En publiant dans le journal de Schumacher des formules générales et exactes et des énoncés irréprochables, Jacobi n'en possédait pas encore la preuve rigoureuse et complète. Lui-même en a fait l'aveu dans une lettre à laquelle Legendre a répondu, tout en louant sa franchise : « Je vois que nous avons couru tous deux des dangers : *vous*, en annonçant des découvertes qui n'étaient pas encore revêtues du sceau d'une démonstration rigoureuse, et *moi*, en leur donnant publiquement et sans restriction mon approbation tout entière. » C'est sur cette circonstance, dont on exagère beaucoup la gravité, que repose toute l'accusation. Jacobi, suivant le savant professeur de Christiania, était entré dans une impasse.

La voie lui restait fermée. Abel est venu fortuitement l'ouvrir. Heusement dégagé d'une imprudente promesse, Jacobi, tout en louant le rival, s'est abstenu de remercier le guide. Cette supposition ingénieuse n'est soutenue par aucune preuve; le contraire n'est pas mathématiquement démontré, c'est tout ce qu'on en peut dire; mais Jacobi la repousse. Sa franche communication à Legendre, faite spontanément, sans que rien la rendît nécessaire, est le seul indice invoqué. Jacobi, avant d'avoir lu le Mémoire d'Abel, se servait-il des fonctions inverses? Avait-il adopté le signe sin am? Quand il le déclare formellement, rien ne donne le droit d'en douter.

Mais pourquoi, dira-t-on, dans sa première communication à Schumacher et dans sa lettre à Legendre, les seules qui précèdent le Mémoire d'Abel, faisait-il exclusivement usage des notations anciennes? C'est à peu près comme si l'on demandait pourquoi, écrivant à Legendre, il se servait de la langue française. Jacobi donnait un énoncé; s'il ne lui convenait pas, suivant une habitude justement blâmée par Gauss, de révéler la marche de ses idées pour faire comprendre aux géomètres les conclusions qui l'élevaient au rang des plus illustres, il fallait au moins parler leur langue.

Gauss et Abel, sans attendre le détail des preuves, ont déclaré au premier aspect la vérité des théorèmes dont Jacobi, qui les énonçait avec une entière assurance, n'avait pas encore la démonstration rigoureuse et complète. Tous deux avaient pénétré plus avant que lui; cela semble certain. Leur vue d'ensemble, à ce moment, était plus profonde et plus claire.

Ce jugement est celui de Jacobi et lui fait grand honneur. *La démonstration* d'Abel, écrivait-il, *est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes travaux.*

Abel, sur aucun point, ne devait rester en arrière; juste aussi envers son rival, il attendait de lui, sans s'être en rien trompé, des *découvertes merveilleuses*. La glorieuse carrière de Jacobi a dépassé toutes les espérances; autour d'un si grand nom les souvenirs abondent, aucun n'est tenu dans l'oubli, aucun ne rend possible la supposition injurieuse que les géomètres seront unanimes à repousser.

Les derniers jours d'Abel furent tristes. A son retour à Christiania, aucune position ne lui était réservée à l'université; une

suppléance temporaire, en lui assurant le strict nécessaire, ne lui permettait pas d'acquitter les dettes contractées pendant son dispendieux voyage. Le pauvre Abel s'efforçait en même temps de venir en aide à sa famille, dont le dénûment était complet. Il avait une fiancée, fille d'un chaudronnier de Copenhague, obligée elle-même d'accepter dans une famille les fonctions d'institutrice. Leur seul espoir était de s'expatrier, et d'entendre annoncer à Berlin, dans le salon de Crelle : *Herr professor Abel und seine Gemahlin.*

Dans une visite faite à la famille Smith, dans laquelle vivait sa fiancée, Abel trouva quelques mois de tranquillité et de bonheur; mais, quand il voulut retourner à Christiania, ses forces épuisées ne permettant plus le voyage, entouré des soins de sa fiancée, et traité en fils par ses excellents hôtes, Abel s'éteignit à l'âge de vingt-sept ans, en laissant dans la Science un impérissable souvenir.

SUR LES GROUPES DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES;

PAR M. EMILE PICARD.

1. On sait que les intégrales définies

$$\int_g^h (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux quelconques des quantités

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ x,\ \infty,$$

satisfont, quand on les considère comme fonctions de x, à une équation différentielle linéaire d'ordre n, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x (*Voir* POCHAMMER, *Journal de Crelle,* t. 71, et HERMITE [1], même journal, t. 79).

---

[1] Bien antérieurement, cette équation avait été donnée par M. Hermite dans son Cours à l'Ecole Polytechnique (*voir* les feuilles du Cours de l'année 1868-69).

Dans mes recherches sur certaines fonctions hyperfuchsiennes, j'ai eu besoin de former le *groupe* de cette équation; je voudrais indiquer ici la méthode de calcul bien simple dont j'ai fait usage pour obtenir rapidement ce groupe.

2. Considérons d'abord le cas de $n = 2$; nous pouvons prendre alors les intégrales

$$\int_g^h u^a(u-1)^b(u-x)^\lambda\,du,$$

qui nous conduisent à l'équation de la série hypergéométrique. Le groupe de cette équation a été donné d'abord par M. Schläfli (*Math. Annalen*, t. III), et, dans sa remarquable thèse, M. Goursat a fait l'étude approfondie des relations qui existent entre ces différentes intégrales.

Marquons sur le plan des u un point u_0 et les points 0, 1 et x; traçons les lignes

$$u_0 0,\ u_0 x,\ u_0 1,\ u_0 \infty,$$

ces lignes se suivant autour de u_0 dans l'ordre qui vient d'être indiqué.

L'expression $\varphi = u^a(u-1)^b(u-x)^\lambda$ ayant en u_0 une détermination, prise une fois pour toutes, considérons les intégrales, prises respectivement le long des coupures précédentes,

$$\int_{u_0}^{0}\varphi\,du,\quad \int_{u_0}^{x}\varphi\,du,\quad \int_{u_0}^{1}\varphi\,du,\quad \int_{u_0}^{\infty}\varphi\,du,$$

que nous désignerons, pour abréger, par

$$U_0,\ U_x,\ U_1,\ U_\infty.$$

L'équation différentielle, dont nous voulons étudier le groupe,

admettra comme intégrales fondamentales

$$\omega_1 = U_x - U_0 \quad \text{et} \quad \omega_2 = U_x - U_1;$$

nous avons à rechercher ce que deviennent ces expressions, quand on fait tourner successivement x autour du point o et autour du point 1.

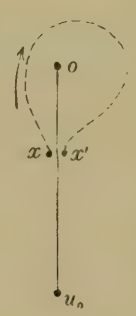
En intégrant le long du contour formé par les coupures, considérées comme lignes doubles, nous trouvons d'abord immédiatement la relation suivante entre les U :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &(1 - e^{2ai\pi})U_0 + [e^{2ai\pi} - e^{2(a+\lambda)i\pi}]U_x \\ &\quad + [e^{2(a+\lambda)i\pi} - e^{2(a+b+\lambda)i\pi}]U_1 + [e^{2(a+b+\lambda)i\pi} - 1]U_\infty = 0. \end{aligned} \right.$$

Ceci posé, pour étudier les changements de ω_1 et ω_2 quand x tourne autour du point o, nous pouvons supposer que x est d'abord sur le bord *gauche* de la coupure $u_0 o$ et ensuite sur le bord *droit* de cette même coupure. Désignons par

$$U'_0,\ U'_x,\ U'_1,\ U'_\infty$$

les valeurs des U quand x est en x' sur le bord droit de la coupure.



On aura évidemment

$$(2) \qquad U'_1 = U_1,\ U'_\infty = U_\infty,\ U'_0 = U_x + e^{-2i\pi\lambda}(U_0 - U_x).$$

D'ailleurs l'équation (1) et l'équation analogue relative aux U nous donnent par soustraction

$$(3) \qquad (1 - e^{2ai\pi})(U'_0 - U_0) + [e^{2ai\pi} - e^{2(a+\lambda)i\pi}](U'_x - U_x) = 0;$$

les équations (2) et (3) nous font connaître les U′ en fonction des U, et par conséquent, en posant

$$\omega'_1 = U'_x - U'_0 \quad \text{et} \quad \omega'_2 = U'_x - U'_1.$$

les valeurs de ω'_1 et ω'_2 en fonction de ω_1 et ω_2. On trouve ainsi

$$(S_1)\qquad \begin{cases} \omega'_1 = e^{-2(a+\lambda)i\pi}\omega_1, \\ \omega'_2 = \omega_2 - [e^{-2(a+\lambda)i\pi} - e^{-2\lambda i\pi}]\omega_1. \end{cases}$$

Telle est la première substitution fondamentale du groupe, celle qui correspond à une circulation autour du point zéro.

La même méthode nous donne, sans y rien changer, la seconde substitution fondamentale, qui correspond à une circulation autour du point un. Pour la trouver, nous supposerons cette fois le point x d'abord sur le bord *droit* de la coupure $u_0 1$ et ensuite sur le bord *gauche* de cette même coupure. Désignons par U''_0, U''_x, U''_1, U''_∞ les valeurs des U quand x est en x'' sur le bord gauche de la coupure. Nous aurons

$$U''_0 = U_0, \quad U''_\infty = U_\infty, \quad U''_1 = U_x + e^{2i\pi\lambda}(U_1 - U_x),$$

et l'on a, en opérant comme plus haut,

$$[e^{2ai\pi} - e^{2(a+\lambda)i\pi}](U''_x - U_x) + [e^{2(a+\lambda)i\pi} - e^{2(a+b+\lambda)i\pi}](U''_1 - U_1) = 0,$$

équations d'où nous tirons

$$(S_2)\qquad \begin{cases} \omega''_1 = \omega_1 + [e^{2(b+\lambda)i\pi} - e^{2\lambda i\pi}]\omega_2, \\ \omega''_2 = e^{2(b+\lambda)i\pi}\omega_2, \end{cases}$$

en posant

$$\omega''_1 = U''_x - U''_0, \quad \omega''_2 = U''_x - U''_1.$$

Les substitutions (S_1) *et* (S_2) *sont les deux substitutions fondamentales du groupe cherché.*

3. J'envisagerai maintenant le cas de $n = 3$, en écrivant l'in-

tégrale sous la forme

$$\int_g^h (u-\alpha)^a (u-\beta)^b (u-\gamma)^c (u-x)^\lambda du.$$

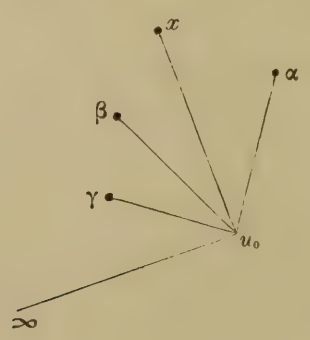
Marquons sur le plan des u un point u_0 et les points α, β, γ, x; traçons les lignes

$$u_0\alpha,\ u_0x,\ u_0\beta,\ u_0\gamma,\ u_0\infty,$$

ces lignes se suivant autour de u_0 dans l'ordre qui vient d'être indiqué. L'expression

$$\varphi = (u-\alpha)^a (u-\beta)^b (u-\gamma)^c (u-x)^\lambda,$$

ayant en u_0 une valeur déterminée, toujours la même, considérons



les intégrales, prises respectivement le long des coupures précédentes,

$$\int_{u_0}^{\alpha} \varphi\, du,\ \int_{u_0}^{x} \varphi\, du,\ \int_{u_0}^{\beta} \varphi\, du,\ \int_{u_0}^{\gamma} \varphi\, du,\ \int_{u_0}^{\infty} \varphi\, du,$$

que nous désignerons, pour abréger, par

$$U_\alpha,\ U_x,\ U_\beta,\ U_\gamma,\ U_\infty.$$

L'équation différentielle linéaire, dont nous cherchons le groupe, admettra comme intégrales fondamentales

$$\omega_1 = U_x - U_\alpha,\quad \omega_2 = U_x - U_\beta,\quad \omega_3 = U_\beta - U_\gamma.$$

Cherchons ce que deviennent ω_1, ω_2, ω_3 quand on fait tourner x successivement autour de α, β et γ. Nous aurons d'ailleurs entre

les U la relation

$$0 = (1 - e^{2ai\pi})U_\alpha + [e^{2ai\pi} - e^{2(a+\lambda)i\pi}]U_x + [e^{2(a+\lambda)i\pi} - e^{2(a+b+\lambda)i\pi}]U_\beta$$
$$+ [e^{2(a+b+\lambda)i\pi} - e^{2(a+b+c+\lambda)i\pi}]U_\gamma + [e^{2(a+b+c+\lambda)i\pi} - 1]U_\infty,$$

qui s'obtient immédiatement en intégrant

$$\int \varphi\, du,$$

le long du contour formé par les coupures, considérées comme lignes doubles.

4. Pour étudier les changements de ω_1, ω_2 et ω_3, quand x tourne autour du point α, nous supposerons, comme précédemment, x d'abord sur le bord gauche de la coupure $u_0\alpha$ et ensuite sur le bord droit de cette même coupure. Désignons par

$$U'_\alpha,\ U'_x,\ U'_\beta,\ U'_\gamma,\ U'_\infty$$

les valeurs de U quand x est en x' sur le bord droit de la coupure. On aura

$$(4)\quad U'_\beta = U_\beta,\quad U'_\gamma = U_\gamma,\quad U'_\infty = U_\infty,\quad U'_\alpha = U_x + e^{-2i\pi\lambda}(U_\alpha - U_x)$$

et, par suite, comme au n° 2,

$$(5)\qquad (1 - e^{2ai\pi})(U'_\alpha - U_\alpha) + [e^{2ai\pi} - e^{2(a+\lambda)i\pi}](U'_x - U_x) = 0.$$

En posant donc $\omega'_1 = U'_x - U'_\alpha$, $\omega'_2 = U'_x - U'_\beta$, $\omega'_3 = U'_\beta - U'_\gamma$, on aura, en se reportant au numéro indiqué,

$$(\Sigma_1)\qquad \begin{cases} \omega'_1 = e^{-2(a+\lambda)i\pi}\omega_1, \\ \omega'_2 = \omega_2 + [e^{-2(a+\lambda)i\pi} - e^{-2\lambda i\pi}]\omega_1, \\ \omega'_3 = \omega_3. \end{cases}$$

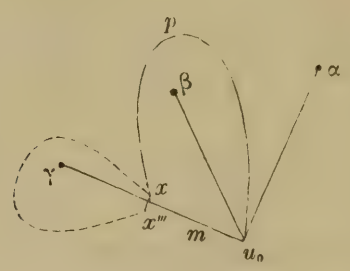
Nous obtiendrons de la même manière la substitution qui correspond à une circulation autour du point β; nous aurons ainsi, en nous servant des calculs faits précédemment,

$$(\Sigma_2)\qquad \begin{cases} \omega''_1 = \omega_1 + [e^{2(b+\lambda)i\pi} - e^{2\lambda i\pi}]\omega_2, \\ \omega''_2 = e^{2(b+\lambda)i\pi}\omega_2, \\ \omega''_3 = (1 - e^{2i\pi\lambda})\omega_2 + \omega_3. \end{cases}$$

5. La recherche de la troisième substitution du groupe, qui

correspond à une circulation autour du point γ, exigera un calcul un peu plus long. Nous allons supposer que x est d'abord sur le *droit* de la coupure $u_0\gamma$, et ensuite en x''' sur le bord *gauche* de la même coupure. Désignons par U''' les valeurs des différentes intégrales quand x est en x'''. On a nécessairement

$$(6) \qquad U'''_\alpha = U_\alpha, \quad U'''_\beta = U_\beta, \quad U'''_\infty = U_\infty.$$



Il nous faut obtenir la valeur de U'''_γ; désignons par U_{mx} la valeur de l'intégrale prise de u_0 en x, en suivant la coupure $u_0\gamma$. On aura

$$U_\gamma = U_{mx} + (U_\gamma - U_{mx}).$$

et par conséquent, quand x est en x''' sur le bord gauche,

$$U'''_\gamma = U_{mx} + e^{2i\pi\lambda}(U_\gamma - U_{mx}).$$

Or la relation entre U_{mx} et U_x est facile à trouver; il suffit pour cela d'intégrer le long du contour $u_0 p x m u_0$, ce qui donne

$$U_x - e^{2i\pi b} U_{mx} = U_\beta(1 - e^{2i\pi b})$$

et, par suite,

$$(7) \qquad U'''_\gamma = [(U_x - U_\beta)e^{-2\pi i b} + U_\beta](1 - e^{2i\pi\lambda}) + e^{2i\pi\lambda} U_\gamma.$$

Écrivons encore l'équation suivante, qui résulte immédiatement de la relation entre les U,

$$(8) \quad (1 - e^{2\lambda i\pi})(U'''_x - U_x) + [e^{2(b+\lambda)i\pi} - e^{2(b+c+\lambda)i\pi}](U'''_\gamma - U_\gamma) = 0;$$

les équations (6), (7) et (8) nous permettent d'exprimer les U''' en fonction des U, ce qui nous donne l'expression des ω''' en fonction des ω, en posant, bien entendu,

$$\omega'''_1 = U'''_x - U'_\alpha, \quad \omega'''_2 = U'''_x - U'_\beta, \quad \omega'''_3 = U'''_\gamma - U'''_\gamma.$$

Un calcul immédiat donne alors

$$(\Sigma_3)\quad \begin{cases} \omega_1''' = \omega_1 + \left[e^{2(c+\lambda)\pi i} - e^{2\lambda\pi i}\right]\omega_2 + \left[e^{2(b+c+\lambda)\pi i} - e^{2(b+\lambda)\pi i}\right]\omega_3, \\ \omega_2''' = \left[1 + e^{2(c+\lambda)\pi i} - e^{2\lambda\pi i}\right]\omega_2 + \left[e^{2(b+c+\lambda)\pi i} - e^{2(b+\lambda)\pi i}\right]\omega_3, \\ \omega_3''' = e^{-2\pi b i}\left(e^{2\pi\lambda i} - 1\right)\omega_2 + e^{2\pi\lambda i}\omega_3. \end{cases}$$

Les substitutions (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3) *sont les substitutions fondamentales du groupe.*

On voit, sans qu'il soit nécessaire d'insister, que cette méthode de calcul est applicable à toute valeur de n.

PROCLUS ET GEMINUS;

Par M. Paul TANNERY.

1. On est aujourd'hui d'accord pour reconnaître que les citations de Geminus, dans le *Commentaire sur Euclide* par Proclus, se rapportent à un seul et même Ouvrage, mais, comme Proclus n'en a pas conservé le titre, il faut le chercher ailleurs.

M. Cantor a indiqué celui que donne Pappus (p. 1026) : Περὶ τῆς τῶν μαθημάτων τάξεως, *Sur le classement des sciences mathématiques,* titre qui convient parfaitement à l'extrait de Geminus, très nettement déterminé, que renferme la première Partie du prologue de Proclus (p. 38,1-42,8), ainsi qu'aux fragments [1] contenus dans la compilation (*Anonymi variæ collectiones*) publiée par Hultsch à la fin de son édition de Héron (p. 246,15-249,12), ou encore aux scolies sur le *Charmide* de Platon (p. 513, 52), qui reproduisent, avec de précieuses variantes, deux de ces fragments (5 et 9). Il est, au contraire, bien difficile d'admettre le même titre pour la plupart des autres extraits faits par Proclus, pour ceux surtout qui entrent, sur la Géométrie en particulier, dans des détails tout à fait spéciaux.

---

[1] En réalité, ces fragments sont anonymes et je crois, pour ma part, qu'ils proviennent directement d'Anatolius, auteur du IIIe siècle, qui, lui-même, avait compilé Geminus, comme Proclus l'a fait plus tard. Je discuterai ultérieurement la question.

Les autres historiens, depuis le XVIe siècle, répétaient un titre qui paraît avoir été forgé par le premier traducteur de Proclus, Barocius (1560) : *Libri geometricarum enarrationum,* et ils parlaient aussi de six Livres pour l'ensemble de l'Ouvrage, jusqu'à ce que Nesselmann, en 1842 (p. 4-5), remarquât que le titre admis ne reposait sur aucun texte, que, d'autre part, la donnée des six Livres devait provenir de ce qu'en effet Eutocius, au début de son commentaire sur Apollonius, cite Geminus *in sexto mathematicarum præceptionum libro* (¹). Mais, par la plus singulière inadvertance, Nesselmann ajoute que le texte grec d'Eutocius est encore inédit, et dès lors il n'ose appuyer une traduction passablement suspecte.

Le passage d'Eutocius, capital pour l'histoire des coniques, est bien connu et a souvent été invoqué ; mais personne, que je sache, ne s'est encore avisé d'y relever le véritable titre de l'Ouvrage cité : Ἐν τῷ ἕκτῳ τῆς τῶν μαθημάτων θεωρίας, *Théorie des Mathématiques* (*Livre* VI), qui cadre cependant si parfaitement avec tous les extraits de cet Ouvrage, et qui, d'autre part, convient très bien à l'époque de Geminus.

Le titre que donne Pappus doit être regardé comme désignant spécialement une partie de l'Ouvrage, sans doute le premier Livre; si d'ailleurs le sixième traitait des coniques, ce n'était pas le dernier, puisque Proclus nous a conservé des détails sur d'autres courbes qui ne devaient venir qu'après; si enfin Geminus avait terminé son œuvre, et parlé des autres branches des Mathématiques avec autant de développements que de la Géométrie, le nombre des Livres devait certainement être considérable.

Le titre de l'Ouvrage en indique suffisamment l'objet; c'était un tableau d'ensemble de la Science, tableau méthodique et raisonné, où les détails historiques ne figuraient qu'accessoirement; mais si cette sorte d'encyclopédie mathématique nous était parvenue tout entière, elle n'en serait pas moins pour nous, même au point de vue historique, d'un prix inestimable, puisque, écrite vers la fin de la période gréco-alexandrine, elle nous renseignerait

---

(¹) Traduction de Commandin (1566), conservée dans l'édition gréco-latine de Halley, p. 9.

de la façon la plus précise sur l'état exact de la Science à ce moment décisif d'où semble dater son déclin.

2. La comparaison des diverses sources indiquées plus haut pour la partie de l'Ouvrage de Geminus relative au classement des Mathématiques [1] nous montre que, malheureusement, aucune de ces sources ne peut être regardée comme reproduisant exactement le texte original; si notamment Proclus paraît bien, en thèse générale, conserver les expressions de Geminus, il l'abrège singulièrement, il l'analyse plutôt qu'il ne le copie réellement; il faut donc nous contenter, en tous cas, de rechercher dans les extraits de Proclus plutôt le sens général des fragments de l'Ouvrage perdu que le texte exact de ces fragments.

Mais comment les discerner avec quelque précision dans l'ensemble du commentaire, alors que les vingt citations de Geminus que l'on y rencontre auraient évidemment pu être beaucoup plus fréquentes encore, alors surtout que Proclus cite aussi tant d'autres auteurs dont on peut supposer qu'il possédait des écrits perdus pour nous?

Pour répondre à cette question, il convient tout d'abord que nous analysions rapidement le commentaire de Proclus, et que nous précisions la façon dont il l'a composé, les éléments qu'il y a mis en œuvre.

Il caractérise assez bien lui-même sa méthode en deux endroits. Dans l'un, au début de la seconde Partie du Prologue (p. 48), il nous dit que, d'une part, il prend Platon pour guide, que de l'autre il choisit dans les écrits d'autres auteurs ce qui lui paraît convenir à son sujet.

Au commencement du commentaire sur les propositions (p. 200), il annonce qu'il va choisir ce qu'il y a de plus intéressant dans les travaux antérieurs, en évitant leur prolixité excessive, car, dit-il ailleurs (p. 84), « nous sommes rebattus de petits lemmes et de cas différents ».

On doit donc, en thèse générale, distinguer deux sortes d'écrits dont Proclus s'est servi ou a pu se servir : d'une part, ceux d'un

---

[1] Notamment le rapprochement des fragments 9, 10 des *Variæ Collectiones* avec Proclus, p. 40, 2-9.

caractère théorique général, qu'il a compulsés pour son Prologue et le commentaire sur les définitions, les postulats et les axiomes, groupe dans lequel rentre l'Ouvrage de Geminus; d'autre part, les travaux spéciaux, utilisés pour les propositions, et dont le plus récent est le commentaire de Porphyre-Pappus. J'expliquerai un peu plus loin pourquoi je réunis ici ces deux noms.

La personnalité de Proclus n'apparaît guère en fait que dans le cas où il peut faire intervenir le nom de Platon ou bien celui d'Aristote, dont il ne semble au reste posséder que les mêmes Ouvrages que nous avons encore; alors, il se sent à l'aise et l'on peut dire que c'est réellement lui qui parle, en interprétant les vieux maîtres à sa façon. C'est naturellement surtout dans le Prologue qu'il peut agir de la sorte, quoiqu'il ne se fasse pas faute de revenir ailleurs, parfois bien hors de propos, au divin Platon ou au surhumain (δαιμόνιος) Aristote. Mais enfin, il faut bien s'occuper de Mathématiques ou fournir des renseignements historiques; dès lors Proclus n'est guère qu'un écho plus ou moins fidèle d'auteurs comme Geminus pour les premières parties de son commentaire, comme Pappus pour la dernière.

3. Ainsi, exposons le plan du Prologue: Proclus commence par dire quel est, dans la théorie platonicienne des Idées, le rôle capital des Mathématiques; il disserte sur les principes communs à leurs diverses branches, principes qui, d'après lui, doivent fournir le sujet d'une Science générale; il recherche quelle faculté constitue le critérium en Mathématiques, et essaye de déterminer le caractère idéal et apriorique des objets de la Science. Puis vient l'éloge de celle-ci, la preuve de son utilité pour la Philosophie, la Théologie, la Physique, la Politique, l'Éthique, etc., et en même temps, la réfutation de l'opinion de ceux qui ne considèrent que l'utilité pratique; de là, après une conclusion générale, il passe à l'exposé de la division classique de la Mathématique suivant les Pythagoriciens [1], puis à la division adoptée en dehors de leur école; c'est ce dernier morceau qui est emprunté à Geminus, nom-

---

[1] Arithmétique, Musique, Géométrie et Sphérique. Cette division se retrouve partout, en particulier au début de l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque.

mément cité. Quelques pages sur l'unité de la Mathématique, d'après Platon, et sur l'origine de son nom terminent la première Partie du Prologue (p. 47).

La seconde s'ouvre par l'attribution à la Géométrie du rang suivant immédiatement celui de l'Arithmétique; puis Proclus se demande quelle est la nature de son objet; appartient-il au sensible ou à l'intelligible? La discussion, longuement poursuivie, conclut en faveur de l'intelligible, identifié d'ailleurs avec l'indivisible, contre l'opinion de Porphyre dans ses Σύμμικτα, *Mélanges*, Ouvrage perdu, mais que Proclus devait posséder et dont provient peut-être aussi une autre citation de Porphyre (p. 255, 14). Le caractère de la science géométrique est ensuite spécifié avec un peu plus de précision, et Proclus cherche à la distinguer nettement des autres, tout en accusant les rapports qu'elle a avec l'Arithmétique; mais bientôt il rentre dans de vagues considérations générales, que suit un éloge de la Géométrie au point de vue de l'utilité pratique; nous y rencontrons les anecdotes bien connues sur la trirème qu'Archimède fait mouvoir par la force d'un seul homme, et sur la solution du problème de l'alliage de la couronne.

Vient ensuite un morceau capital, emprunté tout entier: le résumé de l'histoire de la Géométrie jusqu'à Euclide, suivi de détails particuliers sur ce dernier. Empruntées aussi sont les observations qui suivent sur la signification des mots *élément* et *élémentaire* d'une part, de l'autre sur la différence entre les théorèmes et les problèmes, car ces observations citent une série d'auteurs anciens, de Ménechme à Posidonius, que Proclus ne possède certainement pas tous. Au contraire, la distinction, intercalée entre ces observations, des trois genres de principes en Géométrie : hypothèses (définitions), postulats et axiomes, distinction faite suivant les principes d'Aristote et en opposition à la terminologie bien connue de l'école stoïcienne, ne doit pas dériver d'un auteur déterminé; la fin du Prologue, sur l'objet du premier Livre d'Euclide et sa division logique en trois parties, se trouve dans le même cas.

4. Il suffit de parcourir cette analyse du Prologue pour reconnaître combien la distinction des morceaux empruntés y est en réalité facile; qui, dès lors, prendra la peine d'étudier ce Prologue

et de se pénétrer des particularités du style de Proclus, arrivera sans grand'peine à faire, avec une exactitude suffisante, la même distinction dans le corps du commentaire; au sujet de celui-ci, il suffit de dire, pour toute analyse sommaire, que l'ordre du texte d'Euclide y est ponctuellement suivi, sans que cet ordre exclue au reste les digressions les plus capricieuses. Mais, si les morceaux empruntés sont facilement reconnaissables, il n'en reste pas moins à déterminer leur provenance réelle : à côté de Geminus et de Pappus, n'y a-t il pas d'autres sources? parmi les autres auteurs que cite Proclus, n'en est-il pas dont il pouvait avoir également les Ouvrages à sa disposition?

Pour éliminer, en tout cas, ceux qu'il ne connaît que de seconde main, on peut faire usage d'un critérium reposant sur l'emploi qu'il fait de la locution οἱ περί.

On admet d'ordinaire que, par exemple : οἱ περὶ Ποσειδώνιον (mot à mot : ceux autour de Posidonius) signifie tout simplement : Posidonius, au moins s'il s'agit d'une citation. C'est une opinion certainement très commode, mais qui n'est ni prouvée, ni probable (1).

Si Posidonius était un personnage d'un roman d'aventures, comme en faisaient les Grecs du temps de Proclus, la locution dont il s'agit n'aurait jamais signifié Posidonius tout seul, mais Posidonius et son ou ses compagnons. Elle équivaudrait à la locution française : *nos héros,* pouvant d'ailleurs, j'insiste sur ce point, s'appliquer à deux personnages seulement; les exemples en sont faciles à trouver. Que dans Proclus, qui a des prétentions de style indiscutables, cette locution, relativement rare d'ailleurs, n'ait pas une signification spéciale, c'est ce qui me paraît absolument inadmissible.

---

(1) Il est incontestable qu'en thèse générale on ne peut conclure de la manière dont tel auteur emploie cette locution à celle dont tel autre l'emploiera; des écrivains de la décadence ont pu s'en servir peut-être sans y attacher une signification particulière; mais que le plus suspect à cet égard l'ait fait réellement, il sera toujours permis d'en douter. Je me contente de citer un passage de Diogène Laërce (VII, 143) : « Le Soleil est un feu pur, comme le dit Posidonius au Livre XVII des *Corps célestes;* plus grand que la Terre, comme il le dit au Livre XVI du *Discours physique;* et aussi de forme sphérique, comme le disent οἱ περὶ le même. »

On pourrait penser qu'elle veut dire dans l'exemple choisi : Posidonius et ceux qui partagent la même opinion; mais, comme nous la retrouvons plusieurs fois pour des démonstrations géométriques, elle ne peut signifier que : Posidonius et ceux qui reproduisent ce qu'il a dit. Or, si Proclus a vu le texte même de l'auteur original, la mention des autres est inexplicable, du moment où elle n'est pas une habitude constante; si, au contraire, il ne connaît le premier que de seconde main, il est naturel qu'il emploie parfois cette locution, sans qu'il soit nécessaire qu'il le fasse toujours. D'après l'analogie avec l'usage des romanciers grecs, la seconde main peut d'ailleurs être unique, et ce doit même être là le cas général.

Ainsi, la locution en question doit signifier dans Proclus qu'il emprunte la citation; il lui était inutile de s'expliquer davantage puisque, en général, il nous est encore facile, comme on va le voir, de reconnaître l'intermédiaire.

5. L'application de ce critérium nous permet d'éliminer de la liste des auteurs que Proclus aurait pu utiliser directement :

1° Eudème (p. 419), l'historien des Mathématiques; toutes les données qui doivent originairement provenir de lui ont donc été fournies à Proclus, soit par Geminus, soit par Porphyre-Pappus, suivant la place qu'elles occupent;

2° Speusippe (p. 77 et 78), Ménechme (p. 78 et 254), Amphinome (p. 77 et 254), Zénodote (p. 80), Posidonius (p. 80), citations qui, à n'en pas douter, viennent de Geminus;

3° Apollonius (p. 100); les citations en proviennent soit de Geminus, soit de Pappus;

4° Philon (p. 266). Nous rencontrons encore (p. 305) un Philippe, cité d'après Héron, au sujet de l'énoncé d'un théorème; la citation de Philon rend très vraisemblable que, dans ce second cas, c'est encore de lui qu'il s'agit, et qu'au nom du disciple de Platon il faut substituer celui du mécanicien de Byzance, que ses travaux et l'époque de sa vie rapprochent naturellement de Héron.

5° Héron lui-même (p. 329 et 423). Il est à remarquer que son nom se trouve accolé une fois à celui de Porphyre, une autre à celui de Pappus. Il semble bien dès lors que la locution : οἱ περὶ

Ἥρωνα καὶ Πάππον, par exemple, doive signifier : Héron dans Pappus. L'origine de son emploi est facile à reconnaître; après avoir écrit tout d'abord : οἱ περὶ Ἥρωνα, Proclus aura pensé qu'il n'indiquait pas suffisamment sa véritable source; il aura dès lors naturellement ajouté : καὶ Πάππον.

L'application du critérium indiqué nous donne ainsi des résultats très rationnels; elle n'exclut guère en effet que les auteurs les plus anciens et, en général, ceux dont l'utilisation directe par Proclus peut, à tous autres égards, soulever le plus de doutes; mais, que cette application soit absolument justifiée dans chaque cas particulier, cela ne peut être établi que par des discussions de détail; je n'ai pas à les aborder pour le moment, car, en fait, je ne propose qu'à titre provisoire le critérium en question.

J'ai identifié les commentaires de Porphyre et de Pappus; il est temps de m'expliquer à cet égard.

L'existence du premier de ces commentaires sur Euclide n'est à supposer que d'après le caractère des citations faites par Proclus; l'existence du commentaire de Pappus est, au contraire, amplement attestée, et nous savons qu'il s'étendait au moins jusqu'au Livre X des *Éléments* (¹); d'autre part, on sait que Pappus a repris et continué des commentaires de Porphyre sur Ptolémée (la *Syntaxe* et les *Harmoniques*); il semble donc avoir recueilli son héritage mathématique, et aussi bien le commentaire sur Euclide. Il importe peu dès lors que, dans les sources de Proclus, le travail de Porphyre se soit trouvé juxtaposé à celui de Pappus, ou bien que ce dernier ait entièrement refondu l'œuvre de son maître, tout en en mentionnant religieusement le nom, pour ce qu'il conservait de particulièrement intéressant.

6. Comme écrits que Proclus a pu utiliser directement, en dehors de ces derniers commentaires et de l'Ouvrage de Geminus, on doit, au contraire, faire entrer en ligne de compte :

A. Naturellement, tous ceux qui subsistent aujourd'hui, en y comprenant notamment l'opuscule *Sur les isopérimètres* de Zénodore (p. 165), publié par Hultsch dans son édition de Pappus. Il

(¹) *Voir* Heiberg, *Studien über Euklid*, Leipzig, Teubner, 1882, p. 163.

est inutile d'énumérer les autres mathématiciens; mais il est à noter que, comme philosophes, dans cette catégorie, en dehors de Platon et d'Aristote, nous ne rencontrons que Plotin (p. 21), pour une citation unique, relative à l'utilité des Mathématiques pour les jeunes gens; cette citation devait au reste être un lieu commun de l'École, car nous la retrouvons dans les commentaires d'Asclépios et de Philopon sur Nicomaque.

B. Comme ouvrages perdus, en dehors de celui de Porphyre déjà mentionné :

1° Un groupe mal défini, sans intérêt mathématique, représentant la tradition pythagoricienne dans son côté mystique, depuis Philolaos jusqu'à Théodore d'Asiné (?) (p. 130), et comprenant des écrits plus ou moins apocryphes comme l'ἱερὸς λόγος de Pythagore, les Oracles (λόγια) et les vers orphiques (p. 155). Il est facile de constater le peu de valeur qu'offrent en général ces sources pythagoriciennes, qu'il faut d'ailleurs bien distinguer de la tradition mathématique relative à l'École, telle qu'elle a été conservée d'après Eudème; il suffira de dire que notre commentateur y retrouve, donnée comme antérieure à Platon, la célèbre doctrine que toute connaissance n'est que réminiscence;

2° Un travail spécial du maître de Proclus, Syrianus (τῷ ἡμετέρῳ καθηγεμόνι, p. 129), sur la question de savoir si l'angle rentre dans la catégorie de quantité ou dans celle de qualité : Proclus en a extrait la plus grande partie de son commentaire sur la définition de l'angle (p. 121, 12 à 126). Syrianus, à son tour, avait cité son propre maître Plutarque et le mécanicien Carpos d'Antioche, ainsi qu'Apollonius et enfin Eudème de Rhodes pour un Livre écrit *Sur l'angle*. La citation d'Apollonius pouvait indifféremment provenir soit de Geminus, soit de Carpos, mais celle d'Eudème est plutôt à attribuer à ce dernier, car Geminus ne semble guère avoir, pour son compte, traité la question de Syrianus. Ainsi, la donnée relative à Eudème serait ici chez Proclus de troisième ou quatrième main, et aurait passé par des intermédiaires qui ne nous offrent que d'insuffisantes garanties. Il est donc permis de se demander si le prétendu Livre sur l'angle ne serait pas simplement un de ceux de l'*Histoire géométrique*, écrite par ordre de matières,

suivant l'usage de l'École d'Aristote, et comme le laissent supposer les rares indices que nous avons à son sujet;

3° Le *Traité astrologique* du même Carpos d'Antioche (p. 241). Cet auteur y aurait, semble-t-il, attaqué Geminus sur la distinction des théorèmes et des problèmes. On pourrait ici croire à une citation empruntée à Pappus, qui a tiré, probablement de ce même ouvrage, un renseignement pour sa *Collection mathématique* (p. 1026); mais cette citation serait assez peu digne de lui.

Quant à celle d'Ératosthène (p. 43), elle est probablement de seconde main, sans qu'il y ait grand intérêt à rechercher l'intermédiaire. La proposition citée, que la proportion (géométrique) est le lien des Mathématiques, se trouvait de fait dans le Πλάτωνικός d'Ératosthène, et on la retrouve dans les extraits assez étendus qu'en a faits Théon de Smyrne (*Mus.*, 30, 31). Mais, au lieu d'être énoncée comme appartenant en propre à l'auteur, elle était seulement supposée possible chez Platon, dans une interprétation proposée pour un passage bien connu de l'*Épinomide* (991,e). Si Proclus avait réellement lu l'ouvrage d'Ératosthène, au lieu de n'en connaître qu'une citation imparfaite, il aurait sans doute tout autrement mené sa réfutation.

Quant à la mention d'Énée d'Hiérapolis (p. 361), auteur d'un abrégé des *Éléments*, l'incertitude est complète, d'autant que l'on ne possède aucune donnée sur l'époque de la vie de ce géomètre.

7. Pour l'ensemble des autres écrivains cités dans Proclus, ou bien la présence de leurs noms dans des passages qui proviennent clairement, soit de Geminus, soit de Porphyre-Pappus, ou bien une analogie suffisante, atteste que les citations sont de seconde main. La seule difficulté peut être de savoir à laquelle des deux sources principales elles doivent être rapportées.

Cette difficulté n'existe guère en réalité que pour la partie du commentaire qui traite des postulats et axiomes; Pappus y apparaît déjà, tandis que Geminus y est cité jusqu'à sept fois. Tous deux ont également pu parler d'Apollonius et aussi de Héron d'Alexandrie. Ainsi on peut rapporter à Geminus la première citation d'Apollonius (p. 183), à Pappus la seconde (p. 194), quoiqu'elles concernent toutes deux le même point; mais la reproduction *in extenso* de la démonstration semble plutôt appartenir

à un commentaire. Quant à Héron, je crois moins que Geminus ait utilisé ses travaux de Géométrie, car on ne retrouve dans le commentaire sur les définitions aucune de celles qui appartiennent en propre à Héron et qui sont pourtant assez caractéristiques ([1]).

Ce commentaire sur les définitions est cependant la partie où Proclus a le plus suivi Geminus, comme l'attestent et la phrase qui le termine et les autres citations qui s'y trouvent ([2]). Sur les propositions, Proclus ne pouvait plus naturellement prendre Geminus pour guide; cependant, il ne perd pas l'occasion de rappeler ce qu'il lui a déjà emprunté ou de tirer de lui quelque nouvelle remarque; son nom reparaît donc encore cinq fois, et il faut aussi lui attribuer la mention d'un certain nombre d'auteurs pour des questions que Proclus n'a pu trouver que chez lui.

Cette circonstance soulève un doute pour ce qui concerne la polémique de Posidonius contre les Épicuriens et particulièrement contre Zénon de Sidon, polémique dont il est parlé dans le commentaire sur les propositions; car, malgré les rapports entre Geminus et Posidonius, rien n'obligeait sérieusement le premier à parler de cette polémique, tandis que les premiers commentateurs d'Euclide ont pu croire intéressant de la rappeler.

Pour les autres mentions, la distinction est facile à faire. De Geminus directement proviennent, outre celles déjà indiquées, les citations de :

1° Xénocrate (p. 279), d'après une tradition déjà passablement altérée;

2° Ératosthène (p. 111), au sujet de Ménechme. Cette citation est empruntée évidemment à la lettre à Ptolémée, que nous a conservée Eutocius; de la même source dès lors, et non pas d'Eudème, doit provenir la donnée sur Hippocrate de Chios (p. 213), comme premier inventeur de la méthode apagogique;

3° Théodore le mathématicien (de Soles) (p. 110);

4° Hippias, Persée et Nicomède.

([1]) J'entends celles qu'on rencontre dans les Εἰσαγωγαὶ τῶν γεωμετρουμένων (p. 44-46 de l'édition de Hultsch), et qui seules présentent un caractère sérieux d'authenticité.

([2]) Pour cette partie de son commentaire, Proclus ne paraît guère avoir utilisé en dehors de Geminus que la tradition mystique pythagoricienne et le travail précité de Syrianus.

Au travail de Porphyre-Pappus doivent au contraire se rapporter, en dehors des extraits de Ménélaos et de Ptolémée, les données historiques que renferme le commentaire sur les propositions et qui sont empruntées à Eudème sur Thalès, OEnopide et les Pythagoriciens. Quant au renseignement sur les rapports entre Platon et Léodamas, l'origine en est moins assurée, car nous le retrouvons aussi dans Diogène Laërce.

J'arrête ici cette analyse du commentaire de Proclus, au point de vue des sources qu'il a utilisées, et en particulier de l'Ouvrage de Geminus; mais je dois répéter en thèse générale ce que j'ai déjà dit pour un point particulier : c'est que les résultats de cette analyse ne peuvent jusqu'à présent être proposés qu'à titre provisoire, et que la discussion définitive doit suivre l'examen approfondi des fragments historiques conservés par Proclus.

1re Part

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GRUEY, professeur d'Astronomie et directeur de l'Observatoire de Besançon. LEÇONS D'ASTRONOMIE, RÉDIGÉES CONFORMÉMENT AU PROGRAMME DE LA LICENCE. 1 vol. in-4°, lithogr., 357 p. A. Hermann; Paris, 1885.

Par sa substance, par son ordre et sa forme, l'Ouvrage de M. Gruey est véritablement classique. Il a, entre autres mérites, celui d'initier le lecteur à la haute Astronomie en n'exigeant préalablement de lui que des connaissances absolument minimes. Toutes les formules employées, toutes les notions de Physique utilisées y sont en effet rappelées ou rigoureusement établies. Bien plus, rien ne suppose au lecteur l'étude préliminaire de la Cosmographie, les définitions et descriptions cosmographiques y étant exposées de pair avec l'Astronomie proprement dite. Voilà assurément un Ouvrage bien fait pour les étudiants de nos Facultés, qui d'ordinaire abordent la préparation à la licence avec une assez maigre connaissance du ciel.

Ces Leçons sont divisées en huit Livres :

Le Livre I est intitulé : *Méthodes générales de calcul.* L'auteur expose dès le début les principes de la Trigonométrie sphérique, en y comprenant les formules différentielles, qui permettent, non seulement d'évaluer les erreurs des inconnues quand on connaît celles des données, mais aussi souvent d'abréger les calculs. M. Gruey établit ensuite certains développements en séries très usités, puis la série de Lagrange; celle de Fourier est rappelée, et les propriétés de certaines sommes sont démontrées. Le dernier Chapitre est consacré à une théorie approfondie des erreurs accidentelles des observations. Cette belle théorie, dont l'auteur a emprunté le point de départ au Cours de l'École Polytechnique de M. Faye, est accompagnée de nombreux exemples et d'applications variées, qui la rendent particulièrement claire et intéressante. La méthode des moindres carrés, quelquefois si laborieuse, est complétée par le procédé plus pratique de Cauchy et Villarceau.

Dans le Livre II, M. Gruey traite des *méthodes générales d'observation*. L'observation d'un astre consistant à le viser et à relever la ligne de visée, dans l'espace et dans le temps, nécessite l'emploi

d'instruments de trois sortes : 1° les lunettes et les microscopes, 2° les instruments propres à la mesure des angles, tels que le sextant, le cercle répétiteur, etc., 3° les appareils propres à la mesure du temps, horloges et chronomètres.

Un Chapitre spécial est consacré à chaque genre d'instruments. Toutes les notions de Physique utiles ici, telles que les propriétés des lentilles, sont nettement établies. La question intéressante de la visibilité des astres, c'est-à-dire de la clarté des images sur la rétine, lorsqu'on fait varier l'objectif et l'oculaire, est discutée en détail.

A la suite de ces deux premiers Livres, qui sont pour ainsi dire la description de l'outillage de l'astronome, l'auteur aborde la Science astronomique en elle-même par l'examen de l'astre sur lequel nous vivons.

Le Livre III associe de la manière la plus heureuse et l'étude de la Terre et l'étude du mouvement diurne, qui lui appartient. Après avoir établi que la Terre est sensiblement sphérique et étudié son atmosphère réfringente, l'auteur décrit les lois du mouvement diurne, les systèmes de coordonnées liés à ce mouvement, et les instruments corrélatifs, lunette méridienne, grand cercle méridien, équatorial ; puis, revenant à la figure de la Terre, il explique comment le mouvement diurne conduit à des définitions de la latitude, de la longitude, absolument indépendantes de cette figure, et comment, dans une deuxième approximation toujours suffisante, on doit assimiler la Terre à un ellipsoïde de révolution. Les parallaxes et l'aberration diurnes occupent les dernières pages de ce Livre, qui se termine par quelques applications usuelles des lois du mouvement diurne.

Le Livre IV est consacré au Soleil. La position du Soleil relativement aux étoiles varie, sa distance à la Terre varie ; telles sont les deux variations, qui sont examinées sous les titres de mouvement circulaire et de mouvement elliptique du Soleil. L'équation du temps est discutée, et le temps moyen, le calendrier sont expliqués. Un Chapitre est affecté à la translation de la Terre, à la parallaxe et à l'aberration annuelles. Puis la précession des équinoxes, la nutation et leurs effets sur les coordonnées des étoiles sont étudiés. Les perturbations du mouvement elliptique, le mouvement séculaire de l'écliptique sont indiqués, et les positions

relatives de l'équateur et de l'écliptique sont calculées pour une époque donnée. La fin du Livre IV se rapporte à la rotation du Soleil et à certaines applications usuelles.

Le Livre V traite de la Lune. L'auteur examine successivement son mouvement circulaire et son mouvement elliptique, en indiquant les perturbations les plus importantes, puis sa rotation et les librations. Dans le dernier paragraphe, quelques applications sont présentées, entre autres la détermination des longitudes.

Le Livre VI, qui est intitulé : *Planètes, comètes, étoiles filantes,* est occupé presque totalement par le mouvement des grosses planètes, l'auteur se bornant à indiquer comment on peut déterminer l'orbite et l'éphéméride d'une petite planète ou d'une comète, en vue de la retrouver plus tard. Le procédé conduit à des calculs assez longs, de sorte que leur exposition détaillée ne rentre pas dans le cadre de l'Ouvrage. On pourra regretter qu'un aperçu des beaux travaux qui ont si bien assis la théorie des étoiles filantes n'ait pu trouver ici sa place. Mais la faute en est au programme de la Licence qui n'énonce même pas la question.

Dans le Livre VII, M. Gruey étudie, sous le nom de *phénomènes,* les éclipses de Lune et le phénomène essentiellement différent du passage d'un astre sur un autre, qui comprend les éclipses de Soleil, les passages de Vénus ou de Mercure sur le disque solaire, les occultations des étoiles par la Lune. Cette théorie est accompagnée d'une carte et trouve son application dans la détermination de la parallaxe du Soleil.

Enfin, le Livre VIII concerne les erreurs systématiques instrumentales. Après avoir nettement expliqué l'origine de ces erreurs, l'auteur expose comment on les mesure et établit les formules propres à en purger les observations. Les cercles divisés, le théodolite, la lunette méridienne, le cercle méridien sont soigneusement passés en revue. Le Cours se termine par quelques remarques qui s'appliquent à tous les genres d'observation.

Telles sont, dans leur ensemble, les *Leçons d'Astronomie* de M. Gruey, qui, par leur habile coordination, par leur netteté, par le soin avec lequel tous les détails sont classés et traités, nous semblent destinés à rendre les plus grands services à l'enseignement. L'auteur nous laisse entrevoir la publication prochaine d'une série d'exercices pratiques, dans l'ordre du cours. Nous désirons

vivement qu'ils viennent bientôt ajouter encore aux mérites de l'Ouvrage actuel. G. F.

MÉLANGES GRAUX : Recueil de travaux d'érudition classique dédiés a la mémoire de Charles Graux. Paris, 1884.

Plusieurs Mémoires de ce Recueil intéressent l'histoire de la Science mathématique.

M. Frédéric Blass cherche à restituer dans toute leur pureté quelques fragments mathématiques du vieux pythagoricien Archytas de Tarente, auquel on attribue des Livres sur les Mathématiques, une Harmonique, un Traité sur la Musique, des diatribes (?), un Traité sur la décade : il refait pour ce géomètre le travail qui a été fait si excellemment par Boeck pour Philolaüs.

Nous ne connaissons du Traité d'Archimède, *Des choses qui nagent sur l'eau,* qu'une traduction latine publiée pour le premier Livre avec les autres écrits d'Archimède, par Nicolas Tartaglia, en 1543, publiée complètement avec le second Livre en 1565, par le libraire vénitien Trojanus Curtius, d'après les manuscrits du géomètre de Brescia. M. J.-L. Heiberg, par un tour de force digne des savants de la Renaissance, restitue le grec de ce Traité; et, comme il le dit fort bien, ce travail n'a pas été inutile. On comprend maintenant beaucoup mieux la traduction latine, qui était parfois inintelligible, si on ne la retraduisait pas en grec; le savant danois a pu, en conséquence, améliorer le texte et la traduction; enfin, il a pu démontrer d'une manière irréfutable que le Traité est bien d'Archimède : on en sent le style à chaque page.

M. Bouché-Leclercq note sous le titre de *Chorographie astrologique* les rapports établis par les astrologues entre les signes du Zodiaque et les diverses régions terrestres plus particulièrement soumises à leur action. Les astrologues n'ont pas songé à tracer des portraits ethnographiques, ils ont imaginé ces divisions pour localiser l'effet de certains présages célestes applicables à des pays entiers, comme l'apparition de météores, comètes, bolides, la foudre même et surtout les éclipses. Un coup d'œil jeté sur les textes suffit pour montrer qu'ils ne suivaient pas un système, mais une quan-

tité de systèmes différents; les rapports établis entre les signes du Zodiaque et les régions reposent sur des associations d'idées extrêmement diverses dont la plupart nous échappent. M. Bouché-Leclercq met sous les yeux de ceux qui seraient tentés de déchiffrer ces énigmes des tableaux empruntés à Paul d'Alexandrie (vers 378 de J.-C.), à Dorothée de Sidon, à Manilius, à Ptolémée, à un certain Dapsos, à un certain Valens; si l'on parvenait à pénétrer ces mystères, peut-être que la Géographie et l'Histoire y apprendraient de quelle façon on appréciait dans le monde gréco-romain le caractère des divers peuples.

M. A. de Rochas d'Aiglun publie pour la première fois une traduction française du *Traité des machines* d'Athénée : le texte en a été publié deux fois. Quand vivait l'auteur? Son Livre est dédié à un Marcellus; on suppose généralement qu'il s'agit ici de M. Claudius Marcellus, un des lieutenants de Pompée, consul en l'an 51 avant J.-C., le client de Cicéron. L'auteur serait donc contemporain de Vitruve. Le principal intérêt de son travail consiste dans les renseignements historiques qu'il donne sur l'origine des machines et dans les comparaisons qu'on peut établir avec le texte de Vitruve. L'auteur nous décrit en termes passablement obscurs les *tours,* la *tortue qui porte le bélier*, le *trépan*, le *pont volant*, la *tortue des terrassiers,* la *tortue des mineurs,* la *tortue d'Hégétor*, l'*Hélépole,* les *Sambyques,* la *machine de Ctésibios,* etc. : « Ne nous accuse point de férocité, dit-il, en terminant, parce que nous avons rassemblé tant de renseignements relatifs à la prise des villes. C'est plutôt le contraire qu'il faut voir, car ce que nous venons d'exposer fait la sécurité d'une ville : ceux qui posséderont ces connaissances pourront en effet se garder contre les maux qui viendraient à les menacer, et notre Traité a été fait surtout contre ceux qui se révoltent contre les belles lois de l'empire romain. » H.

MÉLANGES.

ESQUISSE HISTORIQUE SUR LA MARCHE DU DÉVELOPPEMENT DE LA NOUVELLE GÉOMÉTRIE [1];

PAR HERMANN HANKEL.
(Traduction de M. DEWULF, colonel du Génie.)

La méthode des projections n'est pas le seul titre de Poncelet à l'immortalité dans l'histoire des Mathématiques.

Il y a encore deux autres théories fondamentales qu'il a développées le premier.

L'une d'elles est la théorie des *figures homologiques*. Poncelet appelle *homologues* ou *correspondants* deux points A, A′ des plans P et P′ (*fig.* 5) lorsque l'un deux est la projection de l'autre; à toute figure d'un des plans correspond une figure homologique dans l'autre. Imaginons qu'un des plans tourne autour de leur commune intersection s jusqu'à ce qu'ils s'appliquent l'un sur l'autre; nous obtenons ainsi deux figures homologiques dans un même plan, et elles sont situées homologiquement; deux droites correspondantes se coupent toujours sur la droite s que l'on nomme *axe d'homologie*. Dans la position primitive des deux plans, les droites qui joignaient deux points correspondants concouraient toutes au point de vue. On peut démontrer que les figures homologiques demeurent toujours en perspective quand les plans P et P′ tournent autour de leur intersection s, et que, même quand ils sont appliqués l'un sur l'autre, les droites qui joignent les points homologues concourent en un point O, le *centre d'homologie*.

Nous obtenons ainsi une relation extrêmement remarquable qui lie deux figures planes, relation qui permet toujours de déduire l'une des figures de l'autre au moyen de la règle seulement quand on donne le centre et l'axe d'homologie. Si l'on veut construire le triangle correspondant à un triangle donné ABC, tout est déterminé dès que l'on a pris à volonté, sur OA, le point A′. La figure que nous obtenons ainsi nous donne deux théorèmes corrélatifs et simultanés si nous regardons son tracé de deux points de vue un peu différents :

---

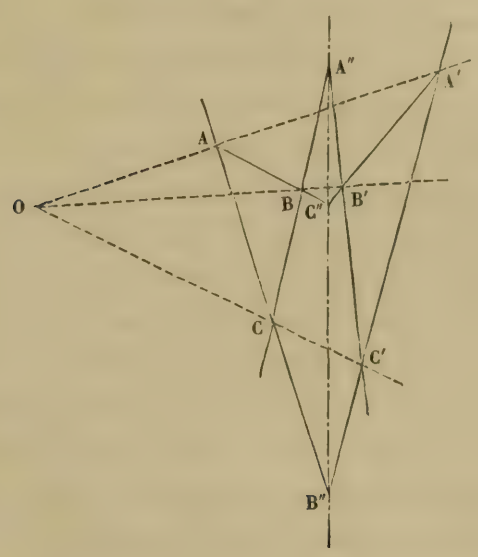
[1] *Voir* page 172.

Si les droites qui joignent les sommets correspondants de deux triangles concourent en un même point, les côtés correspondants des deux triangles se coupent, deux à deux, sur une même droite.

Si les points d'intersection des côtés correspondants de deux triangles se trouvent en ligne droite, les droites qui joignent les sommets correspondants concourent en un même point.

Ce sont là les théorèmes célèbres que l'on doit à *Desargues* et qui sont connus sous le nom de ce géomètre ; l'un d'eux est la ré-

Fig. 8.



ciproque logique de l'autre. Ce sont les premières conséquences de la théorie de l'homologie des figures de *Poncelet* qui est devenue l'un des principes les plus importants de la nouvelle Géométrie.

On est également redevable à *Poncelet* de l'introduction d'un autre principe lié au précédent, bien que quelques applications isolées en eussent été faites avant lui, notamment par Brianchon. On peut regarder l'homologie comme une méthode qui permet, par un procédé qui lui est propre (la projection), de transformer une figure en une autre de même nature, où un point et une droite correspondent, respectivement, à un point et à une droite de la première. Il existe une autre transformation où la nature de la seconde figure est différente de celle de la première.

Déjà de la Hire (*Sectiones conicæ*, 1685) avait fait l'importante

découverte de la théorie des polaires ([1]), dont le théorème fondamental est celui-ci :

Dans le plan d'une section conique, à tout point correspond une droite (la polaire), à toute droite correspond un point (le pôle); cette correspondante est telle que les polaires de tous les points d'une droite passent par le pôle de cette droite; et que, réciproquement, les pôles de toutes les droites qui concourent en un point se trouvent sur la polaire de ce point.

Supposons maintenant que l'on ait un polygone ABCD dans le plan d'une conique et que l'on construise les polaires a, b, c, d, ... des sommets; ces droites forment un multilatère, et l'intersection des polaires a, b n'est autre chose que le pôle de la droite AB. Nous obtenons ainsi une nouvelle figure dont les sommets (points) correspondent aux côtés (droites) de l'autre, et réciproquement. Toute propriété de la première figure s'applique à la seconde par une réciprocité spéciale. A des points qui se trouvent sur une même droite dans la première figure correspondent des droites qui se coupent en un même point et réciproquement.

Poncelet se servit systématiquement de cette transformation d'une figure en sa *polaire réciproque* comme d'une méthode pour faire surgir de théorèmes connus des théorèmes nouveaux. A tout théorème de Géométrie correspond ainsi un autre théorème polaire; et la Géométrie tout entière se décompose en une double série de vérités se développant parallèlement. Un ardent géomètre de cette époque, Gergonne, qui s'est acquis notamment un véritable titre à la reconnaissance des mathématiciens par la publication (1810-1831) de ses *Annales de Mathématiques*, publication qui fut si utile aux rapides progrès de la Géométrie, Gergonne, dis-je, fit encore un pas en avant dans cette voie. Il reconnut que ce parallélisme n'est pas seulement une conséquence accidentelle des propriétés des coniques, mais qu'il est, au fond, un principe

---

([1]) Nous devons signaler l'erreur manifeste commise par Hankel. Ce n'est pas de la Hire qui a découvert la théorie des pôles et polaires; cette théorie est due à Desargues qui l'a donnée en 1639 dans son Traité de Géométrie ayant pour titre : *Brouillon-projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan* (*Œuvres de Desargues*). Ed. Dewulf.

fondamental auquel il donne le nom de *dualité*. A côté de la Géométrie telle qu'elle est communément développée, où une droite est engendrée par le mouvement d'un point, se dresse une autre Géométrie non moins légitime où un point est engendré par la rotation d'une droite. Dans le premier cas, la droite est le lieu géométrique du point en mouvement; dans le second, le point est l'intersection géométrique de la droite en rotation.

La dualité considérée dans ce sens général a été adoptée comme principe par la Géométrie moderne (1).

Dans les années qui suivirent de près l'apparition du *Traité des propriétés projectives* de Poncelet, et pendant que Poncelet lui-même et beaucoup d'autres géomètres français travaillaient à l'extension de la nouvelle Science, une ère d'ardentes et fructueuses recherches géométriques s'ouvrit en Allemagne. Möbius, Plücker, Steiner sont les noms illustres qui s'offrent d'abord à nous. On peut établir avec certitude l'indépendance des deux premiers et de Poncelet. En 1823, Möbius avait déjà fait ses premières publications sur ses études géométriques; on y trouve toutes les idées fondamentales du grand Ouvrage qui parut plus tard; les travaux de Plücker remontent à l'année 1826; et ce géomètre affirme catégoriquement (Préface, *Développements de Géométrie analytique*, t. II) que le grand Ouvrage de Poncelet lui était inconnu lorsqu'il achevait, lui-même, sa première grande publication et qu'il a été réellement conduit à ses recherches par l'essai de Géométrie analytique de Biot (2).

---

(1) Le principe de la polarité réciproque de Poncelet est aussi général que celui de la dualité de Gergonne. Cette vérité, déjà entrevue peut-être, est nettement démontrée par M. G. Tarry dans un Mémoire inédit que ce géomètre m'a fait l'honneur de me communiquer. Ed. Dewulf.

(2) Hankel affirme l'indépendance *absolue* de Möbius et de Plücker vis-à-vis de Poncelet, elle parait contestable. Le moment d'élucider cette question n'est pas venu; la gloire des géomètres allemands n'y est d'ailleurs pas intéressée. Steiner a marché sur les traces de Poncelet (1), cependant Hankel le nomme le plus grand géomètre qui ait paru sur la terre depuis Apollonius (2), et M. Geiser ne le proclame-t-il pas le plus grand, à certains égards, des géomètres de tous les temps : passé, présent et avenir? (3) Ed. Dewulf.

(1) Plucker, *Anal.-geom. Entwickelungen, Vorrede*, p. V.

(2) *Voir* plus bas, p. 2[illegible].

(3) *Annali di Matematica*, 2e série, t. VII, p. 88.

C'est peu après la vingtième année de ce siècle que les études mathématiques commencèrent à refleurir en Allemagne. Avant cette époque on trouve à peine, dans notre patrie, un mathématicien digne d'être cité; il faut cependant excepter Gauss qui, sans compagnon de route, parvint dans sa voie à une hauteur sublime. Les écrits et les méthodes d'Euler tenaient encore le premier rang, les grands travaux des mathématiciens français restaient presque inconnus. Alors un nouveau courant se dessina tout à coup; des talents de la plus haute distinction se montrèrent, au même moment, dans toutes les branches des Mathématiques; ils s'emparèrent, sans difficulté, de tous les matériaux déjà préparés avant eux pour élever, avec une rapidité surprenante, les plus beaux monuments; si l'on veut assigner une date déterminée à la renaissance des Mathématiques en Allemagne, c'est l'année 1826 qu'il faut indiquer; c'est alors, en effet, que les efforts énergiques de Crelle parvinrent à fonder dans notre pays le premier *Journal de Mathématiques,* qui fut ouvert à toutes les nouvelles investigations et qui devint bientôt le plus important du monde entier.

Le calcul barycentrique de Möbius (1826), « œuvre capitale que l'on ne pourra jamais assez admirer », tire son nom de la méthode originale dont il se sert pour rapporter un point quelconque d'un plan à trois points fondamentaux, en le considérant comme le centre de gravité de trois poids fixés aux points fondamentaux. Les valeurs de ces trois poids remplacèrent les coordonnées cartésiennes ordinaires. La notion des coordonnées se présenta, pour la première fois, sous un nouvel aspect qui conduisit bientôt à une manière beaucoup plus générale d'envisager cette idée. Les coordonnées barycentriques furent le premier exemple des coordonnées *homogènes* dont l'usage s'est généralisé aujourd'hui en Géométrie analytique, et déjà apparaît avec Möbius, leur avantage de donner des formules symétriques et élégantes.

Ce furent ces propriétés de ses coordonnées qui permirent à Möbius de *découvrir par le calcul* une série de fort beaux théorèmes de Géométrie; succès presque inouï jusqu'alors, si l'on en excepte les théorèmes concernant les rapports différentiels des courbes, et qui mit en pleine lumière les avantages de la nouvelle méthode. Bien qu'un assez grand nombre des théorèmes découverts par Möbius fussent connus depuis les siècles précédents, ils étaient alors presque

entièrement oubliés, et le mérite du géomètre n'en est pas affaibli; ces théorèmes font maintenant partie intégrante de la Science et ne peuvent plus être perdus [1]. Ils se rapportent, pour la plupart, aux relations métriques, mais à ces relations métriques qui ne dépendent pas des relations de grandeurs et d'angles des figures, de la mesure des angles et du *Magister Matheseos*, comme le dit Möbius lui-même (1823), mais seulement des relations descriptives, c'est-à-dire qui ne dépendent que de la situation, ou, pour employer le langage de Poncelet, qui sont *projectives*. A cette catégorie appartiennent, par exemple, les relations entre les rapports de la *double section* et de la *section triangulaire*.

Bien qu'à l'origine Möbius eût découvert ces théorèmes par le calcul, il voulut leur donner un fondement *purement géométrique;* les aptitudes de ce savant le dirigeaient plutôt vers la Géométrie que vers l'Analyse.

Il donna à l'expression géométrique de ces théorèmes cette généralité indépendante de toute situation accidentelle qui depuis est devenue indispensable à la Science; le premier, il se servit de ce principe que AB et BA représentent le même segment, mais pris en signe contraire; il posa $AB = -BA$ ou $AB + BA = 0$. Si l'on donne un certain nombre de points sur une droite et si ces points sont réellement dessinés, la suite des lettres indique quels sont les segments qui doivent être pris avec le même signe, quels sont ceux qui doivent être pris en sens contraire; les relations qui existent entre ces segments prennent, moyennant cette convention, une forme qui reste la même dans tous les cas, comme, par exemple,

$$AB + BC + CA = 0.$$

Par ce *principe des signes* développé par Möbius dans toute sa généralité et dans ses conséquences, non seulement les relations métriques acquirent une élégance inconnue jusqu'alors, non seulement on mit de côté le pénible principe des « positions corrélatives » de Carnot qui exige toujours une certaine hypothèse sur les relations de position d'une figure primitive, mais encore et sur-

---

[1] *Voir* ci-dessus les réflexions de Hankel au sujet des théorèmes retrouvés par Carnot. Ed. Dewulf.

tout la vraie nature des relations de grandeurs fut mise en pleine lumière; la Trigonométrie elle-même conquit pour la première fois une base solide par l'application de ce principe.

On doit aussi à Möbius d'avoir établi le principe de la correspondance géométrique et de lui avoir donné toute son importance. Deux figures de l'espace sont correspondantes quand à chaque élément de l'une d'elles il en correspond un ou plusieurs dans l'autre suivant une loi déterminée, les éléments correspondants pouvant être de même nature ou de nature différente. Les figures polaires réciproques et les figures homologiques de Poncelet donnent un exemple, les unes du dernier cas, les autres du premier. En outre, à l'un des éléments de l'une des figures, il correspond un ou plusieurs éléments de l'autre : ce sont la *correspondance simple* (univoque) et la *correspondance multiple*.

La correspondance simple (univoque), dans laquelle un point de l'une des figures correspond à un seul point de l'autre, est celle des figures homologiques que Möbius, ignorant les travaux antérieurs de Poncelet [1], découvrit de son côté et nomma *collinéaires;* sa conception a beaucoup plus de généralité que celle de Poncelet; et, en effet, il ne considère pas seulement des figures collinéaires dans un même plan, mais il regarde les plans eux-mêmes (c'est-à-dire leurs points) comme des figures collinéaires [2]. Il étudie ensuite la relation qui existe entre deux plans collinéaires superposés d'une manière quelconque, et détermine leurs points doubles (coïncidents). Il trouve ainsi, à son tour, la situation perspective de deux plans collinéaires. On peut comparer, de la même manière, les *ponctuelles* collinéaires (ou séries de points situés sur des droites) quand les droites se coupent ou sont superposées. Möbius construisit aussi l'image collinéaire pour l'espace à trois dimensions; cette image donne un nouvel espace à trois dimensions; comme l'espace à trois dimensions est unique, le second espace coïncide, en réalité et dans toute son étendue, avec le premier, mais idéalement il peut être conçu comme distinct.

---

(1) Il est regrettable que Hankel ne prouve pas cette affirmation.

Ed. Dewulf.

(2) Poncelet n'envisage pas seulement les figures homologiques dans le plan, il étend cette conception aux figures quelconques de l'espace (*Traité des propriétés projectives,* Supplément). Ed. Dewulf.

Si aux conditions précédentes on en ajoute une nouvelle, les figures homologues deviennent *semblables*, et enfin, moyennant une nouvelle restriction, elles deviennent *égales* et congruentes. Cette correspondance a fait aussi l'objet des investigations de Möbius.

Deux ans seulement après le calcul barycentrique de Möbius parurent les *Développements de Géométrie analytique* (1828) de *J. Plücker*, ouvrage absolument indépendant du premier, et qui marque le commencement d'une ère nouvelle pour la Géométrie analytique. Plücker lui-même qualifie sa méthode de méthode purement analytique, et il la caractérise comme il suit : « Dans toute équation entre deux coordonnées je vois un lieu géométrique et dans le système de deux de ces équations les intersections de deux lieux ; enfin et surtout, dans toute troisième équation qui est une conséquence algébrique des deux premières, je vois un nouveau lieu géométrique renfermant les intersections des lieux représentés par les deux premières équations et dont la nature dépend de la forme de l'équation résultante (1). Il suffit presque toujours de marquer la combinaison par un coefficient indéterminé; et même quand la forme des équations est une fois connue, il suffit de les désigner elles-mêmes par un symbole (2) ». Après avoir créé la méthode des notations symboliques et des coefficients indéterminés que *Bobillier* trouva en même temps que lui, et sur laquelle repose toute la nouvelle Géométrie analytique, il débarassa cette science de l'obligation de se reporter constamment aux axes des coordonnées qui, jusque-là, s'étaient toujours glissés, comme un élément étranger, devant les lignes et les figures considérées. Cette méthode originale mit le géomètre en relation directe avec les lignes elles-mêmes; la combinaison de leurs symboles conduisit, sans avoir recours aux fastidieuses éliminations qui étaient inévitables jusqu'alors, et, pour ainsi dire spontanément, aux relations géométriques que l'on déduisit très simplement des équations. La Géométrie analytique put dès lors opérer sur les figures elles-

---

(1) C'est presque mot pour mot ce qu'avait dit Lamé, en 1818, à la page 28 de son *Examen des différentes méthodes, etc.*, Ouvrage précieux que Hankel paraît n'avoir pas connu. Ed. Dewulf.

(2) C'est ce que fait encore Lamé, *ibid.*

mêmes, ainsi que l'a toujours fait la Géométrie synthétique; ses conquêtes dans le champ purement géométrique ne le cédèrent en rien à celles de la Géométrie pure; elles eurent même le dessus pour un instant ([1]).

Mais ce triomphe devait être de courte durée; car, en 1832, *Jacob Steiner* publia son *Développement systématique de la dépendance des figures géométriques*. Steiner est le plus grand génie géométrique qui ait paru sur la terre depuis le temps d'Apollonius; son Ouvrage contient les propriétés fondamentales « qui renferment en elles le germe de tous les théorèmes, porismes et problèmes géométriques qui nous ont été proposés, en si grand nombre, dans les temps anciens et modernes. Afin de dominer toutes ces propriétés dépendantes les unes des autres, il fallait trouver un fil conducteur, une origine commune.

» L'ouvrage de Steiner a découvert l'organisme qui relie entre elles les manifestations diverses du monde de l'étendue. Il existe un petit nombre de rapports fondamentaux extrêmement simples d'où découle le schématisme au moyen duquel on déduit logiquement et sans aucune difficulté tous les autres principes. En appliquant judicieusement ces quelques rapports fondamentaux, on se rend maître de l'objet entier; l'ordre s'introduit dans le chaos et l'on découvre comment toutes les parties se relient entre elles, se disposent en séries dans une ordonnance régulière, et comment les choses corrélatives se réunissent en groupes nettement déterminés. On entre ainsi en possession des éléments dont se sert la nature pour distribuer aux figures le nombre infini de leurs propriétés avec la plus stricte économie et, pour ainsi dire, de la manière la plus simple. » C'est la définition pittoresque que Steiner donne lui-même du but qu'il a atteint.

Il reconnut, dans le beau théorème sur la génération d'une conique par l'intersection de deux faisceaux collinéaires (projectifs) et dans le théorème dualistique, le principe fondamental d'où l'on

---

([1]) Nous avons la conviction que l'historien si consciencieux dont nous traduisons l'intéressante étude aurait attribué à Lamé une partie des titres de gloire qu'il décerne ici à Plücker s'il lui avait été donné de parcourir l'*Examen des méthodes* publié dix ans avant les *Analytisch-geometrische Entwickelungen*.

Ed. Dewulf.

déduit spontanément et comme par un simple jeu, pour ainsi dire, les innombrables et merveilleuses propriétés de ces courbes si remarquables. Il suffit de combiner les théorèmes les plus simples, de posséder cette imagination géométrique qui permet de voir une même figure sous tous ses aspects pour augmenter indéfiniment le nombre des propriétés de ces courbes.

Le Livre de Steiner clôt l'époque des sections coniques, des figures correspondantes de l'espace, des surfaces du second ordre et des théories qui s'y rattachent; tout ce que l'on a écrit depuis sur ce sujet se réduit à une étude plus approfondie, au perfectionnement de la forme.

Avec *Steiner* s'ouvre la deuxième période de la nouvelle Géométrie. La théorie des courbes et des surfaces du second ordre étant épuisée, on aborda (¹) celle des courbes et des surfaces *algébriques d'un ordre plus élevé*. *Steiner*, par la voie synthétique, et *Plücker*, par la voie analytique, furent les fondateurs de cette époque dont aujourd'hui nous avons parcouru la moitié. [Plücker, *Théorie des courbes algébriques*, 1839. Steiner, son grand Mémoire *Sur les courbes algébriques à centre* (*Journal de Crelle*, vol. 47, 1846)].

Il ne peut entrer dans mes vues d'étudier de près cette seconde période et cette nouvelle direction : elles sont en dehors des limites que je me suis nécessairement imposées dans cette Introduction. Les résultats obtenus pendant la première période, celle que termine le Livre de Steiner (*Développement systématique*) sont ceux dont nous aurons à nous occuper. Nous pourrions donc terminer ici nos préliminaires historiques, si nous ne devions faire mention de deux hommes qui, après 1832, ont cultivé la science qui nous occupe d'une façon magistrale, j'entends parler de *Chasles* et de *von Staudt*.

Le premier, Michel Chasles, fonda sa réputation sur son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie* (1837), où il expose les découvertes des géomètres anciens et modernes jusqu'à Poncelet avec une extrême clarté, sinon toujours d'une manière scrupuleusement historique; le tableau très

---

(¹) Ce sujet avait été abordé précédemment par Poncelet, et il le fut à la même époque par Bobillier (*Annales de Gergonne*, 1828). Ed. Dewulf.

animé qu'il a tracé fait ressortir l'avantage des recherches de Géométrie pure sur celles de la Géométrie analytique. Dans un grand nombre de Notes, il donne une riche collection des plus belles applications des méthodes anciennes et modernes.

Dans ces Notes, ainsi que dans le grand Mémoire *Sur deux principes généraux de la Science, la dualité et l'homographie,* il développe les méthodes d'où il tire simplement, mais avec une surprenante habileté, un nombre incroyable de théorèmes très élégants. Il est vrai que les méthodes qu'il donne comme nouvelles ne le sont pas toujours, ou ne lui appartiennent pas exclusivement; elles se trouvent en partie dans *Möbius,* en partie dans *Steiner.* Telles sont l'importante distinction du sens d'un segment, l'introduction du double Rapport qu'il nomma anharmonique (ἀνα-ἁρμονική et non ἀ-ν-ἁρμονική), la démonstration générale de la corrélation réciproque et de la corrélation collinéaire (dualité et homographie). A cette époque du reste, où le développement de la Géométrie fut extrêmement rapide, l'expansion de la litttérature géométrique fut relativement lente, les idées nouvelles et fécondes se trouvaient, pour ainsi dire partout, dans l'air et ne pouvaient manquer de fructifier au même moment dans la pensée de tous les géomètres capables de produire: aussi les voyons-nous presque toujours apparaître sur des points différents et indépendamment les unes des autres. Il est étrange cependant que, dans ses écrits postérieurs, même dans son dernier et grand Ouvrage: *Rapport sur les progrès de la Géométrie,* 1870, où il s'appesantit sur ses propres travaux, Chasles ne dise pas un mot de l'incontestable priorité des géomètres allemands (1). Par contre, nous devons reconnaître que son *Aperçu historique* a peut-être plus contribué qu'aucun autre Ouvrage,

---

(1) C'est une erreur. A la page x de la Préface de sa *Géométrie supérieure,* publiée en 1852, Chasles reconnaît que Möbius, le premier, a appliqué entièrement la règle des signes. A la page XXII de la même Préface, il cite les travaux de Möbius et Steiner. Enfin, à la page XXXI, il explique pourquoi il n'a pu citer les travaux de Möbius dans son *Aperçu historique.*

« Quant au Rapport de Chasles, ce n'est pas un écrit sur les progrès de la Géométrie en général, mais bien un rapport sur les progrès de la Géométrie *en France.* Chasles l'a rédigé par ordre et dans un but spécial bien déterminé. Ce n'était qu'accidentellement qu'il pouvait parler des géomètres étrangers : il l'a fait en mainte occasion, et ce ne sont pas les géomètres allemands qui ont été le plus oubliés. »

ED. DEWULF.

même en Allemagne, aux progrès de la Géométrie; la vivacité de son style, ses aperçus lumineux, ses vivantes esquisses des théories les plus importantes ont beaucoup augmenté le nombre, bien restreint jusqu'alors, des amateurs de la Géométrie.

Le grand Ouvrage de Chasles, *Traité de Géométrie supérieure*, 1852, ainsi que son *Traité des sections coniques*, Ire Partie, 1865, malgré l'importance de leur objet, n'eurent pas, chez nous du moins, le même succès que l'*Aperçu*. De même aussi, les travaux les plus récents du géomètre français ne montrent plus chez lui la même force de production et sont restés bien en arrière de ceux qui ont été publiés en Allemagne.

Après les géomètres dont nous avons déjà parlé, nous devons encore citer le professeur d'Erlangen, von Staudt. Sa trop concise *Géométrie de situation*, 1847, est un Ouvrage classique magistral. Malheureusement l'extrême laconisme du style, le manque d'additions explicatives et le caractère éminemment abstrait de sa méthode l'ont rendu difficile à comprendre et l'ont si bien empêché de se répandre que l'auteur, mort en 1867, n'a pas vécu dans la période de sa gloire. A l'inverse de tous ses prédécesseurs et notamment de Chasles, qui a fondé son *Traité de Géométrie supérieure* sur le double rapport, qui a fait un usage constant des *relations métriques* et, par suite, du *calcul*, von Staudt s'est proposé, dans son Opuscule, de *faire de la Géométrie de situation une science indépendante et pouvant se passer des mesures* (Préface). Il a voulu fonder la nouvelle Géométrie sans aucune considération de relations métriques et exclusivement sur des relations de *rapports de situation;* il a voulu démontrer par la seule Géométrie de situation tous les théorèmes qui ne se rapportent pas immédiatement aux propriétés des grandeurs. Comparons son exposition à celle de Steiner, par exemple. Celui-ci se sert des relations métriques pour établir toutes ses théories, même celles qui concernent la situation proprement dite; mais, la base une fois fixée, il change de méthode et n'opère plus qu'au moyen des propriétés de situation. Il est évident que la méthode de Staudt offre l'avantage d'une plus grande unité systématique, d'une plus grande netteté et de plus d'élégance. Dans ses *Additions à la Géométrie de situation* (1856-1860), l'auteur a montré ce que peut sa méthode pour les progrès de la Science. On ne peut nier cependant

qu'elle ne présente en elle-même un obstacle à son développement, ce qui lui constitue un grave défaut.

Quand des propriétés diverses, mais inséparables, se rapportent à un même objet, soit par sa nature, soit par la manière dont nous nous le représentons; quand des notions différentes, mais dépendantes les unes des autres, se présentent, l'analyse qui doit y être appliquée n'est véritablement propre et partant réellement bonne que quand elle ne perd jamais de vue la connexion des choses diverses et quand elle ne sépare pas celles qui, par leur nature, sont étroitement liées. Lorsque ces conditions ne sont pas remplies, qu'on isole une partie de l'objet de ses autres parties qui en sont la conséquence obligée, on arrive toujours à des systèmes artificiels, à de subtiles abstractions au milieu desquelles leur auteur seul pourra se mouvoir à son aise, mais qui doivent disparaître à court délai de la Science quand on se trouve à une époque de développement logique. Il est difficile de mettre en doute les défauts plus ou moins accentués de cette nature de l'Ouvrage de Staudt, ils peuvent expliquer son peu de succès. Aussi *Reye* a-t-il cherché à élargir autant que possible le cadre des méthodes de Staudt dont il s'est servi dans son excellente *Géométrie de situation* (IIe Partie 1866-1868).

On trouve, dans cet Ouvrage de Staudt, classique par sa singularité caractéristique, un de ces essais d'enserrer dans un schématisme abstrait, dans un système artificiel, l'infinie variété de la nature et ses manifestations multiples, un de ces essais qui ne sont possibles que dans notre pays, la patrie des méthodes rigoureusement classiques et, nous devons le dire, du pédantisme scientifique. Au point de vue des sciences exactes, un Français vaut certainement un Allemand, mais il prend ses aides là où il les trouve; il ne sacrifie pas l'intuition à la manie de systématiser, ni la facilité d'une démonstration à la pureté de la méthode. Dans la paisible ville d'Erlangen, Staudt, tout absorbé dans sa pensée, a pu développer pour lui-même son savant système qu'il a eu quelquefois l'occasion d'exposer à un ou deux auditeurs assis devant son bureau; mais, à Paris, dans le milieu vivifiant de nombreux auditeurs et de savants, il eût été impossible de donner naissance à ce système.

Arrivé à la fin de mon Introduction historique, je suis dispensé de définir exactement ce que, depuis quarante ans, on a coutume

de nommer *Géométrie nouvelle*. Il est toujours difficile et dangereux de définir en quelques mots une science entière avec toute la richesse de ses méthodes et de son domaine. Le développement historique, tel que je l'ai exposé, met en pleine lumière son origine, son essence et son but.

La différence essentielle qui existe entre cette nouvelle Géométrie et la Géométrie dite analytique consiste en ce qu'elle opère sur les figures géométriques elles-mêmes et non sur leurs équations algébriques, et qu'elle découvre et démontre leurs propriétés par des constructions géométriques et non par la combinaison algébrique de leurs symboles. Cependant ces méthodes si différentes au premier abord ont entre elles la plus étroite parenté, et plus les deux sciences progressent, plus elles se rapprochent. C'est à tel point qu'il arrive fréquemment qu'une légère modification dans la manière de s'exprimer suffit pour passer du raisonnement de l'une des sciences à celui de l'autre.

Bien plus grande est la différence, tant pour l'étendue de leurs domaines que pour la forme, entre la nouvelle et l'ancienne Géométrie, quoiqu'elles aient toujours ce caractère commun, l'évidence et la considération directe des figures.

En ce qui concerne le domaine, la Géométrie ancienne, au moins pour la partie qui communément est la seule connue, est fondée sur le théorème de Pythagore et sur celui de la somme des angles d'un triangle; sauf de rares exceptions, ses théorèmes se rapportent aux rapports de segments et d'angles; enfin, pour ses constructions, elle se sert du cercle. La nouvelle Géométrie ne fait aucun usage du théorème de Pythagore; ses théorèmes concernent les rapports de situation et les relations métriques qui en dépendent; enfin ses constructions n'exigent pas l'emploi du cercle. La Géométrie ancienne construit avec la règle et le compas, la Géométrie nouvelle ne se sert que de la règle. La Géométrie ancienne se borne à la recherche des propriétés des figures géométriques qui subsistent dans les figures congruentes ou semblables, la nouvelle Géométrie s'occupe des propriétés que la projection n'altère pas.

C'est pourquoi la nouvelle Géométrie pourrait, à juste titre, être nommée *Géométrie de situation*, comme on l'a fait souvent, ou encore *Géométrie projective*.

D'un autre côté, ce n'est pas non plus sans raison qu'on la dé-

signe sous le nom de *Géométrie synthétique* par opposition à la Géométrie analytique, à la condition cependant que, dans une certaine mesure, on donne à ces mots leur signification propre, celle qui a été établie par les mathématiciens grecs et les logiciens. La distinction entre la méthode synthétique et la méthode analytique, telle qu'elle a été définie primitivement par Platon, n'existe plus en dehors des Traités de l'ancienne Géométrie élémentaire. Toutes les branches des Mathématiques se servent indifféremment des deux méthodes.

Plus tard, ce furent les philosophes qui donnèrent le nom de *synthétique* à la méthode qui procède graduellement du simple au composé, tandis qu'ils appelèrent *analytique* celle qui déduit le simple de principes généraux. En ce sens, la nouvelle Géométrie n'est pas moins analytique dans ses méthodes que la Géométrie des coordonnées dite analytique. Depuis le XVIe siècle, on a coutume de nommer *analyse* toutes les parties de la Science où l'on fait usage du calcul et des formules, c'est-à-dire celles qui ont pour objet les grandeurs variables, et *synthèse* alors, la méthode de la Géométrie, celle qui construit les figures elles-mêmes. Dans ce sens, on peut cependant apppliquer à la Géométrie l'épithète de *synthétique,* mais il serait préférable de l'appeler *Géométrie constructive.*

Je pourrais, peut-être, caractériser encore autrement notre méthode. Avec toute la fierté d'un savant, *Euclide* répondit un jour à son roi *Ptolémée* qui, je le suppose, trouvait rebutante la pénible étude des *Éléments* : Il n'existe pas de chemin royal en Mathématiques. Dans un sens plus élevé, *la nouvelle Géométrie est ce chemin royal!*

FACULTÉS DES DÉPARTEMENTS.
SUJETS DE COMPOSITION DONNÉS AUX EXAMENS DE LICENCE.

SESSION DE JUILLET-AOUT 1884.

Besançon.

Cinématique. — Un segment de droite AB de longueur invariable se meut en restant tangent à un cercle fixe C, tandis que son extrémité A décrit une tangente T fixe de ce cercle. Construire le centre instantané et trouver les deux courbes qui, dans ce mouvement, roulent l'une sur l'autre sans glisser.

Dynamique. — Un point pesant M est assujetti à demeure sur une droite D qui tourne uniformément autour d'un axe vertical A. On demande d'étudier le mouvement du point mobile sur la droite D, connaissant sa vitesse initiale u dans ce mouvement relatif, ainsi que sa distance initiale a au pied sur D de la perpendiculaire commune à l'axe vertical A et à cette droite D. Discuter. Dire comment varie la pression que le point mobile exerce sur la droite.

Analyse. — Sur une surface quelconque de révolution, on considère les courbes c telles que la normale principale rencontre constamment l'axe de la surface :

1° Trouver l'équation différentielle des projections des courbes c sur un plan perpendiculaire à l'axe;

2° Quelle doit être la surface pour que les courbes c coupent tous les méridiens sous un angle constant?

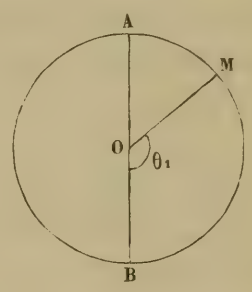
3° La surface étant un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est φ, discuter les courbes c et chercher leur équation quand on développe le cône sur un plan.

Bordeaux.

Mécanique. — Un tube circulaire infiniment mince, AMB, de masse M et de rayon a, est mobile autour d'un axe vertical AB.

Un point pesant M de masse m est abandonné à lui-même, sans vitesse, à l'intérieur de ce tube. On suppose qu'au moment où l'angle MOB est égal à θ, le système soit animé de la vitesse angulaire ω, autour de AB. On demande d'étudier le mouvement ultérieur du système.

Notes pour les candidats. — L'application des théorèmes généraux relatifs à la dynamique des systèmes donne les deux intégrales premières, nécessaires à la solution.



On combinera ces équations et on les discutera de manière à en déduire les diverses conditions du mouvement.

On étudiera les variations respectives de θ et de ω.

On discutera le problème pour les diverses valeurs du rapport $\frac{m}{M}$ (de zéro à ∞).

On examinera le cas des petites oscillations du point m.

Si le temps le permet, on vérifiera l'exactitude des équations du mouvement, à l'aide des diverses méthodes connues, particulièrement :

1° A l'aide des équations de Lagrange;

2° Par la théorie des mouvements relatifs;

(On pourra, si l'on veut, pour simplifier l'expression des constantes initiales, faire $\theta_1 = 2\pi$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_1 = 0$.

Analyse. — On appelle *caustique* l'enveloppe des rayons partis d'un même point lumineux et réfléchis ou réfractés par une courbe donnée que l'on suppose située dans le même plan que les rayons.

Trouver l'équation générale des caustiques par réflexion.

Application au cas :

1° De la parabole $y^2 = 2ax$ pour un point lumineux quelconque pris sur l'axe;

2° Du cercle $x^2 + y^2 = a^2$ pour un point lumineux situé à l'infini sur l'axe ox.

Caen.

Mécanique. — Quatre points matériels, de masses égales, assujettis à rester sur un plan donné fixe et parfaitement poli, occupent les quatre sommets d'un losange articulé dont les côtés sont constitués par quatre tiges rigides et sans masse appréciable. On imprime au système un mouvement connu dans le plan donné, et on propose de trouver le mouvement ultérieur, en admettant qu'aucune force extérieure n'intervienne et qu'il ne se produise aucun frottement aux articulations. Pour déterminer le mouvement qui aura lieu après que deux des points seront venus se choquer, on regardera ces points comme des corps absolument dénués d'élasticité.

Examiner en particulier le cas où, à l'instant initial, les milieux de deux côtés opposés du losange auraient des vitesses nulles.

Analyse. — 1° Déterminer un conoïde droit tel que ses lignes asymptotiques, autres que les génératrices, se projettent sur le plan directeur du conoïde suivant des courbes qui coupent sous un angle constant et donné les projections des génératrices sur le même plan.

2° Calculer, en se servant du théorème de Cauchy, l'intégrale

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\cos ax\,dx}{1 + x^4}$$

Clermont.

Mécanique. — Deux masses pesantes m, m' sont fixées aux extrémités de deux cordons s'enroulant, l'un sur un cylindre horizontal s'appuyant sur deux coussinets au moyen de deux tourillons; l'autre sur une roue perpendiculaire à l'axe du cylindre et ayant son centre sur cet axe.

Étudier le mouvement de rotation de ce système dans l'air dont la résistance est proportionnelle aux vitesses des masses m et m'.

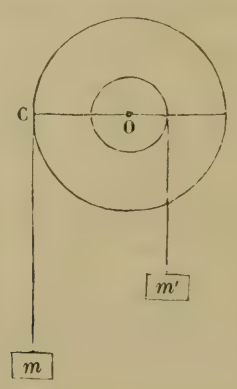
On tiendra compte de la masse du cylindre et de la roue.

On négligera le poids des cordons et le frottement des tourillons sur les coussinets.

Analyse. — Équation aux dérivées partielles des trajectoires orthogonales d'une série de surfaces représentées par l'équation

$$F(x, y, z, c) = 0.$$

Exemple : $x^2 + y^2 + z^2 + cx = a^2$. Déterminer la fonction arbitraire de manière que les trajectoires soient des sphères.



Dijon.

Mécanique. — Pendule de Foucault.

Analyse. — Un point fixe O et une droite fixe OA passant par ce point étant donnés, on demande de former et d'intégrer l'équation aux dérivées partielles des surfaces jouissant de cette propriété qu'une tangente Mm menée à l'une d'elles, d'un point quelconque M de la droite OA, soit égale en longueur au segment rectiligne MO.

Grenoble.

Mécanique. — Un fil flexible inextensible et sans masse, de longueur $2a$, passe dans un petit anneau fixe horizontal placé en un point O de l'axe d'un cylindre de révolution de rayon R dont l'axe

est vertical, anneau dans lequel il peut glisser librement. Ce fil se termine par deux masses m et m'. La première m assujettie à se mouvoir sans frottement sur la surface du cylindre est attirée vers le point O par une force $\mu m \rho$ proportionnelle à la distance ρ de m au point O ; la deuxième masse m' est pesante. La vitesse initiale de m' est nulle ; celle de m est horizontale et égale à $R\omega$. La distance initiale ρO de m à O est inférieure à $2a$. — On demande le mouvement du système et la tension du fil à chaque instant. — Que faut-il pour que le fil soit tendu dès l'origine du mouvement? — Montrer que si cette condition est remplie le système a un mouvement alternatif indéfini.

Analyse. — Intégration d'une équation non linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.

Lyon.

Mécanique. — Un mobile libre non pesant est attiré suivant la perpendiculaire menée de ce mobile à une droite fixe et la force d'attraction varie en raison inverse du cube de la longueur de cette perpendiculaire.

Étudier le mouvement de ce point.

Analyse. — 1° Intégrer

$$(x^2y^3 - y)\,dx - (x^4y^3 - 2x^3y^2 + 3x)\,dy = 0.$$

2° Par le point O d'une surface, on mène une normale et une parallèle à la normale infiniment voisine menée à l'extrémité d'un arc ds. On demande de déterminer la direction de ds, de manière que le plan de ces deux normales soit perpendiculaire à cette direction.

Marseille.

Mécanique. — Une tige BC est assujettie à glisser sur une droite fixe $x'x$.

Cette tige se meut sous l'action d'un point fixe A qui attire tous les éléments de BC proportionnellement à la distance et à la masse de ces éléments.

La tige BC est homogène ; l'attraction du point A sur un élément de BC, dont la masse serait égale à l'unité, produit une force égale à l'unité.

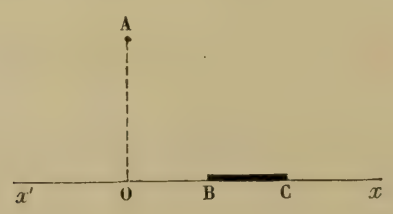
A l'origine du temps la tige BC est immobile.

Si du point A on abaisse sur $x'x$ une perpendiculaire AO, la longueur AO est égale à $2a$ et la distance de O au milieu de BC est à l'origine du temps égale à $7a$.

Trouver le mouvement de BC :

1° En supposant que BC glisse sans frottement sur $x'x$.

2° En supposant que $x'x$ soit dépoli et que le coefficient du frottement de BC sur $x'x$ soit égal à l'unité. Trouver dans ce cas au bout combien de temps la tige BC sera en repos et quelle sera alors la position de cette tige.



Analyse. — Trouver en termes finis les équations des développées de la courbe qui coupe sous un angle constant α les génératrices rectilignes du cône circulaire droit ; discussion.

Lille.

Mécanique. — Un point pesant est assujetti à glisser sans frottement sur une circonférence verticale, pendant que cette circonférence tourne d'un mouvement uniforme autour d'une verticale fixe située dans son plan. Étudier le mouvement relatif du point et les positions d'équilibre relatif.

Cas particulier où l'axe de rotation coïncide avec le diamètre vertical de la circonférence.

Analyse. — 1° De l'équation aux dérivées partielles du second ordre caractérisant toutes les surfaces représentées par l'équation finie $y = xf(z) + \varphi(z)$, où f et φ désignent deux fonctions arbitraires.

2° On demande la valeur qu'il faut donner à l'exposant m, dans l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (k^2 - 1)(1 - x^2)^m y,$$

pour que cette équation admette, quelle que soit d'ailleurs la constante k, une solution particulière de la forme

$$y = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta,$$

où α et β désignent deux exposants constants à déterminer. Former dans ce cas l'intégrale générale

Montpellier.

Mécanique. — Mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale.

Analyse. — Étant donnée l'équation différentielle

$$\frac{d^4y}{dx^4} + f(x)\frac{d^2y}{dx^2} - [1 + f(x)]y = 0,$$

montrer qu'on peut, au moyen de la substitution

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = z,$$

la transformer en une équation linéaire et du second ordre par rapport à la fonction inconnue z.

En supposant

$$f(x) = -\frac{x^2 + k}{x^2},$$

où k est une constante donnée, intégrer l'équation transformée en z (qui rentre dans une classe connue) et en conclure l'expression générale de y.

Examiner spécialement les deux hypothèses

$$k = 2 \quad \text{et} \quad k = -\tfrac{1}{4}.$$

Nancy.

Mécanique. — Deux points matériels M et M′, de masses m et m', sont assujettis à demeurer, le premier sur un plan horizontal H, le second sur une droite D oblique au plan H. Soit O le point d'intersection de la droite et du plan. Les deux mobiles sont reliés par un fil flexible, de longueur constante l, qui passe par une petite ouverture pratiquée en O dans le plan H, et qui est astreint à rester rectiligne de O en M et de O en M′.

On amène le point M en M_0, dans le plan vertical de la droite D, et l'on maintient le système au repos dans cette position $M_0OM'_0$. Puis on applique une percussion connue, comprise dans le plan H au mobile M, en même temps qu'on abandonne le système à lui-même.

1° Trouver les vitesses des deux points M et M′ dues à la percussion;

2° Étudier le mouvement ultérieur du système. Examiner le cas où la percussion est perpendiculaire sur OM_0.

On désignera par α l'angle de la droite D avec le plan H. On fera abstraction des frottements, ainsi que de la masse du fil.

Analyse. — 1° Démonstration de la double périodicité de la fonction sin am u;

2° Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta\,d\psi}{(A\sin^2\theta\cos^2\psi + B\sin^2\theta\sin^2\psi + C\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

quand A, B, C sont positifs de deux manières :

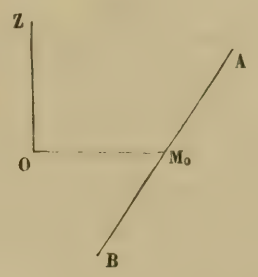
1° En remarquant qu'elle représente trois fois le volume d'un certain ellipsoïde;

2° Par le seul emploi du Calcul intégral. (Si l'on ne peut achever ce calcul, faire au moins comprendre qu'on saurait arriver au résultat.)

Poitiers.

Mécanique. — Étudier le mouvement d'une tige cylindrique

homogène AB, de très petit diamètre, dont tous les points sont attirés par un centre fixe O proportionnellement à leurs masses et à leurs distances au centre. La tige a reçu une vitesse initiale angulaire ω autour d'une droite Oz, située dans un même plan avec elle, et perpendiculaire à la droite OM_0 qui joint la position initiale du milieu de la tige au centre fixe. On donne : $OM_0 = a$; angle $(BA, Oz) = \theta_0$; μ coefficient d'attraction. Après avoir obtenu les formules générales, on pourra supposer l'angle θ_0 défini : 1° par $\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{\mu}}{\omega}$; 2° par $\sin\theta_0 = \frac{\omega}{\sqrt{\mu}}$ et l'on étudiera dans les deux cas l'hypothèse $\omega = \sqrt{\mu}$.



Analyse. — La normale en un point M d'une surface rencontre le plan xOy en un point N et la droite ON qui joint l'origine à ce point est parallèle au plan tangent en M.

Représenter cette surface : 1° par une équation aux dérivées partielles; 2° par une équation entre les coordonnées x, y et z, sachant que la section par le plan des xy contient l'hyperbole $x^2 - y^2 = a^2$.

Rennes.

Mécanique. — Un corps rigide (A) de forme quelconque est mobile autour d'un axe (a) invariablement lié à un second corps (B). Ce dernier s'appuie par une face plane contre un plan fixe (P) parallèle à l'axe (a) et ne peut prendre sur ce plan qu'un mouvement de translation dans une direction perpendiculaire à cet axe. Le corps (A) est primitivement au repos dans une position telle que son centre de gravité soit dans le plan qui projette l'axe (a) sur le plan (P).

Cela étant, on imprime au corps (B) une certaine vitesse initiale a et l'on demande le mouvement du système, l'effort exercé

par le premier corps sur le second, et les pressions développées par celui-ci sur les guides qui le maintiennent en contact avec le plan (P). On fera abstraction du poids du corps (A).

Données : M, M′ masses de (A) et de (B); l distance du centre de gravité du corps (A) à son axe de rotation, k rayon de gyration de (A) par rapport à l'axe (a).

Analyse. — 1° Établir l'équation générale des lignes asymptotiques d'une surface quelconque.

2° En déduire l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que les deux lignes asymptotiques qui passent en chaque point se coupent orthogonalement.

3° Quelle relation existe alors entre les deux rayons de courbure principaux de la surface?

4° Quelles sont les surfaces de révolution qui jouissent de cette propriété?

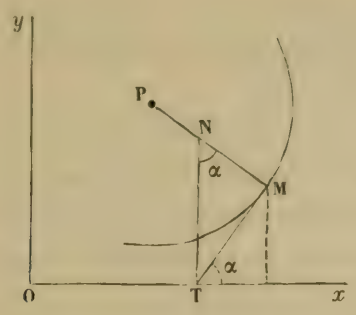
5° Donner l'expression des rayons de courbure principaux de ces surfaces de révolution.

Toulouse.

Mécanique. — Un point matériel non pesant est assujetti à se mouvoir sur une sphère et soumis à l'action d'une force répulsive émanant d'un point de la surface et dont l'intensité est en raison inverse du cube de la distance. On demande d'étudier le mouvement du point sur la sphère, d'indiquer la forme de la trajectoire, de calculer la réaction de la surface en chacun de ses points.

Analyse. — Étant donnée une courbe plane C, soient M un point de cette courbe, P le centre de courbure de la courbe en ce point et MT la tangente. Par le point T où cette tangente coupe l'axe Ox on mène une parallèle à l'axe Oy qui rencontre la normale MP en un point N. Déterminer la courbe C, de façon qu'on ait $\frac{MP}{MN} = k$ pour tout point de la courbe. On fera voir que l'une des coordonnées peut toujours s'exprimer en fonction de l'autre au moyen d'une quadrature, et l'on examinera pour quelles valeurs de k on peut effectuer l'intégration ; enfin on étudiera la nature de la courbe dans les deux cas particuliers $k = 1$, $k = 2$.

Nota. — Les axes étant rectangulaires, on prendra k positif ou négatif suivant que les deux directions MN et MP sont les mêmes ou sont opposées.

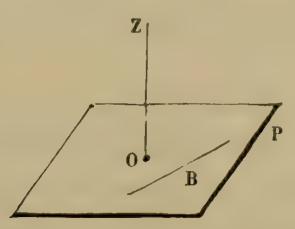


SESSION DE NOVEMBRE 1884.

Besançon.

Mécanique. — Étudier le mouvement du système de deux points matériels de masses m, m' qui s'attirent avec une force constante.

Analyse. — On donne un axe vertical OZ, un plan horizontal P et dans ce plan une droite B, on considère la surface en-



gendrée par un cercle de rayon constant dont le centre se meut sur B, tandis que son plan passe constamment par OZ.

1° Trouver l'équation de la surface;

2° Trouver les lignes de niveau et les lignes de plus grande pente de cette surface.

Bordeaux.

Mécanique. — 1° Démontrer que, lorsque la fonction des forces passe par un maximum, le système matériel sollicité par ces forces est en équilibre stable.

2° Trouver l'équation d'une courbe située dans un plan vertical et telle que la pression totale exercée par un point pesant mobile sur cette courbe soit dans un rapport donné k avec la composante normale du poids de ce plan.

Peut-on trouver pour k une valeur simple qui permette d'arriver à l'équation finie de la courbe?

Analyse. — Trouver les courbes telles que le rapport du rayon de courbure à la normale est constant et égal à m.

Cas particuliers où $m = 1$, $m = 2$, $m = -1$.

Caen.

Mécanique. — Étant données deux droites AA′, BB′, qui ne se coupent pas, mais dont les directions sont rectangulaires, déterminer le mouvement d'un point matériel libre sollicité par une force qui, pour une position quelconque M du mobile, agit suivant la droite qui passe par le point M et rencontre les deux droites AA′, BB′, la première en un point P, l'autre en un point Q ; la force est mesurée, en grandeur et en direction, par le segment PQ, la masse du mobile étant égale à l'unité. Examiner le cas où, à l'instant initial, le mobile est sur la droite AA′ animé d'une vitesse donnée quelconque.

Analyse. — 1° Exposer la théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles, linéaires et du premier ordre, entre n variables indépendantes et une fonction inconnue de ces variables.

2° Étant donnée l'équation

$$(2x+1)\frac{d^2y}{dx^2} + (4x-2)\frac{dy}{dx} - 8y = (6x^2 + x - 3)e^x,$$

vérifier que l'équation privée de second membre admet pour intégrale $y = e^{mx}$, m étant une constante qu'on déterminera; montrer comment la connaissance de cette intégrale peut conduire à l'intégrale générale de l'équation complète proposée.

(*A suivre.*)

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BACHMANN (PAUL). — UEBER DIE BEWEGUNG EINES PUNKTES. Programm des Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums. Berlin, 1882. In-4°, 18 pages.

Si deux points matériels s'attirent en raison directe de leurs masses et en raison inverse de la $n^{\text{ième}}$ puissance de leur distance, l'attraction qu'exerce une droite homogène infinie sur un point matériel est en raison inverse de la $(n-1)^{\text{ième}}$ puissance de la distance h du point à la droite ou bien égal à $\frac{b}{h^{n-1}}$.

Le Mémoire étudie pour les valeurs $n = 1, 2, 3, 4$ la trajectoire du point mobile dont la vitesse initiale est supposée être contenue dans le plan déterminé par la position initiale du point et par la droite fixe. Pour $n = 1$ la trajectoire se compose d'arcs de parabole répétés en nombre infini; pour $n = 3$ la trajectoire est affine à la cycloïde; pour $n = 4$ elle devient ellipse ou hyperbole. Enfin pour $n = 2$ l'équation de la courbe donne l'abscisse x exprimée par une intégrale eulérienne de seconde espèce. Ce dernier cas a été discuté plus amplement. (Le cas $n = 3$ se trouve dans le *Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle* de M. A. de Saint-Germain.) E. L.

PFEIFFER (G.). — FORMELN FÜR DEN INHALT DER KEGELFLÄCHE. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Sophiengymnasiums. Berlin, 1882. In-4°, 32 pages.

Si un cône du second degré est coupé par un plan suivant une ellipse, l'aire de la surface latérale du cône fini engendré par cette section s'exprime par des intégrales elliptiques, lorsqu'un quelconque des axes de l'ellipse contient les pieds de la perpendiculaire abaissée du centre de ce cône sur le plan sécant. Soient a la distance au centre où cette perpendiculaire rencontre le grand axe de l'ellipse, b et c $(b > c)$ les demi-axes de l'ellipse, h la longueur de la perpendiculaire mentionnée, α et β les deux racines de l'équation

$$[h^2(b^2 - c^2) - a^2c^2]x^2 + 2abc^2x - b^2(h^2 + c^2) = 0.$$

Cela étant, l'aire de la surface latérale du cône s'exprime par les deux formules

$$(\mathrm{A})\quad S = c\sqrt{\frac{2ab(1+\alpha)(1-\beta)}{-(\alpha+\beta)}}\left\{\frac{\alpha-1}{1-\beta}K + E - \frac{(\alpha-1)(\alpha+\beta)}{(1+\alpha)(1-\beta)}\Pi_1\left(\tfrac{1}{2}\pi, n\right)\right\},$$

le module k des intégrales complètes étant

$$k = \sqrt{\frac{2(\alpha-\beta)}{(1+\alpha)(1-\beta)}}, \quad n = \frac{-2}{1+\alpha};$$

cette formule s'applique au cas α et β réels;

$$(\mathrm{B})\quad S = \sqrt{-A}\sqrt[4]{u^2+4v^2}(\nu-1)^2\left\{2(E-K) + \frac{(\nu+1)^2}{2\nu}\Pi_1\left(\tfrac{1}{2}\pi, n_1\right)\right\},$$

où l'on a posé

$$A = h^2(b^2-c^2) - a^2c^2, \quad \alpha = \mu + i\nu, \quad \beta = \mu - i\nu,$$

$$u = (\mu+1)(\mu-1) + \nu^2, \quad \nu = \sqrt{\frac{(1+\mu)^2+\nu^2}{(1-\mu)^2+\nu^2}},$$

$$n_1 = \frac{(\nu-1)^2}{4\nu}, \quad k^2 = \frac{\sqrt{u^2+4v^2}-u}{2\sqrt{u^2+4v^2}}.$$

La formule (B) s'emploie donc si α et β sont complexes.

Si a n'est pas inférieur à b, les formules subsistent seulement quand on n'a ni $\beta > +1 > \alpha > 0$, ni $+1 > \beta > \alpha > 0$. Pour $\alpha = \beta$, il vient $S = \dfrac{abc\pi}{\sqrt{b^2-c^2}}$.

D'autres formules se tirent de (A) et (B) quand on y remplace $\Pi_1(\frac{1}{2}\pi, n)$ par des fonctions elliptiques. E. L.

SCHLEGEL (MAX.). — BESTIMMUNG DER KONSTANTEN DER SPHAERISCHEN KETTENLINIE. Programm des Königlichen Wilhelms-Gymnasiums. Berlin, 1884.

Minding fut le premier à établir les équations dont dépend le problème de déterminer la forme et les propriétés de la chaînette sur la sphère (*Journal de Crelle*, t. 12). La discussion de ces équations et l'expression de leurs intégrales à l'aide des fonctions elliptiques furent achevées par Gudermann dans son Mémoire : *De curvis catenariis sphæricis dissertatio analytico-geometrica* (*Journal de Crelle*, t. 33). Plus tard, engagé par M. Weierstrass

à reprendre le problème sous une forme généralisée. M. W. Biermann étendit la question à des surfaces quelconques de rotation, et donna pour la chaînette sphérique la réduction aux fonctions σ de Weierstrass et aux fonctions ϑ de Jacobi. (*Problemata quædam mechanica functionum ellipticarum ope soluta. Dissertatio inauguralis;* Berolini, 1865). Avant lui Clebsch [*Ueber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens* (*Journal de Borchardt*, t. 57, § 6, p. 103 sq.)] avait enseigné une solution commode de l'équation biquadratique du problème.

On n'avait pas encore déterminé convenablement les constantes du problème. C'est ce que fait dans sa Note de six pages l'auteur, qui se donne les deux points d'attache du fil et sa longueur.

Publié pour célébrer le vingt-cinquième anniversaire de la fondation du gymnase, le même programme contient encore, outre deux notes non mathématiques, la réimpression des pages 1-20 du Livre : *Rechnung auff der Linihen un Feddern durch Adam Rysen;* 2e éd., 1529. Ce Traité de calcul élémentaire avait autrefois une telle célébrité, que son auteur a passé dans une locution proverbiale. Si l'on veut garantir la justesse du résultat d'un calcul, on dit encore aujourd'hui en Allemagne que cela résulte « nach Adam Riese », comme l'on cite en France « selon Barême ». Adam Riese naquit en 1492 à Zwönitz en Saxe, il mourut à Annaberg en 1559. Son Livre fameux parut en 1523 pour la première fois et eut un grand nombre d'éditions nouvelles. E. L.

MÉLANGES.

FACULTÉS DES DÉPARTEMENTS.
SUJETS DE COMPOSITION DONNÉS AUX EXAMENS DE LICENCE.

SESSION DE NOVEMBRE 1884.

Clermont.

Mécanique. — Étude du mouvement de deux masses pesantes m et m', liées entre elles par une tige rigide et sans masse et attirées par un centre fixe proportionnellement aux distances.

Analyse. — Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{z^2}{y^2}+1\right)p-\left(\frac{x}{y}+\frac{z^2}{x^2}+1\right)q=z\left(\frac{y}{x^2}-\frac{x}{y^2}\right).$$

x et y sont les variables indépendantes, z la fonction inconnue; et p et q représentent les dérivées de z par rapport à x et y.

Dijon.

Mécanique. — Une circonférence est située de façon qu'un de ses diamètres AA′ soit vertical. Cette circonférence est le profil d'un tube homogène pesant, infiniment mince, qui peut tourner autour de l'axe AA′. Une bille matérielle pesante, infiniment mince, est placée à l'intérieur du tube.

On demande d'établir les formules qui permettent de trouver le mouvement du tube et le mouvement de la bille dans le tube, connaissant la vitesse initiale de rotation du tube et la vitesse initiale de la bille dans le tube.

On désignera par M la masse du tube, m la masse de la bille, a le rayon du tube.

Analyse. — Établir la formule de Lagrange pour le développement en série entière, par rapport à x, de $F(u)$, u désignant la fonction implicite de x, t que définit l'équation $u=t+x\varphi(u)$ accompagnée des conditions initiales $u=a$ pour $x=0$, $t=a$.

Application au développement du cube de la racine u de l'équation $u=1+xu^2$ qui se réduit à 1 pour $x=0$.

Grenoble.

Mécanique. — Un point matériel M est assujetti à rester sur la surface d'un cylindre de révolution sur lequel il se meut sans frottement. La base du cylindre est un disque homogène, sans épaisseur, dont chaque élément attire le point M proportionnellement à la distance. On suppose la vitesse initiale du point perpendiculaire à l'axe du cylindre.

On demande la trajectoire du point M, son développement, la pression du point sur la surface. Comment faut-il choisir la vitesse initiale pour que la pression soit nulle? Quelle est, dans ce cas, la courbe décrite?

Analyse. — 1° Déterminer la fonction $f(z) = X + iY$ dont la partie réelle est

$$X = \frac{2 \sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x}.$$

2° Discuter la surface $e^{-z} = \sin x \sin y$, et trouver ses lignes de courbure.

Lille.

Mécanique. — 1° Expressions diverses de l'accélération tangentielle dans le mouvement curviligne d'un point. Sens dans lequel cette accélération doit être portée.

2° Un point pesant est assujetti à rester sur une droite fixe donnée, laquelle fait des angles α, β, γ avec trois axes rectangulaires dont l'un est vertical. On connaît sa position et sa vitesse initiale et l'on demande de déterminer son mouvement en ayant égard au frottement supposé proportionnel à la pression normale. On demande aussi de calculer cette pression.

Lyon.

Mécanique. — Une cycloïde dont le cercle générateur a un diamètre donné a est placée dans un plan vertical au-dessous de sa base horizontale, et un point matériel pesant, de masse μ, est assujetti à se mouvoir sur cette courbe. Ce point est sollicité, en outre de sa pesanteur, par une force résistante F, agissant tangentiellement à la courbe en sens contraire de sa vitesse V, et dont l'intensité est donnée par la formule

$$F = \mu v \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

On propose d'étudier le mouvement de ce point.

Analyse. — Trouver l'intégrale générale de l'équation aux différentielles partielles

$$(x - 6y)p + (10x - y)q = 6y^2 - 4x^2 - 36xy.$$

Examiner un des cas où la surface représentée par cette intégrale est un cylindre et chercher le rayon de courbure d'une section perpendiculaire à la génératrice.

N.-B. — Les axes sont supposés rectangulaires.

Marseille.

Mécanique. — Une droite matérielle AB glisse avec frottement sur une droite horizontale Ox.

Ce frottement s'oppose au mouvement de la droite avec une résistance égale à l'unité de force.

Chacun des éléments de la droite est attiré par un point fixe O proportionnellement à la distance et à la masse de cet élément.

A l'unité de distance l'attraction sur l'unité de masse est égale à l'unité de force.

La masse de la droite AB est égale à l'unité.

On suppose primitivement la droite AB immobile et l'on suppose aussi que le centre de gravité de AB est situé à une distance égale à 4 du point O.

Trouver le mouvement de la droite AB.

Analyse. — Étant donnée l'équation aux différences partielles

$$\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx\,dy} - \frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx^2} = a,$$

dans lesquelles les variables indépendantes sont x, y, transformer cette équation de telle sorte que les deux nouvelles variables indépendantes soient z et y.

Montpellier.

Mécanique. — Etudier le mouvement d'un point pesant sur un plan incliné qui tourne uniformément autour d'un axe vertical. On néglige le frottement.

Analyse. — Exposer la méthode d'intégration de l'équation

$$Pp + Qq = R,$$

dans laquelle P, Q, R sont des fonctions données de x, y, z et où z est censée fonction des deux variables indépendantes x, y.

On a posé

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy};$$

appliquer à l'exemple suivant :

$$(y+z)p + (x+z)q = x+y.$$

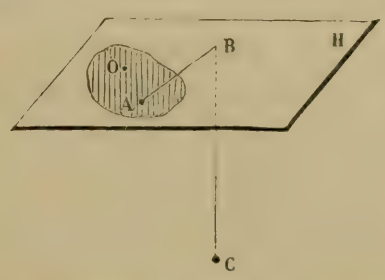
Nancy.

Mécanique. — Une aire matérielle plane, de masse M, repose sur un plan horizontal H et peut tourner dans ce plan autour d'un de ses points O supposé fixe. En un point A de l'aire est attaché un fil flexible, sans masse, qui passe par une petite ouverture pratiquée en B, dans le plan H, à une distance OB du point O égale à la distance $OA = a$ du point A. Ce fil ABC, de longueur constante l, porte à son autre extrémité C un point pesant de masse m. Le système étant au repos et dans sa position d'équilibre stable, on applique à l'aire une percussion connue comprise dans le plan H.

1° Calculer la vitesse angulaire due à la percussion, ainsi que la vitesse linéaire du point C.

2° Étudier le mouvement ultérieur du système.

On désignera par k le rayon de gyration de l'aire relatif au point O, par μ le moment de la percussion donnée par rapport à ce point O, et l'on supposera $l > 2a$.



Analyse. — 1° Définition des lignes asymptotiques d'une surface. Démontrer l'équation différentielle de leur projection sur le plan des x, y; trouver les lignes asymptotiques d'un conoïde droit (c'est-à-dire dans lequel la droite directrice est normale au plan directeur);

2° Démontrer qu'une fonction d'une variable imaginaire, finie, continue et monodrome à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre, est développable suivant la série de Maclaurin à l'intérieur de ce cercle.

Poitiers.

Mécanique. — Une barre pesante homogène AB est suspendue dans une position horizontale par deux fils, sans masse, verticaux et de même longueur AC, BD. On demande :

1° D'indiquer la nature du mouvement de cette barre lorsqu'elle se déplace de manière à rester horizontale, son centre de gravité étant toujours sur la même verticale et les fils de suspension toujours tendus. Relation entre les vitesses des mouvements composants;

2° De calculer la grandeur du couple à axe vertical capable de maintenir la barre dans une position d'équilibre pour laquelle sa direction fait un angle θ avec la position qu'elle prend sous la seule action de la pesanteur; valeur particulière de ce couple lorsque la longueur de la barre est négligeable vis-à-vis de la longueur du fil :

3° D'étudier les petites oscillations du système lorsqu'on l'écarte très peu de sa position d'équilibre autour de la verticale du centre de gravité et qu'on l'abandonne à l'action de la pesanteur.

On donne le poids $2p$ de la barre, sa longueur $2a$ et la longueur l des fils de suspension.

Analyse. — Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = 2e^x - 4\cos x.$$

Rennes.

Mécanique. — Existe-t-il une surface de révolution à axe vertical, telle qu'un point pesant, retenu sur elle, y décrirait, dans des conditions initiales convenables, une trajectoire coupant sous un même angle donné tous les méridiens de cette surface? Quel sera le mouvement de ce point?

Analyse. — Les équations d'une droite menée par le point qui a pour coordonnées rectangulaires x, y, z étant

$$\frac{X-x}{x^2+y^2} = \frac{Y-y}{xy} = \frac{Z-z}{\varphi(x,y)},$$

on propose :

1° De trouver quelle doit être la forme la plus générale de la fonction $\varphi(x, y)$, pour que cette droite soit normale à une surface en tous les points de cette surface;

2° De déterminer la fonction arbitraire qui figure dans cette expression de manière que la surface $Z = \varphi(x, y)$ soit circonscrite à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

3° De former, dans ce cas particulier, l'équation de la surface à laquelle la droite considérée est normale.

Toulouse.

Mécanique. — L'espace compris entre deux surfaces sphériques concentriques est rempli par un milieu dont la densité, en chaque point, est une fonction donnée de la distance au centre.

Former les équations du mouvement d'un point mobile situé dans ce milieu et attiré par toutes les particules qui le composent. L'attraction est supposée en raison inverse du carré de la distance.

Traiter en particulier le cas où la densité du milieu est constante.

Analyse. — L'équation d'une surface rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz est $Z = \varphi(\theta)(\rho - \alpha)$, ρ et θ désignant les coordonnées polaires de la projection d'un point quelconque de la surface sur le plan xOy. On demande : 1° de former l'équation différentielle en coordonnées polaires des projections sur le plan xOy des courbes situées sur la surface qui coupent orthogonalement toutes les sections de cette surface par des plans passant par l'axe Oz et d'intégrer cette équation; 2° d'évaluer le volume compris entre les trois plans de coordonnées et la portion de surface située dans le trièdre $Oxyz$, en supposant que l'on ait

$$\varphi(\theta) = -\cos^2\theta.$$

LE CLASSEMENT DES MATHÉMATIQUES, D'APRÈS GEMINUS;

PAR M. PAUL TANNERY.

1. La question du classement des Mathématiques dans l'antiquité peut, au premier abord, paraître étrangère à l'histoire de la Géométrie proprement dite; elle s'y rattache cependant par des

liens étroits, car d'un côté la forme de démonstration géométrique étant la seule connue des anciens pour la Science, ils l'ont employée dans toutes les branches ; d'autre part, leurs écrits sur les applications renfermaient souvent des théorèmes ou des problèmes purement théoriques, dont plusieurs nous sont parvenus seulement par cette voie.

L'historien de la Géométrie grecque a donc à préciser, en faisant abstraction de la forme des Ouvrages mathématiques, ce qui était considéré comme Géométrie, ce qui au contraire était regardé comme appartenant à une autre branche de la Science. Il a aussi à dresser le bilan des Ouvrages conservés ou perdus, qui, quoique étrangers à la Géométrie au sens restreint du mot, intéressent son histoire, considérée au sens général. Il doit donc aborder cette question du classement des Mathématiques dans l'antiquité, et, eu égard à l'importance qu'elle présente par elle-même, il sera facilement entraîné à la traiter dans toute son extension.

Je donne ci-après la traduction de l'extrait de Geminus inséré par Proclus sur cette question dans la première partie du prologue du Commentaire sur Euclide. J'en rapprocherai ensuite les fragments relatifs au même sujet, qui se rencontrent dans les *Variæ collectiones* de l'édition de Héron par Hultsch, et je présenterai quelques observations sur les conclusions à tirer de ces rapprochements.

Extrait de Geminus

(*Proclus*, p. 38,1-42,8)

« Tel est le discours des Pythagoriciens et leur distinction des quatre sciences. Un autre mode de division de la Mathématique a été adopté par d'autres, par exemple Geminus; ils considèrent, d'une part, celle qui concerne seulement les choses intelligibles; de l'autre, celle qui concerne les choses sensibles. Les choses intelligibles sont d'ailleurs pour eux les objets de contemplation que l'âme éveille en elle-même, en s'élevant au-dessus des espèces matérielles. La Mathématique qui traite des choses intelligibles comprend, d'autre part, d'après eux, deux parties qui sont premières et principales, l'Arithmétique et la Géométrie; pour les choses sensibles, il y a six parties, la Mécanique, l'Astrologie, l'Optique, la Géodésie, la Canonique, la Logistique.

» Quant à la Tactique, ils ne pensent pas qu'on doive la

regarder, ainsi que d'autres le font, comme formant une partie de la Mathématique ; seulement elle se sert tantôt de la Logistique, comme pour le dénombrement des troupes ([1]), tantôt de la Géodésie, comme pour les divisions et mesures des surfaces. Mais de même et *a fortiori*, ni l'Histoire, ni la Médecine ne sont des branches de la Mathématique, quoique les historiens emploient souvent des théorèmes mathématiques, alors qu'ils parlent de la situation des climats ou qu'ils calculent la grandeur des villes, leur diamètre ou leur enceinte ([2]), quoique les médecins éclaircissent aussi par des moyens semblables les questions qui sont de leur ressort. L'utilité de l'Astrologie en médecine est assez évidente chez Hippocrate, et chez tous ceux qui ont parlé des saisons et des contrées. De même donc, le tacticien se sert des théorèmes de Mathématiques, mais n'est pas un mathématicien pour ranger ses troupes en cercle ([3]), s'il veut faire paraître leur nombre aussi petit que possible, ou bien pour les disposer autrement afin de les faire paraître plus nombreuses, que ce soit en carré, en pentagone ou suivant quelque autre polygone.

» Telles sont les différentes branches de l'ensemble de la Mathématique. La Géométrie se divise à son tour en théorie du plan et en stéréométrie ; car elle ne peut avoir une partie qui traite en particulier des points et des lignes, en tant qu'on ne peut former avec ces éléments quelque figure qui ne soit ou plane ou solide. Or, en général, l'œuvre de la Géométrie consiste à construire des figures planes et solides, ou bien à comparer ou à diviser les figures construites.

» L'Arithmétique se divise de même en théorie des nombres linéaires, théorie des nombres plans, et théorie des nombres solides ; elle considère en effet les espèces du nombre en elles-mêmes dans leur progression à partir de l'unité, la génération des nombres *semblables* et *dissemblables* ([4]), et les augmentations suivant la troisième dimension.

([1]) L. 16. — Je lis λόχων au lieu de λόγων.

([2]) L. 22-23, καὶ διαμέτρους ἢ περιμέτρους est à supprimer comme une seconde leçon, au lieu de καὶ διαμέτρους ἢ περιβόλους.

([3]) Preuve que la théorie des isopérimètres était bien connue dès longtemps avant Geminus.

([4]) Des carrés et des hétéromèques $= n(n+1)$. *Voir* Jamblique sur Nicomaque (115,*d*). Ce rapprochement permet de considérer Geminus comme une des sources utilisées par Jamblique.

» La Géodésie et la Logistique sont analogues aux branches précédentes : seulement, au lieu de traiter des nombres ou des figures intelligibles, elles s'occupent des sensibles; car l'œuvre de la Géodésie ne consiste pas à mesurer le cône ou le cylindre, mais bien les monceaux comme cônes ou les puits comme cylindres; les droites qu'elle emploie ne sont pas intelligibles, mais sensibles, tout en étant d'ailleurs, par rapport aux intelligibles, des représentations tantôt plus exactes, comme les rayons du soleil, tantôt plus grossières, comme des cordeaux ou des règles.

» De même le logisticien ne considère pas les propriétés des nombres en eux-mêmes, mais sur les choses sensibles, d'où vient qu'il leur donne des noms d'après les objets qu'ils dénombrent, les appelant, par exemple, *mélites* (de pommes) ou *phialites* (de fioles). D'autre part, il n'admet pas, comme le fait l'arithméticien, qu'il y ait un minimum, à moins que ce ne soit pour quelque genre spécial; ainsi un homme, par rapport à une multitude, sera pour lui une mesure et comme est l'unité.

» A leur tour l'Optique et la Canonique dérivent de la Géométrie et de l'Arithmétique. La première emploie les lignes de vision et les angles qu'elles forment. Les subdivisions sont : l'Optique proprement dite, qui rend compte des erreurs dues à la distance dans les apparences des objets vus, par exemple de la convergence des parallèles ou de l'arrondissement des carrés en cercles; la Catoptrique, consacrée tout entière aux réflexions sur les miroirs de toute sorte, et à l'étude compliquée des images; la *Scénographique,* comme on l'appelle, qui montre à faire des dessins représentant des objets à différentes distances et différentes hauteurs, tout en conservant, pour la vue, la proportion et la forme de ces objets.

» Quant à la Canonique, elle étudie les rapports expérimentaux des longueurs harmoniques et recherche les divisions des *canons* (1), en employant toujours les sens et, comme le dit Platon, en mettant l'oreille avant l'intelligence.

» Vient ensuite ce qu'on appelle la Mécanique, partie de l'étude des objets sensibles et matériels; sous elle se rangent : l'*organopœïque,* pour la construction des engins propres à la guerre, comme ceux qu'inventa, dit-on, Archimède pour défendre Syracuse

(1) Règles servant à mesurer les longueurs des cordes de la lyre.

assiégée; la *thaumatopoïque* (construction d'artifices merveilleux), soit qu'elle emploie ingénieusement les mouvements de l'air, comme dans les Traités de Ctésibios et de Héron, soit qu'au moyen de poids (dont le mouvement est dû au défaut d'équilibre, et l'immobilité à l'équilibre, suivant les distinctions du Timée), ou encore par des fils ou fibres, elle imite les mouvements et les actions des êtres animés.

» La Mécanique comprend encore la connaissance de l'équilibre en général, et de ce qu'on appelle les centres de gravité; la *sphéropée* qui imite les révolutions célestes, que, par exemple, Archimède a traitée; en un mot, toute la *cinétique* de la matière.

» Enfin l'Astrologie s'occupe des mouvements du monde, des grandeurs et des formes des corps célestes, de leur éclairement et de leurs distances à la Terre, ainsi que de toutes les questions semblables; elle emprunte beaucoup à l'expérience des sens et, d'autre part, a beaucoup de rapport avec la *Théorie physique*. Elle a comme parties : la *Gnomonique*, qui s'occupe de la détermination de l'heure au moyen des gnomons; la *Météoroscopique*, qui recherche les différentes hauteurs et distances des astres et enseigne nombre d'autres théorèmes variés d'Astrologie; la *Dioptrique*, qui, au moyen d'instruments propres, enseigne les positions du Soleil, de la Lune et des différents astres (1).

» Voilà ce que j'ai emprunté aux écrits des anciens sur les branches de la Mathématique (2). »

3. Une seule objection peut être faite contre l'attribution à Geminus des renseignements fournis par l'extrait qui précède (3). La dernière phrase de Proclus parle de plusieurs écrits où il aurait puisé; on peut, il est vrai, y comprendre ceux qui exposaient la

---

(1) P. 42, l. 4 : ε̄ ἀποχάς, c'est-à-dire ἀποχάς, corrigé en ἐποχάς qui doit être la véritable leçon. L'*époque* était, à proprement parler, le lieu du zodiaque occupé par une planète, ce qui revient à la *longitude astronomique*.

(2) Voici la citation unique de Geminus par Pappus (1026), citation qui se rapporte à la Mécanique :

« Tous ces effets ont été connus, dit-on, dans leur cause et dans leur raison, par Archimède de Syracuse; il est le seul homme connu qui ait su appliquer à toutes choses les dons variés de sa nature et de son génie d'invention, comme le dit Geminus le mathématicien dans son Livre *Sur le classement des Mathématiques*. »

(3) Il est inutile de faire remarquer quelques phrases comme celles où Platon est cité, et qui doivent être évidemment attribuées à Proclus lui-même, non à Geminus.

doctrine pythagoricienne. Mais, au début de l'extrait, Proclus oppose précisément à ces derniers auteurs d'autres (parmi lesquels Geminus). N'a-t-il donc pas mélangé, dans cet Extrait même, ce qu'il trouvait dans plusieurs écrits différents? Quels pouvaient être ces écrits, en dehors de celui de Geminus?

Il n'y a pas en réalité à se préoccuper beaucoup de ces questions. Si Proclus avait possédé un auteur plus ancien que Geminus, il aurait sans doute fait appel à son autorité ou au moins cité son nom; quant à de plus récents, s'ils donnaient le même classement, c'est sans doute qu'ils l'avaient copié, et dès lors Proclus a dû de préférence recourir à Geminus, comme étant la véritable source.

Nous pouvons dans une certaine mesure contrôler cette assertion; il existe en effet un auteur qui, sur le classement des Mathématiques, a suivi Geminus; c'est Anatolius (1), celui sous le nom duquel sont inscrits les derniers fragments (79 — 86) des *Variæ collectiones;* ces fragments concernent; — 79, la philosophie dans son ensemble, théorique et pratique; — 80, l'origine du terme de Mathématique; — 81, la définition de la Mathématique; — 82, sa subdivision; — 83, les rapports de ses différentes branches; — 84, l'hypothèse soit comme principe de la Mathématique, soit dans les autres acceptions du mot; — 85, l'importance attachée par Pythagore à l'Arithmétique; — 86, le but de l'Arithmétique.

Or il est facile de reconnaître, en thèse générale, sur ces divers fragments (2), que Proclus n'a pas utilisé Anatolius, quoiqu'il dût

---

(1) Anatolius d'Alexandrie, d'après Eusèbe (*Hist. eccl.*, VII, 32,6), fut chrétien, mais en même temps un des hommes les plus signalés de son temps par ses connaissances en Arithmétique, en Géométrie, en Astronomie, comme en général dans la Philosophie hellénique; il occupa à Alexandrie la chaire de l'enseignement aristotélique et s'y trouvait lors de la guerre civile sous Gallien. Un peu plus tard, sous Aurélien, il devint évêque de Laodicée de Syrie. Rien n'empêche de le regarder comme ayant été le maître de Jamblique (d'après Eunape), et comme l'auteur des fragments qui portent son nom dans les *Théologoumènes arithmétiques;* car, au IIIe siècle, les chrétiens jouissaient à Alexandrie d'une tolérance aussi complète que possible, et y vivaient en bons termes avec les païens; l'hostilité des deux religions ne s'est accusée qu'après les massacres de Dioclétien. Si le témoignage d'Eusèbe est exact sur la situation d'Anatolius comme professeur laïque à Alexandrie, Jamblique a très bien pu suivre ses leçons; d'autre part, un chrétien dans cette situation pouvait très bien compiler, pour un simple intérêt d'érudition, les écrits mystiques des pythagoriciens sur les dix premiers nombres, et les réunir dans dix Livres d'*Introductions arithmétiques*.

(2) Comparer notamment le fr. 80 avec *Proclus*, p. 45.

le connaître et le comprendre parmi ceux qui suivaient la classification de Geminus. Il y a donc probabilité suffisante que ce dernier est bien la source unique de l'Extrait que je viens de traduire.

4. J'arrive maintenant aux autres fragments des *Variæ collectiones* (5 — 12) qui ont été attribués à Geminus; ils concernent : — 5, la définition de la Géométrie; — 6, la notion du continu; — 7, les trois dimensions des corps; — 8, le but de la Géométrie; — 9, la Logistique; — 10, sa matière; — 11, la Géodésie; — 12, sa matière.

Il est évident à première vue que cette série semble faire suite aux fragments d'Anatolius, et il est à noter que le fragment 8 suppose comme antérieur un fragment analogue au 86 (1).

Pour examiner si cette apparence n'est pas illusoire, il faut considérer comment est constituée cette compilation des *Variæ collectiones*. Elle suit dans les manuscrits le Traité des *Définitions géométriques* du pseudo-Héron (2), commence par un fragment (1 — 2) qui dérive des *Métriques* de Héron, — énumération des figures qui y étaient traitées, — continue (3, 4) par les postulats et les axiomes d'Euclide. Après la série attribuée à Geminus, viennent deux fragments (13 — 14) sur l'Optique, qui se retrouvent dans le petit Traité de Damianos (τοῦ Ἡλιοδώρου), et que Hultsch a regardés comme tirés des *Catoptriques* de Héron; suit un court abrégé (15) de la Notice historique de Proclus sur la Géométrie, puis (16 — 78), dans un désordre complet, de très nombreux fragments du Commentaire de Proclus sur Euclide (prologue et partie relative aux définitions et axiomes); après ces fragments mêlés de quelques rares intercalations d'origine inconnue (3), on rencontre la série provenant d'Anatolius, enfin, terminant le tout, la Notice historique

---

(1) Je reviendrai sur l'origine de cette compilation particulière.

(2) Fr. 8. « Le but de la Géométrie est analogue à celui de l'Arithmétique, si ce n'est qu'elle cherche à comprendre ce qui arrive à l'essence non pas discrète, mais bien continue. »

Fr. 86. « Le but que poursuit l'Arithmétique est principalement la contemplation scientifique (il n'y a pas de but plus grand ni plus beau), accessoirement la compréhension d'ensemble de tout ce qui arrive à l'essence discrète ».

(3) Les plus importantes de ces intercalations, qui concernent les définitions des Livres V et X des *Eléments*, peuvent provenir de la partie perdue du commentaire de Proclus.

sur l'Astronomie, extraite par Théon de Smyrne de l'Ouvrage du platonicien Dercyllidas.

Il semble bien, d'après ce résumé, que le compilateur a pu n'utiliser en fait qu'Anatolius et Proclus, prenant d'abord du premier ce qui lui paraissait intéresser la Géométrie, passant au second, puis reprenant dans le premier la partie antérieure qu'il avait sautée; de même, en faisant ses extraits de Proclus, il est souvent revenu sur ses pas.

Geminus a certainement dû traiter des mêmes matières que les fragments 5 — 14; mais Anatolius est dans le même cas (1), et s'il a utilisé Geminus, cela suffit pour expliquer les ressemblances de ces fragments avec l'extrait de Proclus.

Contre l'attribution à Geminus, on peut faire observer :

1° Que ce dernier ne semble point avoir cherché, pour définir les différentes sciences, des formules bien précises, comme celles des fragments en question; du moins on ne retrouve rien de semblable dans Proclus, et ces définitions n'ont aucun caractère qui indique la main de Geminus (2);

2° Que le fragment 6, sur le continu, n'a guère de rapport avec le passage où Proclus (p. 278, 12-26) cite nommément Geminus sur la même question;

3° Que le début du fragment 3 (qui porte d'ailleurs la mention ἔνιοί φασιν, quelques-uns disent) semble bien indigne de Geminus (3).

---

(1) Il avait laissé, dit Eusèbe (VII, 32, 20) des *Introductions arithmétiques* en dix Livres et d'autres preuves de sa science, très nombreuses (VII, 32, 13); l'Ouvrage dont nous avons ici des extraits doit avoir été composé en dehors du Traité arithmétique; en tous cas, après avoir énuméré les parties de la science (fr. 82), il devait parler de chacune d'elles; il annonce même de plus amples détails.

(2) Je me contente de traduire celle de la Géométrie (fr. 5 = scholie sur le *Charmide*, p. 512, 52). « La Géométrie est la science *théorétique* des grandeurs et des figures, ainsi que des surfaces et lignes qui les déterminent et les limitent, et avec leurs accidents (πάθη) et manières d'être (σχέσεις), les propriétés de leurs formes réalisées et les natures des mouvements qui les engendrent. On désigne sous le nom d'*accident* ce qui concerne les divisions; sous celui de *manières d'être* les rapports des grandeurs entre elles et les situations, soit que nous les considérions en elles-mêmes, soit que nous les comparions réciproquement. »

(3) « Quelques-uns disent que les principes de la Géométrie sont les dimensions du corps mathématique. »

Je crois au contraire que le fragment sur l'Optique, quelle que puisse y être la part des *Catoptriques* de Héron, a passé par l'intermédiaire de Geminus, auquel Anatolius a pu l'emprunter plus ou moins fidèlement. Au moins j'y retrouve, dans la distinction entre l'hypothèse mathématique et les explications physiques relatives aux phénomènes de la vision, le même ordre d'idées que dans le fragment de l'*Exégèse des météorologiques de Posidonius*, que Simplicius nous a conservé. D'autre part, l'opinion que l'arc-en-ciel est dû à une simple réflexion paraît avoir été propre à Posidonius et à Geminus.

Quant aux deux Notices historiques, il est possible qu'elles viennent aussi toutes deux d'Anatolius qui les aurait empruntées l'une à Geminus, l'autre à Théon de Smyrne.

5. Quoi qu'il en soit, je vais maintenant aborder la comparaison, avec l'extrait de Geminus fait par Proclus, des fragments que je considère comme appartenant à Anatolius.

Il est clair que, dans la première énumération des branches de la Science appliquée, Proclus n'a pas suivi l'ordre logique. Anatolius donne le suivant, qui concorde mieux avec l'ensemble de l'extrait : Logistique, Géodésie, Optique, Canonique, Mécanique, Astronomie, et remarque, ce qui paraît bien d'accord avec les idées de Geminus, que la Logistique et la Canonique ont plus de rapport avec l'Arithmétique, la Géodésie et l'Optique avec la Géométrie, que la Mécanique et l'Astrologie en ont également avec les deux sciences pures.

Anatolius, avec la Tactique, exclut d'autre part l'architectonique, la musique vulgaire, ce qui concerne les phases, enfin ce qu'il appelle τὸ μηχανικόν, c'est-à-dire la Mécanique appliquée.

Sur les deux derniers points, il paraît en désaccord avec Geminus, *ce qui concerne les phases* désigne évidemment les prédictions météorologiques liées aux levers et couchers apparents des étoiles, comme dans le petit Traité de Ptolémée : φάσεις ἀπλανῶν, puisque les prédictions de ces levers et couchers sont certainement affaire de Mathématiques. Il y a donc là, semble-t-il, négation d'une possibilité de prédire le temps d'après un système auquel Geminus croyait dans une certaine mesure, et sur lequel il s'est longuement expliqué dans son *Introduction aux phénomènes*. Quant à la

Mécanique pratique. Anatolius paraît en contradiction aussi bien avec l'extrait de Geminus qu'avec le Liv. VIII de Pappus.

En tout cas, la classification de Geminus, malgré son caractère plus empirique que rationnel, est plus satisfaisante que l'incomplète division des Pythagoriciens. Elle s'en distingue d'ailleurs non moins par l'adjonction de quatre branches non reconnues dans cette division, Logistique, Géodésie, Optique, Mécanique, que par le changement de nom de deux des sciences qui y figuraient; la Musique est réduite à la Canonique, c'est-à-dire à sa partie purement mathématique; à la Sphérique se substitue l'Astrologie, c'est-à-dire que la théorie de la sphère est conçue comme devant être constituée indépendamment de ses applications aux mouvements célestes, comme devant former une partie intégrante de la Géométrie. A la vérité, cette conception n'a pas été réalisée dans l'antiquité, mais elle n'en est que plus remarquable.

6. Arrêtons-nous aux branches étrangères à la Géométrie, et considérons quels travaux pouvaient les représenter aux yeux de Geminus.

Pour l'Arithmétique, et sous ce mot, on doit entendre simplement, au sens ancien, l'ensemble des propositions préliminaires à ce que nous appelons la théorie des nombres, on ne peut penser qu'aux Livres VII à IX des *Éléments* d'Euclide. Si d'ailleurs on y joint le petit et médiocre opuscule de Diophante *Sur les nombres polygones*, lequel s'est substitué à un travail perdu d'Hypsiclès sur le même sujet, c'est tout ce qui nous reste de l'Arithmétique scientifique des anciens, dont l'enseignement était exactement modelé sur celui de la Géométrie. Des *Introductions*, analogues à celles de Nicomaque, existaient peut-être déjà, mais doivent être écartées ici.

Comme type de la Canonique, nous avons également un Traité d'Euclide, la *division du canon* (κατατομὴ κανόνος), conçu de même suivant le modèle géométrique; ce Traité ne donne qu'une forme spéciale de la gamme, mais il n'est complété pour les autres par aucun des Ouvrages musicaux assez nombreux que l'antiquité nous a laissés et qui s'écartent tous plus ou moins de la forme euclidienne.

Pour la Logistique, au contraire, nous n'avons rien que des noms

incertains et le mode de son enseignement nous est absolument inconnu. Si l'on devait le considérer aussi comme donné conformément au type géométrique, on pourrait citer l'opuscule d'Apollonius analysé dans le Livre II de Pappus, et qui posait des règles pour la multiplication des grands nombres; mais, quoique le mot de *logistique* ait été repris au XIVe siècle par le moine Barlaam comme titre d'un Traité conçu suivant la même forme euclidienne, il est bien plutôt probable que chez les anciens la Logistique s'enseignait comme la Géodésie, c'est-à-dire sans démonstrations, sur des comptes et des problèmes numériques.

Le fait n'est pas douteux pour la Géodésie, puisque l'ensemble de la collection héronienne reproduit évidemment comme forme un type consacré, dont le premier modèle doit être cherché dans le papyrus mathématique égyptien traduit par Eisenlohr. Or ce papyrus est bien plus une Logistique qu'une Géodésie; d'autre part, la collection héronienne renferme un certain nombre de questions qui appartiennent proprement à la Logistique et qui n'en sont pas moins traitées sur le même type que les autres (1)!

7. Le seul renseignement un peu précis sur le contenu d'une Logistique ancienne doit être cherché dans un scolie sur le *Charmide* de Platon (p. 512, 52) qui reproduit avec une importante addition le fr. 9 des *Variæ collectiones* et doit donc être regardé comme provenant de la même source, c'est-à-dire d'Anatolius. Je donne la traduction de ce scolie avec celle d'un autre fragment d'Anatolius sur la Logistique.

---

(1) On peut notamment citer :

1° Les méthodes attribuées à Pythagore et à Platon pour la formation des triangles rectangles en nombre (*Héron*, p. 56-57) :

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2, \quad \text{si } n \text{ est impair (Méthode de Pythagore).}$$

$$n^2 + \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1\right]^2 = \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1\right]^2, \text{ si } n \text{ est pair} \quad \text{(Méthode de Platon).}$$

2° Le problème de la citerne alimentée par deux tuyaux (p. 194).

3° Les problèmes d'Analyse indéterminée 78 et 79 du *Liber geeponicus* (p. 218-219).

Sur la Logistique.

(V. C. 9 — Scolie sur le *Charmide*). — La Logistique est la théorie qui traite des dénombrables et non des nombres ; elle ne considère pas ce qui est réellement le nombre, mais suppose ce qui est un comme unité et ce qui est dénombrable comme nombre (ainsi 3 pour la triade, 10 pour la décade), et y ramène les théorèmes de l'Arithmétique. Elle examine donc d'une part ce qu'Archimède a appelé le *problème des bœufs*, de l'autre les nombres *mélites* et *phialites*, les uns sur des fioles, les autres sur des troupeaux (1); de même pour les autres espèces de corps sensibles, elle considère les quotités et prononce comme pour des objets absolus (τέλεια).

(Scolie sur le *Charmide*). — « Elle a comme matière tous les dénombrables; comme parties les méthodes dites *helléniques* et *égyptiennes* pour les multiplications et les divisions, ainsi que les additions et décompositions des fractions, ce par quoi elle recherche les secrets des problèmes qu'offre sa matière en ce qui concerne les triangles et les polygones. Elle a pour but ce qui est utile dans les relations de la vie et dans les affaires, quoiqu'elle semble prononcer sur les objets sensibles comme s'ils étaient absolus. »

(V. C. 10). *Quelle est la matière de la Logistique?*

« C'est, a-t-on déjà dit, tous les dénombrables. Comme il peut y avoir dans cette matière un minimum, analogue à l'unité de l'Arithmétique, elle se sert de l'un comme minimum des objets homogènes sous une même pluralité. Ainsi elle pose un homme comme indivisible dans une pluralité d'hommes, mais non pas absolument; une drachme comme indivisible dans une pluralité de drachmes, tandis qu'elle se divise en tant que monnaie. »

8. Je n'insiste pas sur les rapports entre ces fragments et le passage correspondant de l'extrait de Geminus par Proclus ; il est

---

(1) Le mot μῆλον signifie soit *pomme*, comme *mouton;* mais les problèmes ont dû plutôt porter en principe sur des pommes. Dans les *Lois VII* (819, *b-c*), Platon conseille, d'après l'exemple des Égyptiens, l'emploi effectif de pommes et de fioles pour exercer les enfants à résoudre des problèmes numériques.

évident qu'Anatolius a suivi Geminus dans une certaine mesure; malheureusement on ne peut déterminer exactement jusqu'à quel point il a pu s'en écarter ([1]).

Je relève avant tout la distinction entre les méthodes égyptiennes et helléniques pour la multiplication et la division; avant le travail d'Eisenlohr sur le papyrus mathématique égyptien, on se serait en vain demandé en quoi consistait cette distinction. Aujourd'hui on peut conjecturer que les méthodes égyptiennes ne sont autres que celles du papyrus, c'est-à-dire pour la multiplication, la duplication successive avec sommation, pour la division un procédé tout aussi grossièrement élémentaire.

La méthode hellénique doit être au contraire celle de la multiplication figure par figure ([2]), d'après une table des produits apprise par cœur, avec le procédé inverse pour la division. Si cette conjecture est exacte, il y a là une preuve sérieuse que les Grecs avaient, pour les calculs, des aptitudes aussi grandes que pour la Géométrie, car leur invention, si simple qu'elle soit, n'en constitue pas moins un progrès immense.

Les « additions ou décompositions de fractions » se rapportent évidemment au calcul des suites de quantièmes, que les Grecs avaient empruntées aux Égyptiens pour représenter les fractions, et qu'ils ont conservées jusqu'au XIVe siècle, à côté du mode de représentation moderne, lequel constitue également une invention grecque.

Après ces quelques mots sur les parties essentielles et primitives de la Logistique, le fragment du scolie passe aussitôt à la désignation du genre des problèmes les plus complexes qu'elle abordait. Dans les problèmes sur les triangles et les polygones ([3]), nous ne pouvons méconnaître la matière des questions de Diophante sur l'analyse indéterminée; l'existence de Livres antérieurs

---

([1]) La question serait particulièrement intéressante pour l'authenticité du fameux *problème des bœufs* d'Archimède.

([2]) Toutefois, en commençant par les ordres les plus élevés; le système inverse, le nôtre, n'offrait pas, avec la numération écrite des Grecs, d'avantages décisifs.

([3]) Qui comprennent les carrés, peut-être omis par inadvertance du copiste. Les triangles doivent désigner, au reste, non seulement les nombres triangles $= \frac{n(n+1)}{2}$, mais aussi les triangles rectangles en nombres.

au père prétendu de l'Algèbre et traitant des mêmes sujets est donc bien constatée ; car le fragment est évidemment d'une date antérieure aux *Arithmétiques*, quoique Diophante ait pu être contemporain d'Anatolius.

Dans le même ordre de questions rentre évidemment aussi le *problème des bœufs* d'Archimède indiqué plus haut comme l'infranchissable limite des efforts du logisticien. Quant à la lacune que semble offrir le fragment pour ce qui concerne les problèmes du premier et du second degré, elle se trouve comblée par l'indication des nombres *mélites* et *phialites*.

9. Avec ces faibles indices, nous pouvons peut-être apprécier un peu mieux quel fut le réel degré d'originalité de Diophante.

Tout d'abord il a intitulé son Ouvrage Ἀριθμητικά, alors que la matière en avait été jusqu'à lui considérée comme appartenant à la Logistique. Cette innovation est plus qu'une simple affaire de mots; elle révèle le sentiment très juste que la matière dont il s'agit appartient à la science abstraite et primordiale et non pas à une science appliquée et concrète, que cette matière doit au moins être placée sur le même niveau que celle qui formait le sujet des spéculations de Nicomaque et de ses imitateurs.

Elle annonce un changement dans la forme et dans la méthode; en effet, les nombres de Diophante, sauf une seule exception ([1]), sont abstraits; avant lui, d'après les indications du fragment, ils étaient concrets. Les énoncés étaient donc, au moins en général, sous forme d'historiettes ([2]), comme on rencontre déjà dans le papyrus mathématique égyptien, comme le seront plus tard les énoncés hindous, et aussi tant d'autres chez les Arabes et les mathématiciens du moyen âge; les noms des inconnues (*mélites, phialites, des bœufs*) leur étaient assignés sous forme concrète.

D'autre part, Diophante a sans doute, autant qu'il lui était pos-

---

([1]) Le problème V, 33, celui dont l'énoncé est versifié.

([2]) Mises assez souvent en vers, comme le problème des bœufs, et aussi comme les épigrammes arithmétiques de l'*Anthologie*, dont une bonne partie peut d'ailleurs être d'une rédaction postérieure à Diophante; il n'en est pas moins clair que ce sont des problèmes analogues à ces épigrammes, c'est-à-dire du premier degré, qui sont indiqués par la mention des nombres *mélites* et *phialites*.

sible, réagi contre l'habitude des logisticiens de donner des solutions sans démonstrations. Quoique trop souvent celles qu'il propose ne soient pas suffisamment expliquées, la marche analytique qu'il suit est en général satisfaisante, et réellement scientifique.

A la vérité, on ne peut dire que ces innovations dans la forme et la méthode lui soient dues; il ne se les attribue nullement, elles restent donc des inventions anonymes et déjà peut-être anciennes de son temps. Mais, à moins de supposer qu'Anatolius ait copié Geminus aussi servilement que l'a fait Proclus, ce qui, pour ma part, me paraît assez invraisemblable, il faut bien admettre que l'ancienne forme d'énoncés prédominait toujours de son temps, comme aussi le système d'exposer les solutions sans explication, système qui, chez les Égyptiens, les Hindous, les Arabes et au moyen âge, a généralement accompagné les énoncés sous forme concrète.

Diophante a donc trouvé devant lui, comme matériaux, de nombreux problèmes et même des plus complexes; mais, comme forme et comme méthode, il n'avait que de rares précédents; ce qui explique assez bien et le succès de son Ouvrage, et la disparition à peu près complète des traces de travaux antérieurs analogues.

J'ajoute que jusqu'à la fin de l'empire byzantin [1], quoiqu'on ne discutât pas le titre d'*Arithmétiques* adopté par Diophante, on a toujours fait entre la matière qu'il traitait et celle de l'Arithmétique théorique une distinction profonde, revenant dans une certaine mesure à celle que Geminus établissait entre cette science et la Logistique. On n'a jamais reconnu le lien intime que la théorie des nombres devait établir entre les deux sujets.

Ainsi, dans un fragment inédit d'un commentaire anonyme sur Nicomaque, l'auteur qui a commencé par copier Anatolius pour la définition de l'Arithmétique, pour sa matière et ses divisions, qui, par suite, nous répète un dernier écho de Geminus, continue comme suit :

« Le nombre est de deux sortes, soit mesurant, soit mesuré

---

[1] Par exemple : Rhabdas au XIVe siècle (manuscrit 2428 de la Bibliothèque Nationale), Lettre à Tzavoukhe.

(ainsi 10 mesures, si c'est 10 unités; il est mesuré si c'est, par exemple, dix pièces de bois ou dix feux); le but du présent Traité (Nicomaque) est de discourir sur le nombre mesurant ; quant au mesuré, Diophante l'étudie dans les treize Livres de son Arithmétique [1]. »

Ainsi il n'avait servi de rien à Diophante de ne traiter que des nombres abstraits; ils valaient toujours chez lui comme concrets; la distinction traditionnelle entre l'Arithmétique et la Logistique subsistait encore, alors même que le profond abîme qui les séparait à l'origine se trouvait désormais comblé de fait.

---

[1] Manuscrit 2372 de la Bibliothèque Nationale, fol. 55. — Τὸν γὰρ μετρούμενον ἀριθμὸν Διόφαντος ἐν τοῖς δέκα καὶ τρισὶν αὐτοῦ βιβλίοις τῆς ἀριθμητικῆς παραδίδωσιν.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FISCHER (O.). — Konforme Abbildung sphärischer Dreiecke auf einander mittelst Algebraischer Funktionen. Inaugural-Dissertation. In-4°, 76 p. Leipzig, 1885.

On sait que M. Schwarz (*Journal de Crelle*, t. 70) a établi rigoureusement la possibilité de l'*Abbildung* d'un cercle ou d'un demi-plan sur un polygone quelconque limité par des arcs de cercle. Dans le cas particulier d'un triangle, d'angles $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, le problème dépend de l'intégration de l'équation différentielle du troisième ordre, qui admet pour intégrale générale le quotient de deux branches linéairement indépendantes de la fonction générale $P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & Z\\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix}$ de Riemann, où $\alpha' - \alpha = \lambda$, $\beta' - \beta = \mu$, $\gamma' - \gamma = \nu$. D'autre part, nous connaissons, d'après un Mémoire postérieur du même géomètre (*Journal de Crelle*, t. 75), tous les cas où cette intégrale est algébrique; par une projection stéréographique convenable, le triangle correspondant se transforme en un triangle sphérique dont les côtés sont situés dans trois plans de symétrie d'une double pyramide ou d'un polyèdre régulier. Le rapprochement de ces deux résultats montre clairement que l'application conforme d'un triangle sphérique de cette nature sur un demi-plan pourra toujours être effectuée par l'intermédiaire d'une fonction algébrique. C'est l'étude de ce problème qui constitue l'objet du travail de M. Fischer; il se borne d'ailleurs au cas le plus intéressant et aussi le plus difficile, celui où les trois côtés du triangle appartiennent à trois plans de symétrie d'un icosaèdre.

Outre les travaux déjà cités, il convient de rappeler un résultat important dû à M. Klein, et qui sert de point de départ aux recherches de M. Fischer. « Soient f, H, T les trois formes homogènes en z_1, z_2, qui constituent des invariants par rapport aux soixante substitutions du groupe de l'icosaèdre, et qui sont respectivement de degré 12, 20, 30. Ces trois formes, égalées à zéro, représentent, comme on sait, les sommets de l'icosaèdre, du dodécaèdre et du triakontaèdre, et elles donnent lieu à l'identité

$$T^2 = 12^3 f^5 - H^3.$$

Soient $z = \frac{z_1}{z_2}$ la variable imaginaire qui représente un point de la sphère et Z la variable qui représente un point du plan; l'équation permettant d'effectuer l'application conforme d'un triangle icosaédrique sur le demi-plan des Z situé au-dessus de l'axe réel sera de la forme

$$\text{(A)} \qquad \frac{H^3(z)}{12^3 f^5(z)} = R(Z),$$

R(Z) désignant une fonction rationnelle de Z, qui se réduit à Z dans le cas du triangle élémentaire (*elementardreieck*) dont les angles sont $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$ ».

Le premier Chapitre du travail de M. Fischer est consacré à l'étude de la fonction R(Z), correspondant à un triangle icosaédrique dont les angles sont supposés connus $\frac{\alpha\pi}{n_1}, \frac{\beta\pi}{n_2}, \frac{\gamma\pi}{n_3}$. Par des considérations très simples, l'auteur démontre que R(Z) sera de degré n si le triangle à appliquer se compose de n triangles élémentaires; les n valeurs de Z correspondant à une valeur de R différente de 0, 1, ∞ devront être toutes distinctes; les racines des équations $R(Z) = 0$, $R(Z) = 1$, $R(Z) = \infty$, qui sont différentes de 0, 1, ∞, devront être respectivement d'un degré de multiplicité égal à 3, 5, 2; enfin les degrés de multiplicité des racines 0, 1, ∞ se déduisent bien aisément des valeurs de α, β, γ, n_1, n_2, n_3. Les transformations rationnelles connues qu'admet la fonction générale P de Riemann, lorsqu'un ou plusieurs des éléments λ, μ, ν restent arbitraires, fournissent de la manière la plus facile un certain nombre de fonctions R(Z). Mais les fonctions obtenues par ce procédé sont en nombre assez restreint; elles répondent aux cas 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13 du Tableau de M. Schwarz. Les autres fonctions R(Z) proviennent de transformations rationnelles des fonctions P, où il est nécessaire de particulariser tous les éléments. M. Klein a calculé directement leurs valeurs pour les cas 12, 14, 15 du Tableau de M. Schwarz. On se trouve ainsi en possession des fonctions R(Z) convenant aux dix triangles de ce Tableau.

Je ne ferai que signaler le Chapitre suivant où il est question des deux branches linéairement indépendantes de la fonction P de

Riemann $z_1(Z)$, $z_2(Z)$, dont le rapport est égal à z. Dans le troisième Chapitre, qui constitue la partie la plus originale de son travail, l'auteur recherche tous les cas où le premier membre de l'équation

$$(B) \qquad \frac{H^3(z)}{12^3 f^5(z)} - R\left[\frac{H^3(\eta)}{12^3 f^5(\eta)}\right] = 0$$

est décomposable en un produit de facteurs rationnels par rapport à z et η.

D'après ce qui a été dit plus haut, si l'on considère les variables imaginaires z et η comme représentant respectivement les points de deux sphères, et si la fonction R fournit l'*Abbildung* sur un demi-plan du triangle icosaédrique de la sphère z, dont les angles sont $\frac{\alpha\pi}{n_1}$, $\frac{\beta\pi}{n_2}$, $\frac{\gamma\pi}{n_3}$, l'équation (B) fournira l'*Abbildung* de ce même triangle sur le triangle élémentaire de la sphère η. Le résultat obtenu est remarquablement simple. Par des considérations empruntées à la théorie des groupes, on reconnaît d'abord que le premier membre de l'équation (B), si elle est décomposable, est égal à un produit de soixante facteurs de la forme $z - r(\eta)$ où $r(\eta)$ est une fonction rationnelle. La surface de Riemann à soixante feuillets, correspondant à l'équation (B), devra donc se décomposer en soixante surfaces à un seul feuillet, et une étude directe de cette surface montre qu'il en sera ainsi toutes les fois que les angles du triangle icosaédrique ont respectivement des valeurs de la forme $\frac{\alpha\pi}{3}$, $\frac{\beta\pi}{5}$, $\frac{\gamma\pi}{2}$, et dans ce cas seulement.

Ici se place une nouvelle distinction, suivant que $\beta \equiv \pm 1 \pmod{5}$, ou $\beta \equiv \pm 2 \pmod{5}$. Dans le premier cas, les variables z, η étant liées par la relation $z - r(\eta) = 0$, si l'on applique à la variable η une quelconque des soixante substitutions de l'icosaèdre, la variable z sera transformée par la même substitution : $z - r(\eta)$ est une fonction cogrédiente. Dans le second cas, au contraire, si l'on applique à η une de ces substitutions, on devra appliquer à z une substitution différente, qui d'ailleurs se déduit fort simplement de la première : $z - r(\eta)$ est une fonction contragrédiente. Le dernier Chapitre contient, pour le calcul de $r(\eta)$, deux méthodes générales, dont l'une offre une application des relations données

par Gauss entre les fonctions contiguës. Un certain nombre d'exemples permettent de se rendre compte de la façon dont ces méthodes doivent être appliquées.

Le travail de M. Fischer sera consulté utilement par toutes les personnes désireuses d'approfondir cette question des intégrales algébriques de l'équation hypergéométrique. E.-G.

LÜHMANN (Friedrich v.). — Die Sectio Rationis, Sectio Spatii und Sectio determinata des Apollonius nebst einigen verwandten geometrischen Aufgaben. Programm des Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums. Königsberg, Nm., 1882. In-4°, 16 pages et une Table lithogr.

§ 1. Historique des problèmes. — § 2. *Sectio rationis:* Étant données deux lignes droites L et L′ et sur elles respectivement les points A et B, enfin un point quelconque P, mener par P une droite qui rencontre L et L′ respectivement en deux points X et Y, tels que les segments AX et BY soient dans un rapport donné $m : n$: 1° solution d'Apollonius; 2° solution de Halley; 3° solution projective (selon Hankel). — § 3. Les solutions récentes de la *sectio rationis:* 1° solution de Petersen; 2° solution de v. Lühmann. — § 4. *Sectio spatii:* Étant données deux lignes droites L et L′ et sur elles respectivement les points A et B, enfin un point quelconque P, mener par P une droite qui rencontre L et L′ respectivement en deux points X et Y, tels que le produit des deux segments AX et BY soit égal à un rectangle donné $m.n$: 1° prétendue solution d'Apollonius; 2° solution de Halley; 3° solution projective (selon Hankel); 4° cas spécial traité par Petersen et d'autres; 5° solution de v. Lühmann. — § 5. *Sectio determinata :* Étant donnés quatre points A, B, A′, B′ sur une droite, déterminer sur elle un point X, de sorte que le rapport des produits AX.BY et A′X.B′Y soit égal à un rapport donné $m : n$. — § 6, 7, 8. D'autres problèmes analogues à ceux d'Apollonius. E. L.

SCHUMANN (Ad.). — Die Steinerschen Kreisreihen und ihre Beziehung zum Poncelet'schen Schliessungstheorem. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Askanischen Gymnasiums. Berlin, 1883. In-4°, 28 pages.

On connaît ces deux théorèmes : « Si deux circonférences sont telles que l'on puisse inscrire dans l'une un polygone qui soit circonscrit à l'autre, il y a une infinité d'autres polygones qui jouissent de la même propriété (Poncelet). Si deux circonférences sont telles que l'on puisse décrire une série finie de cercles dont chacun touche les deux circonférences données, et en même temps les deux cercles voisins de la série, il y a une infinité d'autres séries qui jouissent de la même propriété (Steiner). »

Dans la première Partie de son travail, M. Schumann reproduit la démonstration qu'on tire aisément, pour le théorème de Steiner, de la transformation au moyen de rayons vecteurs réciproques, en changeant les deux cercles donnés en deux circonférences concentriques. Retrouvée par les élèves de Steiner, cette manière d'aborder le problème a été publiée presque entièrement dans Geiser, *Einleitung in die synthetische Geometrie*. Leipzig, Teubner, 1869. La deuxième Partie remplace les deux cercles par deux sections coniques, le faisceau de cercles de Steiner par le faisceau de sections coniques, passant par deux points d'intersection des données et touchant chacune d'elles. Le procédé analytique qui sert à résoudre la question n'exige que l'emploi des fonctions cyclométriques et montre d'avance l'enchaînement de ces conclusions dont on a besoin dans le cas plus général.

Pour représenter convenablement un faisceau de sections coniques, la troisième section développe une nouvelle méthode analytique qui ramène la question à la théorie des fonctions elliptiques. Enfin l'auteur démontre, dans la quatrième Partie, son théorème général qui réunit les deux propositions de Poncelet et de Steiner. « Deux sections coniques S et S_1 déterminent deux faisceaux de sections coniques qui passent par deux points d'intersection de S et S_1 et qui touchent encore chacune de ces sections coniques données. Arrangeons les éléments d'un tel faisceau dans une série, en prescrivant que deux membres consécutifs soient liés à se couper sur une section conique C qui passe, elle aussi, par les mêmes deux

points d'intersection de S et S_1. Alors, s'il arrive une fois que la série des sections coniques se ferme avec n membres après c circuits, ce cas se présentera toujours, quel que soit l'élément initial de la série. »

Le mérite de cette proposition générale consiste en ce qu'elle embrasse tout à la fois les théorèmes de Poncelet et de Steiner; sa démonstration fait découvrir les relations métriques d'où dépend la possibilité de la question. L'auteur finit par démontrer les conditions spéciales qui font naître les deux théorèmes de Poncelet et de Steiner, et par indiquer quelques transformations de Géométrie synthétique qui réunissent tous ces théorèmes. E. L.

MÜLLER (RICHARD). — ÜBER EINE GEWISSE GLEICHUNG $2n^{\text{ten}}$ GRADES, DEREN SPECIALFÄLLE $n = 2$ UND $n = 3$ BEIM NORMALENPROBLEM DER ELLIPSE UND DES ELLIPSOIDS AUFTRETEN. DISSERTATION. Berlin, 1884. In-8°, 36 pages.

Ce travail a pour objet l'étude de l'équation

$$\sum \frac{a_i^2 \xi_i^2}{(a_i - x)^2} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ désignent des constantes quelconques réelles. Pour $n = 3$, c'est l'équation devenue célèbre par les recherches de Joachimsthal (*Journal für Math.* de Borchardt, t. 59) sur la réalité des normales d'un ellipsoïde qu'on peut mener par un point donné (ξ_1, ξ_2, ξ_3).

En ce qui concerne les recherches sur la réalité des racines d'une équation algébrique à coefficients variables, M. L. Kronecker a le premier établi le principe qu'on peut remplacer l'étude des fonctions de Sturm par l'examen de la forme et des singularités de la variété qui correspond au discriminant de l'équation. (*Discriminanten-Mannigfaltigkeit*). Voir *Berliner Monatsbericht*, février 1878. On y lit (p. 117) sur la séparation des différentes régions de cette variété : « Vu que cette séparation est le seul but où l'on vise en établissant une série de fonctions de Sturm, ce n'est que cette considération qui garantit la pleine intelligence de ce qui est permanent dans les formes diversement variées que

présentent les fonctions de Sturm. » En même temps M. Kronecker donne un exemple de cette manière de procéder en discutant l'équation générale du quatrième degré.

M. Müller réussit à lier les conditions d'inégalité qui décident sur la réalité des racines, aux différentes *nappes* d'une variété d'ordre $6(n-1)$ qui correspond (pour $n=3$) à la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde. Cette possibilité repose sur l'application de l'analogue des coordonnées elliptiques orthogonales et sur la théorie de la courbure d'une variété n^{uple}, laquelle a été donnée, elle aussi, par M. Kronecker (*Berliner Monatsbericht*, août 1869) et attachée à la théorie de sa *caractéristique* de systèmes de fonctions (*ibid.*, mars 1869). E. L.

MÉLANGES.

SUR L'ÉPOQUE OU VIVAIT GEMINUS;

PAR M. PAUL TANNERY.

1. F. Blass (*Dissertatio de Gemino et Posidonio*, Kiel, 1883) a récemment émis, sur l'époque où vivait Geminus, une opinion qui, si elle était vraie, pourrait changer singulièrement les conclusions à tirer des fragments conservés par Proclus; qui, en tout cas, ne permettrait plus de dater au moins de l'ère chrétienne le commencement de la décadence des études géométriques.

D'après F. Blass, l'*Introduction aux Phénomènes* (Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα) de Geminus ne serait qu'un extrait de l'Ouvrage de Posidonius Περὶ μετεώρων; les données que renferme l'*Introduction*, et qui semblent permettre d'en déterminer la date, ne seraient valables que pour le Traité originaire.

Le titre primitif de l'*Introduction* aurait d'ailleurs été : Γεμίνου ἐκ τῶν Ποσειδωνίου Μετεωρολογικῶν ἐξήγησις τῶν φαινομένων.

D'après l'opinion actuelle, on ne pourrait regarder Geminus que comme un simple plagiaire, car il donne exactement les mêmes preuves, etc., que Posidonius, ce que nous pouvons contrôler par Cléomède, qui certainement utilisait les écrits du philosophe d'A-

pamée. On ne peut supposer qu'un élève de ce dernier ait commis un tel plagiat, alors que son maître vivait encore.

Enfin le nom latin de Geminus prouverait qu'on ne peut le placer dans la première moitié du siècle avant l'ère chrétienne. Toutefois il a vécu avant Alexandre d'Aphrodisias (fin du IIe siècle après J.-C.), qui l'a cité.

2. Il est facile de reconnaître que ces arguments sont inconsistants. Le seul véritablement spécieux est le dernier, d'autant que l'on ne peut guère soutenir l'explication donnée jusqu'à présent pour ce nom, incontestablement romain, porté par un auteur grec à l'époque présumée; Geminus n'est pas un nom de *gens* qui ait pu être donné à un affranchi.

Il y a là un problème historique assez obscur; ce nom indique-t-il réellement que notre auteur ait été citoyen romain, alors qu'il écrit assez purement le grec pour que sa nationalité hellène ne puisse guère être révoquée en doute? Comment aura-t-il pu acquérir ce droit de cité romaine? Mais, en fait, nous n'avons pas besoin de résoudre ce problème; il nous suffit qu'il existe, avec plus de singularités encore (1), pour le géographe Strabon, qui, lui aussi, porte un surnom romain, mais est foncièrement grec, au moins d'éducation. Nous allons voir en effet que l'on peut parfaitement admettre, avec les données sur la date de l'*Introduction*, que Geminus ait été contemporain de Strabon, c'est-à-dire ait vécu dans la seconde moitié du siècle avant l'ère chrétienne, plutôt que la première.

Geminus (éd. Halma, p. 43) dit que c'est une erreur des Grecs que de regarder la fête égyptienne d'Isis comme coïncidant avec la date du solstice d'hiver d'après Eudoxe, mais il ajoute que cette coïncidence avait eu lieu en fait 120 ans avant lui. Or la fête d'Isis durait du 17 au 20 athyr de l'année vague égyptienne de 365 jours, dont les époques sont bien connues, puisque c'est celles dont se sert Ptolémée. Le solstice d'hiver, d'après Eudoxe,

---

(1) Strabon parle souvent de la famille de sa mère, qui était une des plus nobles de l'Asie Mineure; on n'a aucun indice sur son père. On peut encore citer, comme du même temps à peu près, le père de l'apôtre saint Paul, juif de Tarse et citoyen romain.

n'est pas aussi bien déterminé, mais on peut regarder la date donnée par Boeckh (28 décembre de l'année julienne proleptique) comme exacte à un ou deux jours près. Suivant le jour de la fête d'Isis que l'on voudra faire coïncider avec la date de Boeckh, on trouvera une des seize années de 85 à 70 avant J.-C. (1). En conséquence, on indique d'ordinaire les quatre dernières années de cet intervalle comme correspondant à l'époque de la rédaction de l'*Introduction aux phénomènes*.

Mais cette conclusion suppose une précision qui n'existe pas en réalité dans la pensée de Geminus. Si on lit attentivement tout le long passage, d'ailleurs très clair, où il explique comment se déplacent les dates de l'année vague par rapport au solstice, on reconnaîtra que le chiffre de 120 n'est nullement donné par lui d'après un témoignage chronologique, qu'il est au contraire conclu de ce que, au moment où il écrit, il y a un intervalle d'un mois entier entre les fêtes d'Isis et le solstice d'hiver, et qu'à raison de 30 jours au mois et de 4 ans pour le déplacement d'un jour, il y a donc *au moins* 120 ans que la coïncidence a eu lieu.

Or, qu'en parlant d'un mois entier il parle en nombres ronds, et en indiquant un minimum, c'est ce qui ressort nettement de ce qu'il dit ensuite :

« Après 4 ans, il y a eu une différence d'un jour, différence insensible pour les saisons de l'année ; après 40 ans, la différence a été de 10 jours, *ce qui n'est pas encore sensible*. Mais maintenant qu'il y a une différence d'un mois pour 120 ans, il faut un excès d'ignorance pour continuer à regarder la fête égyptienne d'Isis comme tombant au solstice d'Eudoxe. »

Ainsi Geminus s'en rapporte simplement à une constatation facile pour tous ceux qui pouvaient voir célébrer la fête d'Isis, au fait qu'il y avait au moins un mois entier de cette fête au solstice d'hiver ; la différence en plus n'allait sans doute pas à un demi-mois ; mais, d'après le texte même, il admet implicitement qu'elle pouvait être de 10 jours.

Nous devons donc conclure qu'en tout cas Geminus écrivait son

---

(1) Si Geminus, ce que je crois d'ailleurs douteux, comme je le dirai, écrivait à Rome et pour les Romains, il faudrait peut-être augmenter de quatre ans cet intervalle, car à Rome la fête d'Isis paraît avoir duré cinq jours.

Introduction après 70 avant J.-C., et que peut-être il ne l'écrivait pas avant l'an 30. Dans ce dernier cas, si l'Ouvrage est d'ailleurs de sa jeunesse, ce qui n'a rien d'impossible, il aurait à peine été plus âgé que Strabon, et il n'aurait pas été en fait l'élève de Posidonius.

Ce dernier point est le seul qu'on puisse, ce semble, concéder à F. Blass. Mais les raisons qu'il met en avant pour le rendre probable n'en sont pas pour cela meilleures, ainsi que nous allons le voir.

3. Les motifs qu'on a eus pour mettre Geminus en rapport avec Posidonius sont fondés sur deux conjectures insuffisamment assurées, et sur un fait qui n'est nullement péremptoire.

Les conjectures étaient relatives à l'époque de la vie de Geminus, qui coïncidait avec celle où Posidonius professait à Rhodes, et au lieu de naissance de l'auteur de l'*Introduction* qu'on plaçait précisément à Rhodes, uniquement parce que ses déterminations astronomiques se rapportent en thèse générale à l'horizon de cette ville. Mais cela signifie seulement qu'il utilise les nombres donnés par Hipparque.

Le fait consiste en ce que Geminus avait écrit une *Exégèse abrégée des Météorologiques de Posidonius*. A tout le moins, Simplicius (VIe siècle après J.-C.), dans son *Commentaire sur la Physique d'Aristote* (ed. Diels, p. 291-292), donne un long fragment de Geminus qu'il emprunte à Alexandre d'Aphrodisias (1), et que ce dernier avait extrait ἐκ τῆς ἐπιτομῆς τῶν Ποσειδωνίου Μετεωρολογικῶν ἐξηγήσεως, titre qui donne lieu à controverse.

Le sens que j'ai admis, et qui me paraît le plus naturel, suppose qu'ἐπιτομῆς correspond à un adjectif et doit par suite être lu ἐπιτόμου. L'interprétation ancienne est que Geminus aurait fait un *Abrégé* d'un Ouvrage de Posidonius, intitulé *Exégèse des Météorologiques*. Boeckh a montré que cette interprétation est insoutenable, et il a admis que Geminus avait composé d'abord une *Exégèse des Météorologiques* de Posidonius, puis un abrégé de cette exégèse; dans cette hypothèse, il conviendrait d'introduire dans le texte l'article τῆς avant τῶν, comme l'a indiqué Diels. Enfin Blass a forgé,

(1) Simplicius ne connaît pas autrement l'ouvrage en question.

d'après ce texte, le titre qu'il propose comme ayant été remplacé par celui d'*Introduction aux Phénomènes* pour l'Ouvrage qui nous reste de Geminus.

Deux points doivent être, en tout état de cause, mis hors de doute : c'est que, d'une part, Geminus avait, dans le Traité cité par Simplicius, fait autre chose qu'abréger purement et simplement Posidonius, que d'un autre côté il s'y occupait de *Météorologie*, au sens actuel du mot, tandis que l'Ouvrage qui nous reste ne traite que de *Cosmographie*. En effet, on ne peut rapporter qu'au premier des deux écrits une citation que fait Alexandre d'Aphrodisias dans son *Commentaire sur les Météorologiques d'Aristote*, (p. 118); après avoir rapporté l'explication de l'arc-en-ciel par Posidonius, il donne une preuve avancée par Geminus et Ælius [1] pour montrer que ce phénomène est une simple apparence due à une réflexion de la lumière.

4. Le long fragment conservé par Simplicius pourrait faire illusion sur l'objet de l'Ouvrage de Geminus auquel il a été emprunté; ce fragment figurerait mieux en effet, ce semble, comme préambule à l'*Introduction aux Phénomènes*, que dans un Traité de Météorologie. Geminus y explique quels rôles différents jouent dans l'étude des phénomènes célestes l'*Astrologie* d'une part, la *Physique* de l'autre; cette distinction, conforme aux principes d'Aristote, revient à peu près à celle que nous établirions entre l'Astronomie d'observation et de calcul d'un côté, et la Mécanique céleste de l'autre; ainsi au sens ancien les lois de Kepler appartiendraient à l'*Astrologie*, la loi de Newton à la *Physique*. Il est à penser qu'après ce préambule Geminus arrivait à distinguer l'objet propre de la Météorologie, et à remarquer que son étude rentrait dans la *Physique*.

Cette marche, un peu singulière à nos yeux, s'explique mieux si l'on observe qu'à proprement parler, chez les anciens, μετέωρα

---

(1) Οἱ περὶ Γέμινον καὶ Αἴλιον. Qui peut être cet Ælius? Le texte n'est certainement pas assuré; peut-être donnait-il un second nom porté par Geminus, suivant l'usage romain. La preuve semble avoir mal été comprise par Alexandre d'Aphrodisias. Geminus, d'après lui, aurait affirmé que l'arc-en-ciel paraissait se rapprocher quand on marchait vers lui, s'éloigner quand on marchait dans la direction opposée.

désigne, non pas les météores (plutôt μετάρσια), mais bien les corps célestes ([1]). Mais Aristote avait donné au terme de *Météorologique* un sens spécial, que Posidonius a pu élargir (par exemple en y faisant rentrer la partie *physique* de la science du ciel), qu'en tout cas il n'a pas essayé de transformer pour le mettre en rapport avec l'usage de la langue. Ainsi il avait écrit deux Ouvrages bien distincts, que Diogène Laërce cite, l'un sous le titre Περὶ μετεώρων, relatif aux corps célestes ([2]), l'autre Μετεωρολογικὴ στοιχείωσις (*Eléments de Météorologie*), traitant des mêmes sujets que l'Ouvrage d'Aristote ([3]). C'est sur ce second écrit de Posidonius que Geminus a dû composer le travail mentionné par Simplicius; mais il est bien difficile de croire avec Blass que cet écrit ait traité des *Phénomènes* célestes ([4]), objet de l'*Introduction*.

Le titre supposé par Blass pour ce dernier Ouvrage, d'Ἐξήγησις τῶν φαινομένων, est également inadmissible; car, pour les Grecs du temps, il aurait signifié, non pas *Explication des Phénomènes célestes,* mais bien *Commentaire* sur un Ouvrage portant le titre de *Phénomènes* ([5]), par exemple celui d'Aratus.

Au contraire, le titre actuel est tout à fait conforme aux habitudes de la langue grecque. L'*Introduction* est un manuel élémentaire, destiné aux étudiants dont l'éducation libérale doit comprendre au moins une teinture des sciences, utile également pour ceux qui veulent plus tard les approfondir. Des écrits de ce genre ont joué un rôle d'autant plus considérable que les Ouvrages proprement scientifiques, même les plus élémentaires, étaient composés sous la forme décousue d'un ensemble de théorèmes détachés. Ainsi,

---

([1]) Comparez le titre de Cléomède : Κυκλικὴ θεωρία μετεώρων (*Théorie circulaire des corps célestes*).

([2]) Diog. L. II, 135. « Dans son Livre III *Sur les corps célestes*, Posidonius laisse subsister la surface (géométrique) à la fois pour l'intelligence et aussi en réalité (καθ' ὑπόστασιν) ». II, 144 : « Le Soleil est un feu pur, comme dit Posidonius dans son Livre XVII *Sur les corps célestes* ». Le paradoxe philosophique renfermé dans la première citation n'a rien d'étonnant d'après les doctrines stoïciennes.

([3]) Diog. L. II, 138 : « Le monde est le système du ciel et de la terre, avec les objets naturels qu'ils renferment ». II, 152 : « Explication de l'arc-en-ciel ».

([4]) C'est là le sens constant de φαινόμενα, proprement : l'ensemble des observations astronomiques.

([5]) Le seul Ouvrage qui nous reste d'Hipparque s'appelle précisément Ἱππάρχου τῶν Ἀράτου καὶ Εὐδόξου φαινομένων ἐξηγήσεις.

pour l'Astronomie, les premiers Livres à étudier étaient, au temps de Geminus, ceux d'Autolycos de Pitane, les petits Traités qui nous restent d'Aristarque de Samos et d'Hypsiclès, les *Phénomènes* d'Euclide, l'ancienne *Sphérique* (d'Eudoxe ?) dont F. Hultsch a démontré l'existence et qu'ont remplacée plus tard les écrits de Théodose de Tripoli et de Ménélaos. Il était évidemment au moins utile, pour s'intéresser à cette suite abstraite de déductions isolées, de commencer par lire préalablement une *introduction* comme celle de Geminus.

Il y a eu chez les Grecs des *Introductions arithmétiques* (Nicomaque), *harmoniques* (Ps. Euclide = Cléonide) et aussi *géométriques* (Nicomaque, II, 6, 1, Ἐν τῇ γεωμετρικῇ εἰσαγωγῇ) (1), pour les trois autres branches de la Mathématique, suivant la division pythagoricienne; il devait y en avoir encore mieux pour l'Astronomie, et, d'après le sens avéré du mot *Phénomènes*, le titre de l'Ouvrage de Geminus ne doit soulever aucun scrupule.

5. J'arrive maintenant à l'hypothèse fondamentale de Blass, que Geminus aurait copié dans Posidonius une donnée chronologique sans s'apercevoir qu'il fallait la modifier d'après l'intervalle de temps écoulé depuis la rédaction de cette donnée.

Pour pouvoir supposer une pareille inadvertance, il faut admettre que Geminus était un simple copiste, et même un copiste assez inintelligent. S'il s'agissait de Cléomède, avec lequel Blass le met en parallèle, la question pourrait peut-être se poser sérieusement. Pour Geminus, il en est tout autrement.

La similitude de son Manuel cosmographique avec l'Ouvrage de Cléomède, du moment où cette similitude ne va pas jusqu'à des identités de rédaction, ne peut aucunement prouver que le premier de ces Traités aurait été extrait d'un Ouvrage de Posidonius, comme semble l'avoir été au moins la plus grande partie du second. Le fonds de ce que renferment les écrits de Geminus et de Cléomède est en effet bien antérieur à Posidonius, et la ressemblance de ces écrits ne dépasse pas d'autre part celle que présentent, de nos jours, deux Traités élémentaires de Cosmographie. Evidemment aucun des deux auteurs n'est original; mais il y a au moins cette diffé-

(1) Comp. aussi Héron, Εἰσαγωγαὶ τῶν γεωμετρουμένων, ed. Hultsch, p. 44.

rence entre eux que les connaissances de seconde main qu'ils possèdent sont assez mal digérées chez l'un, bien coordonnées et élucidées chez l'autre. Le Traité de Geminus n'est certes pas parfait de tous points ; ce n'en est pas moins un des meilleurs écrits de l'antiquité, et nulle part il n'y commet une faute qui puisse le faire croire capable de tomber dans l'erreur supposée par Blass. Les autres fragments que l'on a de lui, dans Proclus, dans Simplicius, dans Eutocius, nous le montrent partout comme un auteur exact et judicieux.

Je dirai plus; si, dans son *Introduction aux Phénomènes,* Geminus ne cite jamais Posidonius, il ne faut nullement en conclure qu'il cherche à déguiser un plagiat, mais bien plutôt qu'il n'estimait pas assez haut les travaux cosmographiques du philosophe d'Apamée pour s'appuyer sur leur autorité. C'est ainsi que, pour la dimension de la Terre, il s'en tient aux évaluations d'Eratosthène et d'Hipparque, et ne mentionne pas la malheureuse correction de Posidonius ; c'est ainsi encore que, pour rapporter l'opinion que la zone torride est habitable, il va la rechercher à sa source, dans Polybe. Quant à ce qu'il dit de la fête d'Isis, il lui suffirait sans aucun doute des renseignements que lui donnait Eratosthène dans son *Octaétéride*, à laquelle il se réfère ([1]).

Posidonius, à la vérité, a eu, de son temps, une très grande réputation; par l'étendue de ses connaissances, par la variété de ses recherches, il a cherché, pourrait-on dire, à être l'Aristote du stoïcisme. Mais la postérité a su faire la différence; le monument élevé par le Stagirite subsiste presque entier; de Posidonius il ne nous reste guère que des fragments épars dans Strabon et dans Cléomède, et le fait est que ces fragments ne lui font guère honneur.

Le plus considérable est le Chapitre I du Livre II de Cléomède, qu'il faut lui attribuer à peu près en entier, puisqu'il y est seul cité (au début), et que le style et la façon en tranchent assez singulièrement avec le reste de l'Ouvrage. Il s'agit de réfuter le paradoxe d'Epicure que, pour les dimensions du Soleil, il faut s'en tenir au témoignage immédiat de nos sens ; il est difficile d'imaginer avec

---

([1]) Eratosthène, dans les dix dernières années de sa vie, a pu voir le solstice d'hiver tomber au temps de la fête d'Isis.

quelle maladresse le stoïcien se tire d'une tâche aussi simple; il entasse les arguments sans s'inquiéter de leur valeur, les expose de la façon la plus diffuse et termine par des injures grossières à l'adresse d'Epicure ([1]).

Qui étudiera sérieusement cette singulière polémique arrivera à cette conclusion que Posidonius était peut-être plus susceptible que Geminus de commettre l'erreur supposée par F. Blass. La conjecture formulée par ce dernier ne repose donc sur aucun fondement sérieux.

6. En résumé, on doit maintenir au Ier siècle avant l'ère chrétienne l'époque de la vie de Geminus, sans qu'on puisse d'ailleurs, pour la composition de l'*Introduction aux Phénomènes*, préciser une date, par exemple l'an 50, autrement que comme une moyenne entre les possibilités extrêmes.

Nous avons vu qu'on ignorait aussi, en réalité, si Geminus avait suivi les leçons de Posidonius, et s'il connaissait Rhodes autrement que par les Livres. Où vivait-il? on l'ignore de même; si, dans son *Introduction*, il parle deux fois de Rome, et notamment y indique la durée du plus long jour, on ne peut en conclure qu'il y avait fixé sa résidence; contre l'hypothèse qui l'y ferait habiter, on peut remarquer qu'il ne figure pas sur la liste si considérable des auteurs utilisés par Pline, et que ceux qui le citent ont vécu à Athènes ou à Alexandrie.

Où était-il né? Nous ne le savons pas davantage; rien n'empêche, à la rigueur, de proposer son identification avec un Geminus de Tyr, auteur de trois Livres sur l'interprétation des songes, cités par Artémidore, écrivain du IIe siècle après J.-C. (II, 49). Les stoïciens, Posidonius surtout, avaient déjà versé dans toutes les superstitions; Geminus, qui admet au moins les principes de l'Astrologie judiciaire, pouvait bien croire aux songes; il faut se rappeler que Pappus (*voir* Suidas) avait, lui aussi, écrit sur le même sujet ([2]).

([1]) La reproduction dans Cléomède de ce curieux morceau est une preuve assurée qu'à l'époque où vivait ce dernier auteur l'épicurisme était encore assez florissant. Letronne a donc certainement eu tort de le placer après le IIe siècle de l'ère chrétienne. (*Voir*, au reste, à ce sujet, l'article de M. J. Bertrand dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, janvier 1884, p. 18).

([2]) Quant aux quelques pages sur les couleurs, dédiées par un Geminus au

Mais, en fait, il n'y a là que des conjectures insuffisantes; la vérité est que nous ne savons rien qui concerne la personnalité de Geminus, sauf deux dates, éloignées d'une quarantaine d'années, et entre lesquelles a dû tomber celle de la rédaction de l'un de ses Ouvrages. Pour lui maintenir le rôle important qu'il joue, relativement à l'histoire des Mathématiques, cela suffit.

« très sage César », et publiées par Iriarte dans son *Catalogue des manuscrits grecs de Madrid*, p. 429-431, c'est un écrit datant des luttes entre les quatre factions du cirque à Byzance.

1re Part

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CREMONA (L.). — Les figures réciproques en Statique graphique. Ouvrage précédé d'une Introduction du Dr *Jung* et suivi d'un Appendice extrait des Mémoires et des Cours de Statique graphique de *Saviotti*. Traduit par *Louis Bossut*. 2 vol. in-8° (texte et atlas). Paris, Gauthier-Villars; 1885.

Le titre du livre, le nom du principal auteur suffisent à recommander cette publication aux géomètres et aux ingénieurs; les uns et les autres sauront gré au traducteur et à l'éditeur du soin qu'ils y ont apporté.

Dans une Introduction d'une vingtaine de pages, M. Jung a résumé les propriétés de la correspondance entre un point et un plan de l'espace passant par ce point, qui résulte de la considération soit d'un complexe de droites du premier ordre, soit d'un système de forces appliqué à un corps solide, soit d'un déplacement infiniment petit d'un corps solide : c'est au second point de vue que s'est placé M. Jung, comme il était naturel, étant donnée la nature de l'Ouvrage où il voulait introduire le lecteur.

Le Mémoire de M. Cremona contient trente-cinq pages.

Il a pour point de départ la considération de deux *polyèdres réciproques,* c'est-à-dire de deux polyèdres tels que les sommets de l'un soient les pôles des faces de l'autre, et des diagrammes réciproques, c'est-à-dire des figures planes obtenues en faisant, sur un plan perpendiculaire à l'axe central, la projection orthogonale de deux polyèdres réciproques. A cause d'une propriété bien connue des droites conjuguées, à chaque côté de l'une des figures correspond un côté parallèle de la seconde. A un nœud de l'une des figures, c'est-à-dire à la projection d'un sommet de l'un des polyèdres, correspond dans l'autre un polygone fermé projection de la face du second polyèdre qui a pour pôle le sommet du premier. La propriété fondamentale des diagrammes réciproques est due à M. Maxwell; elle consiste en ce que, si l'on fait agir des forces représentées en grandeur par les lignes d'une figure, entre les extrémités des lignes correspondantes de la figure réciproque, les points de cette dernière figure sont en équilibre sous l'action

de ces forces. Cette notion se relie étroitement à la notion du polygone des forces et du polygone funiculaire de *Culmann*. Rappelons que, si l'on considère dans un plan n forces P_1, P_2, ..., P_n en équilibre, le polygone des forces est un polygone fermé dont les côtés 1, 2, 3, ..., n sont respectivement égaux et parallèles aux forces P_1, P_2, ..., P_n; pour avoir le polygone funiculaire relatif à un point O du plan, on mènera d'abord de ce point des droites dirigées vers les sommets du polygone des forces; soit en général (rs) la droite qui va du point O au point d'intersection des côtés r, s; le polygone funiculaire relatif au point O est un polygone fermé dont les sommets sont situés sur les lignes d'action des forces P_1, P_2, ..., P_n, de sorte que le côté qui joint les sommets respectivement situés sur les côtés P_r, P_s soit parallèle au rayon (rs).

Si les lignes d'action sont concourantes, les deux diagrammes formés d'une part par les rayons (rs) et le polygone des forces, de l'autre par le polygone funiculaire et les lignes d'action sont réciproques.

Si les forces ne sont pas concourantes, on considérera deux polygones funiculaires relatifs aux points O, O'; le diagramme formé par le polygone des forces et les rayons projetants issus des points O et O' d'une part, le diagramme formé par les deux polygones funiculaires et les lignes d'action des forces, d'autre part, sont réciproques. Les côtés correspondants des deux polygones funiculaires se coupent sur une droite parallèle à OO'; toutes ces propriétés et diverses autres, auxquelles on est conduit en déplaçant les points O, O' ou en considérant les polyèdres réciproques dont les diagrammes sont les projections, sont établies par l'auteur d'une façon intuitive.

M. Cremona montre ensuite comment la considération des diagrammes réciproques permet de faire la théorie de l'équilibre des *travures réticulaires*, c'est-à-dire des systèmes plans de barres rectilignes réunies à leurs extrémités par articulations. Ces systèmes sont supposés soumis à des forces extérieures appliquées aux articulations ou nœuds, en sorte que chaque barre est soumise à une force intérieure longitudinale. On est amené, dans cette théorie, à considérer des diagrammes compliqués dont la description sans figure serait difficilement intelligible; d'intéres-

sants exemples, discutés avec détail, terminent le Mémoire de M. Cremona.

L'Appendice dû à M. Ch. Saviotti est intitulé : *Nouvelles méthodes pour le calcul des travures réticulaires*. Il comprend une soixantaine de pages et est divisé en cinq Chapitres.

Le Chapitre I est consacré à l'étude du cas limite où le polygone des forces, ayant un nombre infini de côtés infiniment petits, deviendrait une courbe. Le polygone funiculaire correspondant serait alors remplacé par une courbe funiculaire. Si cette dernière courbe est une conique, il en est de même de la courbe des forces. L'étude de la correspondance entre ces deux courbes conduit à divers théorèmes intéressants.

L'objet du Chapitre II est la solution des deux problèmes que voici :

Étant donné un ensemble de points, comment opérera-t-on pour les relier ensemble par une travure réticulaire indéformable?

Étant donné un ensemble de barres ou plusieurs groupes de barres, comment procédera-t-on pour les relier d'une façon invariable?

Dans le Chapitre III, l'Auteur traite ces deux questions :

Étant données les pressions et les tensions que peuvent et doivent supporter les barres d'une travure ou, ce qui revient au même, étant donnés les dimensions des différentes pièces et le taux auquel on fait travailler la matière qui les compose, trouver les forces externes que l'on doit appliquer à chacun des nœuds de la travure pour la maintenir en équilibre.

Étant donné un système de forces en équilibre appliquées aux nœuds d'une travure réticulaire donnée, trouver les pressions et les tensions auxquelles sont soumises les barres qui composent cette dernière.

Dans le Chapitre IV, M. Saviotti considère des travures réticulaires strictement indéformables, dans lesquelles les barres sont soumises, en des points quelconques de leur longueur, à des charges concentrées ou à des forces continues ; dans les Chapitres

précédents, les forces avaient toujours été supposées appliquées aux nœuds.

Enfin le dernier Chapitre se rapporte à l'étude de travures réticulaires strictement indéformables, pour lesquelles on ne suppose plus, comme précédemment, que toutes les barres composantes n'aient que deux nœuds d'appui. Les travures considérées dans ce Chapitre comportent des barres de liaison qui viennent s'attacher en des points quelconques des barres du système primitif. J. T.

VILLIÉ (E.). — Compositions d'Analyse et de Mécanique données depuis 1869 a la Sorbonne pour la licence ès sciences mathématiques, suivies d'Exercices sur les variables imaginaires. 347 p. in-8°. Paris, Gauthier-Villars; 1885.

Le *Bulletin* a publié le Recueil des sujets de compositions pour la licence ès sciences mathématiques donnés depuis 1869 à la Faculté des Sciences de Paris et depuis 1880 dans les Facultés des départements; M. Villié a jugé utile de publier la solution d'un certain nombre de ces problèmes et de quelques autres. Son Livre rendra des services immédiats aux candidats à la licence, en leur montrant des exemples des solutions qu'on attend d'eux.

J. T.

MÜLLER (F.). — Kalender-Tabellen. In-8°. Berlin, G. Reimer, 1885.

Trois Tableaux, dont chacun remplit une double page in-8°, permettent d'obtenir immédiatement le jour de la semaine qui correspond à une date donnée, les dates des fêtes mobiles, l'âge de la Lune à une date donnée; le premier Tableau va de l'an 1 à l'an 2000, les deux autres de l'an 600 à l'an 2000. Il est inutile de dire que, pour faire tenir tous ces résultats dans une aussi petite surface, l'auteur a dû adopter une disposition très ingénieuse. Son travail rendra service à nombre de gens. J. T.

DETLEFSEN. — Die Maase der Erdtheile nach Plinius. Gluckstadt, 1883.

Dans ce travail : *Les dimensions des parties du monde d'après Pline*, M. Detlefsen corrige quelques fautes qui lui ont échappé dans son édition de Pline. Il ignorait que des fragments importants d'Artémidore d'Éphèse et d'Isidore de Charax, écrivains grecs qui avaient servi à Pline de source dans ses données géographiques, existaient dans l'original, non pas immédiatement, il est vrai, mais dans des extraits de géographes postérieurs, Agathemère et Marcian, publiés par Müller (*Geogr. gr. min.*) et appliqués par lui à la correction des passages corrompus de Pline.

M. Detlefsen accepte la plupart des corrections de ce savant. Il croit que Pline, à l'endroit où il détermine les rapports de grandeur entre l'Europe, l'Asie et l'Afrique, n'a pas voulu parler de leur étendue entière; il aurait voulu dire seulement jusqu'où la domination romaine avait pénétré. Pline applique à l'estimation des étendues cette fausse idée que M. Cantor a essayé de poursuivre historiquement dans ses *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik* (I, 146-147); il suppose que les aires sont proportionnelles aux périmètres. Il est bien possible que Quintilien, contemporain de Pline, ait eu dans l'esprit ce passage, en croyant utile de démontrer la fausseté de ce procédé. Détail qui n'est pas sans importance pour l'histoire des Mathématiques, M. Detlefsen tire des manuscrits cette donnée que, chez Pline, une multiplication par 100 000 (supposant que l'autre facteur soit plus grand que 10) est exprimée en enfermant le nombre entre deux traits verticaux et un trait horizontal; ainsi $|\overline{\text{LII}}|\,\overline{\text{XV}}\,\text{D} = 5\,215\,500$.

H.

GRUBE. — Zur Geschichte des Problems der Anziehung der Ellipsoide. Sleswig, 1883.

Le problème de l'attraction des ellipsoïdes, dont l'histoire nous est esquissée par M. Grube, a été posé lors des recherches de Newton sur l'attraction universelle et sur la forme des corps célestes. C'est aussi Newton qui a fait les premiers pas vers la solu-

tion de ce problème. Après avoir cherché l'attraction d'une sphère sur un point intérieur ou extérieur, le grand mathématicien s'est occupé de l'ellipsoïde de révolution. Il a trouvé : 1° que le rapport entre l'attraction exercée par un ellipsoïde de révolution sur un point situé sur son axe allongé et celle d'une sphère concentrique dont le diamètre est égal à l'axe peut s'exprimer par une aire, déterminée par l'arc d'une conique et sa corde ; 2° qu'un corps engendré par la rotation de l'anneau formé par deux ellipses semblables et ayant une situation semblable autour d'un de ses axes n'exerce aucune attraction sur un point situé dans l'espace intérieur. En partant de là il a trouvé ce théorème que l'attraction exercée par un ellipsoïde de révolution sur des points intérieurs situés sur le même diamètre est proportionnelle à la distance de ces points du centre. Enfin, en supposant que la Terre soit un ellipsoïde de révolution homogène et aplati dont l'axe ait au diamètre le rapport de 100 : 101, Newton a déterminé que l'attraction au pôle de la Terre serait à celle de l'équateur comme 501 : 500. Tous ces résultats ont été trouvés d'une manière purement synthétique, nous dit M. Grube. Pour les raisonnements, Bernoulli, dans son Traité *Sur le flux et le reflux de la mer,* remarque « qu'il n'y avait peut-être que Newton qui pût y voir clair ».

Les travaux de Cotes constituent un progrès important. Cotes détermine la valeur de l'aire donnée par Newton, comme expression du rapport entre l'attraction de l'ellipsoïde et de la sphère.

Dans les *Philosophical Transactions* pour 1735, Stirling détermine l'attraction d'un ellipsoïde de révolution sur un point quelconque de sa surface, pour le cas où l'ellipsoïde s'approche d'une sphère. Presque en même temps que Stirling, Clairaut arrivait à des résultats analogues. Il déterminait en outre l'attraction exercée sur un point extérieur quelconque par un ellipsoïde de révolution qui s'approche d'une sphère.

En 1740, l'Académie des Sciences de Paris mit au concours la théorie des marées. Le prix fut partagé entre Cavallieri, D. Bernoulli, Euler et Maclaurin. Euler et Bernoulli reprennent les recherches de Newton sur l'attraction de la sphère. Ils arrivent à déterminer analytiquement la grandeur absolue de l'attraction qui est égale à celle qui serait exercée si toute la masse était condensée au centre. Euler en reste là ; mais Bernoulli détermine encore

l'attraction d'un ellipsoïde de révolution dont les axes diffèrent peu l'un de l'autre. Il ne paraît pas avoir connu les travaux de Stirling et de Clairaut : ses méthodes en font foi. Une remarque de Bernoulli semble prouver qu'il avait essayé une méthode générale purement analytique, analogue à celle de Lagrange, mais qu'il échoua.

Les résultats de Maclaurin, quant à notre problème, l'emportent de beaucoup sur ceux des autres lauréats. Tandis qu'on s'était contenté jusqu'alors de valeurs approchées pour le cas où l'ellipsoïde de révolution diffère peu d'une sphère, Maclaurin donne une solution exacte pour l'attraction exercée par tout ellipsoïde de révolution sur un point situé à sa surface ou dans son intérieur. La méthode est réputée un chef-d'œuvre de synthèse. Deux ans plus tard, il reprend ce sujet dans son *Treatise of fluxions,* en recherchant l'attraction des ellipsoïdes sur des points extérieurs. C'est là que nous trouvons la première mention de ce célèbre théorème appelé depuis le *théorème de Maclaurin,* « que des ellipsoïdes quelconques, s'ils sont confocaux, attirent un point extérieur quelconque avec une force proportionnelle à leur masse ». Maclaurin lui-même n'a énoncé cette proposition que pour des points situés sur les axes : la forme plus générale de l'énoncé appartient à Legendre et à Laplace. Une partie des résultats obtenus par Maclaurin au moyen de la synthèse fut développée analytiquement par Simpson, en 1750.

D'Alembert s'occupa à deux reprises du problème en question : en 1773 il considère dans son *Traité sur la figure de la Terre* l'attraction d'un ellipsoïde à trois axes sur des points intérieurs. En procédant d'une manière analogue à celle qu'a employée Maclaurin pour l'ellipsoïde de révolution, il trouve un résultat analogue. Mais celui-ci ne lui donne qu'un rapport entre l'attraction exercée sur un point intérieur et sur l'extrémité de l'axe. C'est là que d'Alembert échoua, malgré trois tentatives différentes. En dernier lieu, il se contenta de formules approchées, en supposant que deux des axes ne diffèrent que très peu l'un de l'autre. Quant aux points extérieurs, il prouve analytiquement le théorème de Maclaurin, mais uniquement pour le cas de l'ellipsoïde de révolution. Il se permet même quelques doutes quant à l'exactitude de ce théorème pour l'ellipsoïde à trois axes.

Les travaux de Lagrange (1773 et 1775) ne contiennent pas de résultats nouveaux, mais ils montrent que tous les résultats, obtenus jusqu'alors par des méthodes différentes, peuvent être atteints par une seule et même méthode analytique.

En 1780, d'Alembert reprend la question dans le Traité *Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques*. Il donne quatre preuves analytiques du théorème de Maclaurin pour un ellipsoïde à trois axes, mais sans le généraliser à la manière de Legendre ou de Laplace. Chose remarquable, d'Alembert, comme Lagrange et Legendre, a cru que Maclaurin n'avait prouvé son théorème que pour l'ellipsoïde de révolution. C'est à M. Chasles que revient l'honneur d'avoir démontré le contraire. En effet, la démonstration pour l'ellipsoïde à trois axes étant exactement la même que pour l'ellipsoïde de révolution, Maclaurin a bien pu se contenter de dire : « et l'on prouve de même, etc. »

L'insuccès de ses tentatives précédentes pour évaluer l'attraction exercée par un ellipsoïde sur un point situé à l'extrémité de son axe n'avait pas découragé d'Alembert. Dans le traité *Sur l'attraction,* nous le voyons poursuivre ce but avec une persévérance vraiment extraordinaire. « Une formule simple pour la grandeur en question le hantait. » Malheureusement, là encore, après avoir essayé trois méthodes nouvelles et s'être heurté à des obstacles insurmontables, le grand mathématicien, qui venait de trouver enfin dans sa septième méthode le bon chemin qui devait le conduire directement à la solution, commet une erreur en oubliant une parenthèse. Il obtient donc un résultat qu'il reconnaît faux, mais sans pouvoir parvenir à le corriger. M. Grube explique cette défaillance par l'affaiblissement que les facultés du grand homme avaient déjà éprouvé à cette époque. H.

SCHEMMEL (Victor). — Zum Problem der drei Körper. Programm der Königlichen Realschule. Berlin, 1884. In-4°, 20 pages.

La recherche s'attache à la solution connue du problème des deux corps. L'auteur cherche à en généraliser les propriétés connues et à les appliquer au problème des trois corps. La forme des

équations différentielles, la signification géométrique ou cinématique des intégrales connues et de leurs parties servent à développer plusieurs résultats sur la position caractéristique et le mouvement de certains points, plans et droites du problème des trois corps.

§ 1. Les équations différentielles du mouvement. — § 2. Les dix intégrales connues du problème. — § 3. Les intégrales composées pour les équations différentielles de Hesse. — § 4. Les droites suivant lesquelles le plan des trois corps est coupé par les plans osculateurs. (La droite suivant laquelle le plan osculateur d'un corps coupe le plan commun révèle la direction de l'accélération du même corps à l'époque t.) — § 5. Le point d'intersection des trois plans osculateurs (Les trois droites du § 4 se rencontrent dans un seul point). — § 6. La droite qui joint le centre de gravité R des trois corps P_1, P_2, P_3 au point d'intersection des trois plans de direction E_1, E_2, E_3. (Le plan parallèle à deux positions ou directions consécutives d'une droite mobile est nommé *plan de direction* de la droite, E_1 est le plan de direction de P_2P_3 et passe par ce côté du triangle $P_1P_2P_3$. La droite dont il s'agit est parallèle au plan invariable). — § 7. D'autres droites parallèles au plan invariable. — § 8. Formules relatives au tétraèdre $RP_1P_2P_3$. E. L.

MÉLANGES.

DISCOURS PRONONCÉS AUX ORSÈQUES DE M. BOUQUET,

LE 11 SEPTEMBRE 1885.

DISCOURS DE M. J. BERTRAND,

AU NOM DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

MESSIEURS,

Tous les géomètres de l'Europe étaient conviés, il y a huit jours à peine, à un concours qui sera mémorable. Le roi de Suède, admirateur éclairé des Sciences mathématiques, rappelait leurs progrès

depuis un demi-siècle et les espérances qui grandissent chaque jour. Dans un tableau, tracé de main de maître, quelques noms brillent en tête des voies les plus nouvelles et déjà les plus suivies. Ceux de Briot et Bouquet occupent la place d'honneur, et cette consécration d'une gloire que le temps doit accroître a été, pour notre Confrère mourant, une suprême récompense et une dernière joie.

Briot et Bouquet! L'histoire de la Science retiendra ces deux noms sans les séparer jamais, et l'Académie des Sciences, dont les listes n'en ont inscrit qu'un seul, doit à leur mémoire les mêmes hommages et les mêmes regrets.

Jamais union scientifique ne fut plus complète et plus fructueuse. Liés d'une étroite amitié sur les bancs de l'École Normale, ils se retrouvaient, presque à leur début, professeurs tous deux à la Faculté des Sciences de Lyon. L'habitude d'étudier ensemble fut bien vite reprise. Les plus difficiles problèmes furent abordés. Dans ces conférences de chaque jour, presque de chaque heure, leur but était de s'instruire; plus d'une découverte semblait naître comme d'elle-même; sur qui tomba d'abord l'inspiration? S'ils ne l'ont jamais dit, c'est qu'en vérité ils ne le savaient pas. Ils arrivaient au but, et, pendant la route, souvent longue et pénible, leurs esprits ne s'étaient pas quittés.

Tous deux ont glorieusement rempli leur tâche. L'un, plus curieux de toutes choses, avait abordé toutes les études et laissera, sur les voies les plus diverses, les marques durables d'un esprit supérieur; l'autre est resté le type le plus aimable du pur géomètre. La Géométrie le délassait de l'Algèbre, le Calcul intégral de la Théorie des nombres. Il travaillait sans cesse, publiait peu, mais inventait souvent; ses élèves sont nombreux, ils peuvent en rendre témoignage.

Il a été dit : « Bienheureux ceux qui sont doux et ceux qui sont simples! » Bouquet a possédé ces deux béatitudes. Jamais les petits ennuis, les petites déceptions, les injustices même, que la carrière des Sciences n'épargne pas plus qu'aucune autre à ceux qui s'y distinguent, n'ont fait naître chez lui la plus légère aigreur. Trop modeste pour mettre son amour-propre de la partie, la résignation lui était facile. Lorsque, trop tardivement au jugement de ses amis, non au sien, une justice plus complète lui était rendue, sa joie

aurait été sans arrière-pensée s'il n'avait regretté, et d'un cœur bien sincère, que, pour penser à lui, on en eût oublié d'autres.

Adieu, Bouquet, excellent Confrère, ami toujours dévoué, maître incomparable, ta perte laissera parmi nous de longs regrets. Tes élèves conserveront de toi un pieux et reconnaissant souvenir. Je n'essayerai pas de dire l'inconsolable douleur de ta famille.

DISCOURS DE M. HERMITE,

AU NOM DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

Messieurs,

Je viens adresser, au nom de la Faculté des Sciences, un dernier adieu à l'un de nos collègues les plus respectés et les plus aimés, dont les travaux mathématiques ont honoré la Science française, et qui s'est consacré avec dévouement jusque dans ces derniers mois, jusqu'à ce que la maladie eût triomphé de son zèle, à ses devoirs d'enseignement.

En sortant de l'École Normale, M. Bouquet a été d'abord professeur au lycée de Marseille, puis à la Faculté des Sciences de Lyon, pour occuper ensuite, pendant près de vingt ans, la chaire de Mathématiques spéciales du lycée Condorcet et du lycée Louis-le-Grand. Ces deux établissements garderont toujours le souvenir des brillants succès dans les examens d'admission à l'École Polytechnique, dus autant à l'homme de cœur qui portait à tous ses élèves intérêt et affection, qu'à l'éminent géomètre qui mettait un talent supérieur à enseigner les éléments de la Science dont ses travaux reculaient les bornes. C'est en collaboration avec Briot que M. Bouquet a donné de beaux et importants Mémoires, parmi lesquels je dois surtout mentionner celui qui concerne les équations différentielles du premier ordre, puis sur la théorie des fonctions elliptiques un ouvrage qui compte parmi les plus importantes publications analytiques de notre époque. D'autres recherches de notre savant collègue ont pour objet la variation des intégrales doubles, les tangentes aux courbes gauches, les surfaces orthogonales, les équations aux différentielles totales, des questions

difficiles et d'un haut intérêt dans la théorie des intégrales hyperelliptiques et leurs fonctions inverses. Le mérite de ces travaux, universellement reconnu, a reçu la plus haute des consécrations : l'Académie des Sciences, en 1875, a appelé M. Bouquet à occuper, dans la Section de Géométrie, la place de M. Bertrand devenu Secrétaire perpétuel.

En ce moment, je ne dois pas entreprendre d'apprécier les recherches d'Analyse qui ont été l'œuvre principale de notre collègue, mais je ne puis omettre de rappeler qu'elles ont été inspirées par les découvertes de Cauchy. Au terme de sa glorieuse carrière, Cauchy a eu le bonheur d'avoir dans nos collègues Puiseux, Briot et Bouquet, des disciples dignes de lui, qui ont, en des points essentiels, complété ses travaux et mis dans une plus vive lumière la puissance et la fécondité de ses principes. Ces disciples ont été des amis dévoués à sa mémoire, au culte de son génie ; M. Bouquet, pendant les treize années qu'il a occupé la chaire d'Analyse de la Faculté, s'est fait l'instituteur des doctrines du maître immortel, et ce n'est pas le moindre honneur de sa carrière, d'avoir élevé ses leçons au niveau de la Science de notre temps, et aplani pour les élèves le chemin qui mène à ses plus hautes régions.

Au nom de la Faculté des Sciences, au nom de l'amitié qui nous unissait, j'adresse un suprême adieu à l'homme excellent, au collègue regretté de tous, au géomètre éminent que nous avons perdu.

DISCOURS DE M. J. TANNERY,

AU NOM DE L'ÉCOLE NORMALE.

Messieurs,

D'autres vous ont dit les mérites du savant que nous venons de perdre, les travaux glorieux qui défendront son nom contre l'oubli : je veux seulement lui dire un court adieu, au nom de l'École d'où il est sorti, où il est rentré comme maître il y a dix-sept ans, et qu'il vient de quitter.

Certes, il ne l'a pas quittée tout entier : ceux qui, dans ces der-

nières années, ont collaboré avec lui, ceux qui auront le grand honneur de lui succéder sont ses élèves ; ils sont pénétrés de son esprit, ils répandront les vivants trésors qu'ils lui doivent dans l'âme de leurs auditeurs, qui, comme leurs devanciers, iront les disséminer dans toutes les écoles de la Patrie, ou sauront les faire fructifier en eux-mêmes et continuer, dans la mesure de leurs forces, l'œuvre scientifique du maître que nous pleurons.

Ce qui nous manquera, c'est l'homme lui-même, la grande autorité qui s'attachait à ses travaux et à son expérience, la clarté merveilleuse qu'il savait donner à son enseignement, sa bonté pénétrante, cette affection qu'il avait pour ses élèves, que sa timidité voilait d'habitude, mais dont ceux qui l'approchaient ont connu la vivacité, cette gaîté charmante et rare qui sortait d'une âme où aucun remords, aucun regret n'avait laissé de tristesse.

Nous voyons tous encore la joie et le bonheur qui naguère éclairaient le visage de M. Bouquet ; ceux qui l'entouraient et qui ont le plus contribué à ce bonheur savent quelle en était la source : une bonté que rien ne pouvait altérer ; il n'avait rien à se reprocher, il ne savait rien reprocher aux autres ; un conseil même, lorsqu'il ne s'agissait pas de Mathématiques, lui coûtait ; il y mettait une délicatesse infinie ; c'est qu'un conseil ressemble souvent à un reproche.

Cher et excellent maître, après une vie glorieuse et consacrée au bien, vous êtes entré avec calme dans le mystère de la mort : au nom de vos élèves, de vos collègues de l'École Normale, je vous dis le dernier adieu ! Sur votre tombe encore ouverte, qu'il me soit permis de rappeler les noms de deux hommes qui étaient vos compatriotes, vos camarades, vos collègues, vos amis : comme vous, Briot et Bertin sont restés à leur poste jusqu'au dernier moment ; ils ont voulu, par une sorte d'ironie, attendre les vacances pour goûter le repos définitif. Adieu, maître ! que votre souvenir et votre exemple nous donnent la force, car le fardeau que vous avez rejeté sur nos épaules est pesant et précieux.

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}}$;

PAR M. STIELTJES.

1. Nous nous proposons d'obtenir le développement de cette intégrale suivant les puissances descendantes de a, développement qui peut servir utilement pour le calcul numérique dans le cas où le nombre positif a est très grand et que b ne l'est pas.

La méthode qui se présente d'abord pour cet objet est la suivante. Soit

$$P = 1 : \left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b},$$

alors

$$\log P = -(a+b)\left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \ldots\right)$$

ou bien

$$\log P = -x + \frac{A_1}{a} + \frac{A_2}{a^2} + \frac{A_3}{a^3} + \ldots,$$

$$A_1 = \tfrac{1}{2}x^2 - bx,$$

$$A_2 = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}bx^2,$$

$$A_3 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}bx^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il s'ensuit

$$P = e^{-x} \times e^{\frac{A_1}{a} + \frac{A_2}{a^2} + \frac{A_3}{a^3} + \ldots},$$

$$P = e^{-x}\left(1 + \frac{B_1}{a} + \frac{B_2}{a^2} + \frac{B_3}{a^3} + \ldots\right),$$

en posant

$$B_1 = A_1,$$

$$B_2 = A_2 + \tfrac{1}{2}A_1^2,$$

$$B_3 = A_3 + A_1A_2 + \tfrac{1}{6}A_1^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'intégrale proposée se met maintenant sous la forme

$$\int_0^\infty \left(1 + \frac{B_1}{a} + \frac{B_2}{a^2} + \frac{B_3}{a^3} + \ldots\right) e^{-2x}dx,$$

et il ne reste plus qu'à effectuer les intégrations à l'aide de la formule $\int_0^\infty x^k e^{-2x}dx = \frac{\Pi(k)}{2^{k+1}}$.

On obtient ainsi, pour les premiers termes,

$$\frac{1}{2} + \frac{-2b+1}{8a} + \frac{4b^2-2b-1}{32a^2} + \frac{-8b^3+10b-1}{128a^3} + \ldots.$$

Mais, comme on le voit, cette méthode ne donne aucune lumière sur le reste qu'il faut ajouter à un nombre fini de termes du développement pour obtenir la valeur exacte de l'intégrale et, de plus, elle deviendrait très pénible si l'on voulait pousser plus loin les calculs.

2. Nous allons développer maintenant une autre méthode qui ne présente pas ces défauts.

On trouve, par la différentiation,

$$D_x \frac{x^k e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = -\frac{x^k e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} + \frac{k x^{k-1} e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} - \frac{a+b}{a} \frac{x^k e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}},$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$D_x \frac{x^k e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = -\frac{2x^k e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} + \frac{k x^{k-1} e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} + \frac{x^k (x-b) e^{-x}}{a\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}}.$$

On en conclut, lorsque $k > 0$,

$$(1) \quad \int_0^\infty \frac{x^k e^{-x} dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = \frac{k}{2} \int_0^\infty \frac{x^{k-1} e^{-x} dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} + \frac{1}{2a} \int_0^\infty \frac{x^k (x-b) e^{-x} dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}},$$

et pour $k = 0$

$$(2) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^\infty \frac{(x-b) e^{-x} dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}}.$$

En écrivant dans la formule (1) successivement $k-1$, $k-2$, ... au lieu de k, on trouvera par une combinaison bien facile de ces équations avec la formule (2)

$$\int_0^\infty \frac{x^k e^{-x} dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = \frac{\Pi(k)}{2^{k+1}} + \frac{1}{2a} \int_0^\infty \frac{(x-b) T_k(x) e^{-x} dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}},$$

où

$$T_k(x) = x^k + \frac{k}{2}x^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2.2}x^{k-2} + \frac{k(k-1)(k-2)}{2.2.2}x^{k-3} + \ldots.$$

Il importe de remarquer que la valeur de $T_k(x)$ pour $x = 0$ est $\Pi(k) : 2^k$, en sorte qu'on peut écrire

$$\int_0^\infty \frac{x^k e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = \tfrac{1}{2}T_k(0) + \frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{(x-b)T_k(x)e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}}.$$

Soit maintenant $f(x)$ un polynôme quelconque de x, on aura évidemment

$$\int_0^\infty \frac{f(x)e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = \tfrac{1}{2}\overline{f(0)} + \frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{(x-b)\overline{f(x)}e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}},$$

en désignant symboliquement par $\overline{f(x)}$ le polynôme obtenu en remplaçant les diverses puissances de x ; x, x^2, x^3, ... dans $f(x)$ par $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, ...

En écrivant $b+n$ au lieu de b, nous avons

$$(3)\quad \int_0^\infty \frac{f(x)e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n}} = \tfrac{1}{2}\overline{f(0)} + \frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{(x-b-n)\overline{f(x)}e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n+1}}.$$

3. Nous allons appliquer cette formule dans le cas particulier $f(x) = (b-x)^k$; alors il viendra

$$\overline{f(x)} = b^k - \frac{k}{1}b^{k-1}\left(x+\tfrac{1}{2}\right) + \frac{k(k-1)}{1.2}b^{k-2}\left(x^2+x+\tfrac{1}{2}\right)$$
$$- \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}b^{k-3}\left(x^3+\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{3}{2}x+\tfrac{3}{4}\right) + \ldots,$$

ou bien

$$\overline{f(x)} = (b-x)^k - \frac{k}{2}(b-x)^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2.2}(b-x)^{k-2} - \ldots.$$

En posant donc

$$U_k(b) = b^k - \frac{k}{2}b^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2.2}b^{k-2} - \ldots,$$

il vient

$$\int_0^\infty \frac{(b-x)^k e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n}} = \tfrac{1}{2}U_k(b) + \frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{(x-b-n)U_k(b-x)e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n+1}},$$

De là il suit immédiatement qu'en supposant

$$V(b) = c_0 + c_1 b + c_1 b^2 + \ldots + c_k b^k,$$

on aura

$$(4)\quad \int_0^\infty \frac{V(b-x)e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n}} = \tfrac{1}{2}[V(b)] + \frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{(x-b-n)[V(b-x)]e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n+1}},$$

en désignant par $[V(b)]$ le polynôme obtenu en remplaçant dans $V(b)$, b par $U_1(b)$, b^2 par $U_2(b)$, b^3 par $U_3(b)$, ..., tandis que, naturellement, $[V(b-x)]$ s'obtient en écrivant $b-x$ au lieu de b dans $[V(b)]$.

Ce qui précède suppose, bien entendu, que les coefficients c_0, c_1, c_2, ... ne renferment point b. Si cela avait lieu, il faudrait d'abord écrire B au lieu de b dans ces coefficients, opérer ensuite comme il vient d'être indiqué et rétablir enfin de nouveau b au lieu de B. Ainsi la valeur de $V(b-x)$ dans le premier membre de (4) est égale à

$$c_0 + c_1(b-x) + c_2(b-x)^2 + \ldots + c_k(b-x)^k,$$

et il ne faut pas substituer $b-x$ à la place de b dans les coefficients c_0, c_1, c_2, ..., c_k.

4. Revenons maintenant à la formule (2), que nous écrirons ainsi

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = V_0(b) + \frac{R_1}{a},$$

en posant

$$V_0(b) = \tfrac{1}{2},\quad R_1 = \int_0^\infty \frac{(x-b)V_0(b-x)e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}}.$$

Quant à l'expression R_1, nous pouvons la transformer à l'aide de la formule (4), où il faut prendre $V(b) = -bV_0(b)$, $n=1$. Il vient

$$R_1 = V_1(b) + \frac{R_2}{a},$$

en posant

$$V_1(b) = -\tfrac{1}{2}[bV_0(b)],\quad R_2 = \int_0^\infty \frac{(x-b-1)V_1(b-x)e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+2}}.$$

Cette expression R_2 peut, de nouveau, se transformer à l'aide de (4) en prenant $V(b) = -(b+1)V_1(b)$ et $n = 2$. Il vient

$$R_2 = V_2(b) + \frac{R_3}{a},$$

en posant

$$V_2(b) = -\tfrac{1}{2}[(b+1)V_1(b)], \quad R_3 = \int_0^\infty \frac{(x-b-2)V_2(b-x)e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+3}}.$$

Il est évident qu'on peut continuer ainsi et l'on trouve le résultat suivant :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = V_0(b) + \frac{V_1(b)}{a} + \frac{V_2(b)}{a^2} + \ldots + \frac{V_{n-1}(b)}{a^{n-1}} + \frac{R_n}{a^n}.$$

Ici les polynômes $V_0(b)$, $V_1(b)$, $V_2(b)$, ... se calculent de proche en proche par les relations

$$\begin{aligned}
V_0(b) &= \tfrac{1}{2},\\
V_1(b) &= -\tfrac{1}{2}[bV_0(b)],\\
V_2(b) &= -\tfrac{1}{2}[(b+1)V_1(b)],\\
V_3(b) &= -\tfrac{1}{2}[(b+2)V_2(b)],\\
V_4(b) &= -\tfrac{1}{2}[(b+3)V_3(b)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nous rappelons que $[f(b)]$ s'obtient en ordonnant $f(b)$ suivant les puissances de b et en remplaçant alors b^k par

$$b^k - \frac{k}{2}b^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2.2}b^{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{2.2.2}b^{k-3} + \ldots.$$

Ensuite le reste $R_n : a^n$ s'exprime à l'aide du polynôme $V_{n-1}(b)$ ainsi :

$$R_n : a^n = \int_0^\infty \frac{(x-b-n+1)V_{n-1}(b-x)e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n}} : a^n.$$

On peut remarquer que $V_n(b)$ est la valeur de R_n pour $a = \infty$: donc

$$V_n(b) = \int_0^\infty (x-b-n+1)V_{n-1}(b-x)e^{-2x}\,dx;$$

mais cela revient, comme il est facile de le voir, à l'expression

$$V_n(b) = -\tfrac{1}{2}[(b+n-1)V_{n-1}(b)].$$

On trouve sans difficulté :

$$V_0(b) = +\tfrac{1}{2},$$
$$V_1(b) = -\tfrac{1}{4}b + \tfrac{1}{8},$$
$$V_2(b) = +\tfrac{1}{8}b^2 - \tfrac{1}{16}b - \tfrac{1}{32},$$
$$V_3(b) = -\tfrac{1}{16}b^3 + \tfrac{5}{64}b - \tfrac{1}{128},$$
$$V_4(b) = +\tfrac{1}{32}b^4 - \tfrac{1}{32}b^3 - \tfrac{11}{128}b^2 - \tfrac{7}{256}b + \tfrac{13}{512},$$
$$V_5(b) = -\tfrac{1}{64}b^5 - \tfrac{1}{128}b^4 + \tfrac{31}{256}b^3 + \tfrac{1}{256}b^2 + \tfrac{39}{1024}b - \tfrac{143}{2048},$$
$$V_6(b) = +\tfrac{1}{128}b^6 + \tfrac{31}{1024}b^5 - \tfrac{239}{2048}b^4 - \tfrac{73}{1024}b^3 + \tfrac{5}{64}b^2 - \tfrac{567}{4096}b + \tfrac{1997}{8192}.$$

. . . . . .

Notre premier calcul se trouve vérifié ainsi; nous avons obtenu de plus le reste de la série sous forme finie.

Paris, juin 1885.

LES APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DANS L'ANTIQUITÉ;

PAR M. PAUL TANNERY.

1. Nous avons vu (¹) Anatolius et Proclus énumérer l'un et l'autre, d'après Geminus, quatre sciences empruntant à des degrés différents les théories de la Géométrie, à savoir : la Géodésie, l'Optique, la Mécanique et l'Astrologie.

Le terme de γεωδαισία, proprement *division des terres*, date de l'époque d'Aristote. Lorsque le mot de *géométrie*, appliqué tout d'abord, ainsi que son étymologie l'indique, aux opérations de l'arpentage, fut employé couramment pour désigner la science théorique créée par Pythagore, il fallut bien adopter un autre terme pour le remplacer dans sa première signification. Naturellement aussi, ce nouveau terme ne fut pas borné exclusivement à l'arpentage; on y comprit en général tout ce qui concernait les

(¹) *Voir* l'article *Le classement des Mathématiques dans l'antiquité*, dans le numéro précédent.

mesures pratiques de surfaces et de volumes, comme le témoigne le texte de Geminus.

Il nous reste, pour représenter cette branche de la Géométrie appliquée dans l'antiquité, un ensemble de documents suffisamment complet; c'est celui que forment les six à sept recueils de problèmes métriques qui portent le nom de Héron et dont F. Hultsch a publié le texte grec ([1]). Il est bien constant, d'ailleurs, que leur rédaction date de différentes époques postérieures à l'ère chrétienne, mais que, comme fond, ils sont empruntés à un grand Ouvrage réellement dû à Héron d'Alexandrie, dont les extraits ont été mis au courant des nouveaux besoins et des nouvelles mesures, ce qui est le sort général des Ouvrages destinés aux applications pratiques.

Comme Traité un peu plus relevé, nous avons celui *Sur la dioptre* ([2]) également attribué à Héron et dont l'authenticité ne paraît pas douteuse. A côté de la description d'un appareil très perfectionné, mais beaucoup trop compliqué pour avoir jamais été réellement mis en pratique ([3]), à côté de la solution de la plupart des problèmes qui se présentent sur le terrain, on y trouve la plus ancienne démonstration connue pour la règle qui donne l'aire d'un triangle dont on connaît les trois côtés, suivant notre formule

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

A un niveau inférieur, au contraire, nous avons encore la collection des *Gromatici Veteres* (Berlin, 1848-1852) ou arpenteurs romains, qui, en dehors de leurs procédés traditionnels, ont fait de nombreux emprunts à des sources grecques dont quelques-unes sont perdues pour nous.

Je ne m'arrête pas à ces divers écrits, qui ont été l'objet d'analyses et de discussions approfondies, notamment de la part de M. Cantor, et auxquels j'ai d'ailleurs déjà consacré des études spéciales. Je remarque seulement que Héron n'avait pas adopté le

---

([1]) En y joignant les *Mesures des marbres et des divers bois* de Didyme d'Alexandrie.

([2]) Publié par Vincent dans les *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque nationale*, XIX, 2, 1858.

([3]) Il comporte à la fois, de fait, un théodolite et un niveau d'eau.

terme technique de Géodésie. Son Ouvrage semble avoir été intitulé Μετρικά (c'est le titre, du moins, que lui donna Eutocius, et il est, certainement, très bien choisi), et ses deux parties principales paraissent avoir été désignées comme Γεωμετρούμενα et Στερεομετρούμενα (Géométrie et Stéréométrie).

Héron aurait donc au moins tenté de relever sa matière au rang de la Science théorique. Mais l'usage du mot de Géodésie était déjà trop consacré, par suite sans doute de l'existence d'Ouvrages antérieurs assez nombreux, pour que Héron réussît à cet égard ailleurs que chez les Romains. A vrai dire, ceux-ci, sous le nom de géométrie, n'ont jamais fait que de l'arpentage; le terme de *Géodésie* resta, au contraire, classique chez les Grecs, pour reparaître dans les temps modernes, à son tour élevé en dignité, et désignant désormais des opérations dont les anciens n'ont jamais eu la moindre idée ([1]).

2. Le Traité *De la Dioptre* donne lieu à une observation spéciale au point de vue de la classification des sciences. D'après un abrégé latin des *Catoptriques* de Héron, opuscule dont l'original grec est perdu et qui a été faussement attribué à Ptolémée ([2]), l'ingénieur alexandrin divisait l'Optique en Optique proprement dite, en Catoptrique et en Dioptrique. Ce dernier mot n'a, au reste, jamais eu dans l'antiquité le sens qu'il a chez les modernes; il désignait ce qui concerne la visée des objets, et cela particulièrement au moyen de la *dioptre* qui consistait, à proprement parler, en une règle munie de deux pinnules percées de trous ou de fentes. Il est donc clair que Héron devait considérer comme faisant partie de l'Optique, sinon tout son Traité *De la Dioptre,* au moins la description de son instrument.

Nous voyons, au contraire, Geminus classer la Dioptrique comme subdivision de l'Astrologie; il est clair que l'instrument de Héron pouvait servir pour observer les astres; non seulement

---

([1]) Je remarque que, d'après l'usage de la langue grecque, on doit dire *géodète* et non *géodésien* pour désigner l'ingénieur qui effectue ces opérations.

([2]) *Voir* à ce sujet Th.-H. Martin, *Recherches sur la vie et les Ouvrages de Héron d'Alexandrie*, Mémoire présenté à l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, IV, 1854.

il en indique l'emploi dans ce but, mais encore c'est seulement alors que lui servent les graduations de ses cercles, puisque les anciens ne faisaient pas de Trigonométrie rectiligne. D'autre part, Geminus, dans son *Introduction aux phénomènes* (éd. Petau, 42 B), nous parle, pour vérifier le mouvement circulaire des étoiles, de dioptres qui doivent avoir été semblables à celle de Héron, c'est-à-dire avoir consisté en un théodolite dont l'axe fût susceptible de prendre une inclinaison.

Il n'en est pas moins vrai que le classement empirique de Geminus suppose, pour son temps, l'existence de Traités qualifiés de *dioptriques,* et spécialement consacrés à l'Astronomie. Plutarque ([1]) attribue de fait à Euclide un tel Ouvrage; mais, même si l'on regarde comme valable ce témoignage unique, ou si seulement on admet l'existence de traités de *Dioptrique* correspondant dans une certaine mesure à des éléments d'Astronomie pratique, une grave question s'élève.

Il est clair que l'instrument très compliqué de Héron a dû être précédé d'essais plus simples; en supposant une *dioptre* réduite seulement à la règle de visée montée sur un cercle divisé, à quelle époque cet instrument élémentaire a-t-il été connu des Grecs?

On ne fait souvent aucune difficulté pour le regarder comme connu d'Hipparque et même comme lui étant bien antérieur. Il convient d'opposer à ce préjugé les considérations suivantes :

Toutes les positions d'étoiles antérieures à Euclide (comme celles d'Eudoxe) sont tellement erronées que l'on ne peut supposer qu'elles aient été observées directement.

Ptolémée attribue à Hipparque une *dioptre* toute spéciale; c'est une règle graduée avec une pinnule fixe et une pinnule mobile, les fentes des pinnules étant à différentes hauteurs. C'est le principe du *bâton de Jacob,* où l'angle est connu par sa tangente, ou estimé d'après des triangles semblables.

Si Ptolémée ne témoigne pas qu'Hipparque se soit servi de cet instrument pour des mesures effectives, mais seulement pour la comparaison des diamètres du Soleil et de la Lune à l'apogée et au périgée, l'emploi de cette *dioptre* semble lié à celui des mesures

---

([1]) *Non posse suaviter vivi secundum Epicurum,* ed. Didot, M, 1338,3.

chaldéennes de *coudée* et de *doigt* pour les petites distances angulaires des étoiles, mesures dont Hipparque se servait et qui ont passé des Grecs aux Arabes. D'autre part, on peut bien voir un instrument analogue dans la *dioptre* dont s'est servi un disciple d'Aristote, Dicéarque de Messine ([1]), pour mesurer les hauteurs des montagnes de la Grèce.

L'instrument principal d'observation d'Hipparque et de Ptolémée a été une sphère armillaire, sans ligne de visée; un anneau mobile (le cercle astrolabe) pouvait être placé de façon que son plan passât par l'astre observé; ce cercle, perpendiculaire à celui qui représentait l'écliptique ([2]) et qui était gradué, donnait immédiatement la position en longitude. Or c'est là le problème ([3]) que le texte de Geminus donne comme étant l'objet spécial de la *Dioptrique*, et l'on doit observer que, quoiqu'il n'y eût nullement de *dioptre*, Ptolémée se sert du mot διοπτεύειν pour désigner l'opération qui amène le plan du cercle astrolabe à passer par l'étoile.

On ne peut donc s'empêcher de penser que, pour Geminus, la *Dioptrique* devait être surtout représentée par des écrits sur des instruments autres que celui de Héron, quoiqu'il dût, sans aucun doute, connaître ce dernier.

3. Les remarques que je viens de faire, et celles que je vais ajouter sur les autres branches de l'Astronomie ancienne, n'ont pas pour but de trancher des questions historiques qui demanderaient une discussion proportionnée à leur importance; elles tendent seulement à les préciser et à montrer que l'histoire des observations pratiques est à refaire pour les origines. De quels procédés se servaient Hipparque et ses précurseurs? pourquoi prenaient-ils directement telle mesure plutôt que telle autre? Il y a là une série de nombreuses questions qui attendent une solution raisonnée; malheureusement, les documents que nous fournissent les ouvrages d'Astronomie ancienne sont totalement insuffisants, et il faudrait essayer de les compléter, soit par l'étude des écrits astrologiques.

([1]) Théon de Smyrne (*Astronomie*, 3).

([2]) Ce dernier cercle, également mobile, a d'abord été amené à coïncider avec l'écliptique par une observation semblable faite sur un astre de longitude connue.

([3]) Il convient de remarquer que la détermination de la longitude des planètes était le point de départ des prédictions astrologiques.

jusqu'à présent trop négligés, soit par les résultats des déchiffrements des écritures cunéiformes qui peuvent nous fournir quelques données sur les procédés d'observation des Chaldéens; car c'est de ces procédés que sont partis les Grecs.

Sous ces réserves, il me semble que la *Météoroscopie* de Geminus concerne spécialement l'observation des hauteurs lors des passages au méridien, observations dont se déduisaient les latitudes. J'observe que l'instrument des hauteurs de Ptolémée, celui qui correspondait à notre mural, s'appelait précisément *météoroscope* (1).

C'était donc principalement à cette partie de l'Astronomie que devait se rattacher l'emploi des tables des cordes de cercle qui remonte à Hipparque. Mais jusqu'à quel point la Trigonométrie sphérique était-elle déjà développée, il est difficile de le savoir, puisque le théorème fondamental qui sert de base à tous les calculs de Ptolémée ne se rencontre pas avant les *Sphériques* de Ménélaos, à la fin du premier siècle de l'ère chrétienne. Quoique je le considère comme étant connu et pratiqué déjà par Hipparque, je dois remarquer que l'on ne possède à cet égard qu'une simple présomption, et que c'est une pure invention de Delambre (2) que son affirmation qu'Hipparque aurait dit avoir déterminé par la Trigonométrie sphérique les levers et couchers vrais des étoiles. Le texte du *Commentaire sur Aratus* ne dit rien de semblable, et quant aux déterminations qu'il donne, elles ne sont pas assez précises pour qu'Hipparque n'ait pu les obtenir par de tout autres procédés.

Au reste, Geminus semble avoir voulu, contrairement à la tradition, faire rentrer la Sphérique dans la Géométrie; il ne parle pas non plus d'une découverte géométrique très importante pour l'Astronomie, celle des projections stéréographiques. On la suppose connue d'Hipparque d'après la lettre de Synésius sur le don

---

(1) Il était formé de deux anneaux concentriques, l'un fixe gradué, l'autre mobile, portant deux pinnules, diamétralement opposées. Là encore, on ne trouve pas la véritable *dioptre*, c'est-à-dire la règle portant les pinnules. Les anciens astronomes ne semblent l'avoir adoptée que pour la face de l'astrolabe planisphère qui leur servait à prendre les hauteurs pour déterminer l'heure.

(2) *Astr. anc.*, I, p. 142-143.

d'un astrolabe ([1]); mais ce témoignage n'est guère suffisant pour trancher cette question, qui se trouve liée à celle de l'invention de l'astrolabe planisphère.

Quant à la troisième branche de l'Astrologie énumérée par Geminus, la *Gnomonique*, nous n'avons absolument aucun Ouvrage grec. Cependant, il y avait déjà, de son temps, une littérature très nombreuse, et toutes les inventions possibles semblent avoir été déjà faites, si l'on en juge par le passage où Vitruve (IX, 9) les énumère sous des noms où, malheureusement, il est bien difficile de les reconnaître. Quelques cadrans solaires anciens, notamment sphériques, coniques et celui en forme de *jambon* ([2]), sont, en revanche, parvenus jusqu'à nous; mais c'est seulement en étudiant la Gnomonique des Arabes que l'on peut arriver à se former une idée précise de celle des Grecs.

4. Je reviens à l'Optique, que Geminus divise en Optique proprement dite, Catoptrique et Scénographique.

Je ne reproduis pas le très long fragment (13, 14) des *Variæ Collectiones* (*Héron*, éd. Hultsch, p. 249-252), que je crois avoir été emprunté à Geminus par l'intermédiaire d'Anatolius ([3]), et qui se retrouve aussi dans l'*Optique* de Damianus; j'y relève seulement que, comme dans l'hypothèse admise par les mathématiciens traitant de l'Optique, les rayons visuels sont supposés partir des yeux pour aller à l'objet vu; il y avait, au reste, en dehors des trois branches énumérées, un ensemble de théories, distinctes au fond de l'Optique proprement dite, c'est-à-dire des lois de la vision, mais y rentrant en raison de la similitude de leur objet et de leurs hypothèses ([4]), et traitant de l'illumination et des ombres,

---

([1]) Cet astrolabe de Synésius n'est appelé ainsi que par un étrange abus de mots; c'est simplement une représentation de la sphère céleste, ou du moins de la partie visible, sur un cône, soit par projection, le sommet du cône étant au pôle boréal, soit par perspective, le sommet du cône et le point de vue étant sur l'axe du monde. La description de Synésius ne permet pas de décider; c'est par une inadvertance singulière que Victor Prou a admis une projection cylindrique.

([2]) Cadran portatif. *Voir* Montucla, 2e édition, t. I, p. 724.

([3]) Il a déjà été traduit par Th.-H. Martin dans les notes de ses *Recherches sur la vie et les écrits de Héron d'Alexandrie*.

([4]) Geminus paraît d'ailleurs les rattacher à la Catoptrique, en tant que la vision est indirecte pour ces phénomènes.

des miroirs ardents et même des lentilles ardentes, très nettement décrites. Les anciens s'occupaient aussi des points brillants (ἀχίλλειος) et de la réfraction. Mais cette dernière théorie était à peine constituée et se bornait à peu près à des discussions physiques; l'explication de l'arc-en-ciel (c'est-à-dire des essais impuissants comme celui des *Météorologiques* d'Aristote) rentrait de même dans la Catoptrique.

Si, de toutes ces théories accessoires, il ne nous reste aucun Traité, pour l'*Optique* proprement dite et pour la *Catoptrique*, nous possédons les Ouvrages attribués à Euclide; le second ne semble pas authentique, mais Geminus connaissait certainement une Catoptrique sous le nom d'Euclide, et ce Traité ne devait guère être supérieur à celui qui nous reste, car les hypothèses des anciens étaient trop insuffisantes pour leur éviter des erreurs même grossières. La Catoptrique de Héron n'en est pas exempte, quoiqu'elle soit, d'ailleurs, bien au-dessus de celle du Pseudo-Euclide. On doit y signaler la proposition géométrique citée par Damianus, que la ligne suivie de l'œil à l'objet par un rayon réfléchi sur un miroir est un minimum ([1]).

En somme pour l'Optique, les anciens n'ont bien connu que les lois de la perspective et la théorie des miroirs plans; à cet égard, aucun progrès n'a été réalisé depuis Héron, par exemple dans les *Optiques* de Ptolémée ([2]) et de Damianus.

La perspective appliquée était appelée *scénographique*. D'après Vitruve (VII), le premier écrit sur la matière aurait été composé par un Agatharque, vivant du temps d'Eschyle, c'est-à-dire dans la première moitié du ve siècle avant J.-C. Anaxagore et Démocrite l'auraient ensuite traitée méthodiquement. Vitruve n'indique pas d'Ouvrages plus récents ([3]); il ne devait cependant pas en manquer; en tout cas, nous n'avons aucun document sur le développement réel de cette application de la Géométrie.

([1]) Le principe de l'égalité des angles pour la réflexion semble n'avoir été connu que peu de temps avant Euclide; Aristote dit que ces questions n'ont été élucidées que récemment, mais lui-même ne paraît guère avoir d'idées nettes, et ne parle nullement du principe d'égalité.

([2]) La reconnaissance de la réfraction atmosphérique, dans les termes où la fait Ptolémée, n'a d'intérêt qu'au point de vue physique.

([3]) Peut-être faut-il conclure de ce qu'il dit que la Perspective était surtout traitée par les architectes, comme elle le fut aussi à la Renaissance.

Des autres parties accessoires de l'Optique, il nous reste encore des fragments d'Ouvrages relatifs aux miroirs ardents, question que la tradition fait remonter à Archimède, et qui a été, chez les anciens, l'objet de sérieux travaux ([1]). Dioclès, antérieur à Geminus, avait écrit un Traité Περὶ πυρείων dont Eutocius a extrait la solution de deux problèmes (duplication du cube; partage d'une sphère en deux segments de rapport donné), dont on ne voit guère la liaison avec le sujet. Au VIe siècle de l'ère chrétienne, Anthémius composa un Ouvrage *Sur des machines étonnantes,* dont il nous reste quelques débris précisément relatifs à cette question des miroirs ardents, et où l'on trouve, pour la première fois, la proposition sur l'égalité des angles de la tangente à la parabole avec le rayon vecteur et la parallèle à l'axe. Il y a donc, pour la date de la découverte de cette proposition, une question intéressante sur laquelle je me propose de revenir.

Pour le moment, je me contente de remarquer que, si la *Catoptrique* du Pseudo-Euclide se termine par un théorème où l'on essaye de prouver que, dans un miroir sphérique convexe exposé au soleil, le foyer sera au centre, une erreur aussi grossière ne peut être attribuée aux géomètres antérieurs à l'ère chrétienne. A la vérité, leur hypothèse sur la marche des rayons visuels était pour eux une cause d'erreur inévitable dans la détermination de l'image sur les miroirs sphériques, mais pour le foyer des miroirs ardents cette cause d'erreur n'existait pas. D'autre part, il y a certainement eu des expériences faites, et la situation du foyer a dû être mieux reconnue.

5. Il ne me reste plus qu'à passer rapidement en revue les branches de la Mécanique, au point de vue des applications de la Géométrie.

En premier lieu, Geminus parle des engins de guerre. Si Archimède n'avait pas décrit ses célèbres inventions, la littérature, sur ce sujet, n'en était pas moins riche; elle remontait même avant lui, puisque Vitruve (X), qui donne d'ailleurs d'assez précieux

---

([1]) Si la légende d'Archimède brûlant la flotte romaine est insoutenable, il est très possible que le Syracusain ait construit des miroirs ardents et même écrit sur ce sujet.

détails, en général, sur la Mécanique grecque, cite deux ingénieurs d'Alexandre le Grand, Diadès et Charias.

Les écrits grecs de cette nature qui nous restent ont été réunis dans les *Mathematici veteres* de Thévenot (Paris, 1693); on pourrait croire qu'une bonne partie est du temps de l'empire romain; mais, si l'on écarte deux compilations sans importance réelle (1), tous les auteurs, sauf un, sont antérieurs à l'ère chrétienne (2).

Nous avons ainsi : d'un Biton, qui avait aussi écrit sur l'Optique, un Traité de la construction des engins de guerre et des catapultes, dédié à un des rois de Pergame (un Attale); de Philon de Byzance, contemporain de Ctésibios, deux Livres analogues, seul reste d'un Ouvrage beaucoup plus étendu; de Héron d'Alexandrie, les Βελοποιικά (*Sur les armes de jet*) et un Traité sur la *Chirobaliste* (3); enfin d'un Athénée, un Livre sur les machines de guerre.

Il est à remarquer que la solution du problème des deux moyennes proportionnelles d'après Philon, qu'Eutocius nous a conservée, figurait dans le premier Livre, aujourd'hui perdu, de son Ouvrage; celle de Héron se retrouve dans les Βελοποιικά que nous avons, mais il devait l'avoir insérée également dans ses *Introductions mécaniques*.

La seconde branche de la Mécanique, indiquée par Geminus, est caractérisée par les noms de Ctésibios et de son disciple Héron, et par son but qui est bien celui de deux des Ouvrages de ce dernier, aussi édités dans les *Mathematici veteres*, à savoir les *Pneumatiques* et les *Automates*. L'ingénieur mécanicien s'y propose bien moins de décrire des applications utiles que des objets d'amusement, de véritables jouets ou encore des artifices propres à entretenir la superstition. Ces deux Livres répondent exactement à deux des subdivisions de la *Thaumatopœïque* de Geminus; la troisième devait être représentée par un Livre de Héron, aujourd'hui perdu, Περὶ ζυγίων.

---

(1) Les fragments des *Cestes* de Julius Africanus, et le Traité anonyme sur la défense des place fortes.

(2) Le seul postérieur est Apollodore, qui vivait au IIe siècle, sous l'empereur Adrien. Il a traité des machines pour l'attaque des places fortes.

(3) Sorte d'arbalète restituée par Victor Prou (*Not. et extr. des Mss. de la Bibl. nat.*).

Geminus fait aussi allusion, d'une part, à la théorie de l'équilibre et des centres de gravité, créée par Archimède dans ses Ouvrages qui nous restent sur l'équilibre des plans et dans son Traité perdu *Sur les balances* (¹); à un autre Traité, également perdu, du grand Syracusain, à sa célèbre *Sphéropée*, qui décrivait un appareil, mû par l'eau, où les mouvements célestes étaient représentés dans une sphère de verre; enfin à divers autres Ouvrages qui traitaient des mouvements.

6. En dehors des Traités que nous avons énumérés, c'est d'après le Livre VIII de la *Collection mathématique* de Pappus qu'on peut se faire l'idée la plus précise de la Mécanique des anciens et se rendre compte du rôle capital qu'y jouaient les recherches purement géométriques.

Pappus reconnaît d'ailleurs pour la Mécanique une division à peu près analogue à celle de Geminus; s'il place en première ligne l'art des *manganariens*, c'est-à-dire des constructeurs de machines servant à l'élévation des fardeaux (des moufles en particulier), il se réfère à cet égard aux anciens, et c'est bien là ce qu'au temps de Geminus, d'après Philon et Héron, on entendait proprement sous le nom de *mécaniques*. Pappus parle ensuite, comme branches suivantes, de la fabrication des engins de guerre et des machines proprement dites (²), de celle des θαύματα, enfin de la sphéropée. C'est bien la même série d'applications que donne Geminus, et pour les θαύματα Pappus fait aussi une subdivision analogue, en indiquant les Ouvrages précités de Héron; seulement, il cite aussi le Traité d'Archimède Περὶ ὀχουμένων (dont le texte grec est perdu) et celui de Héron sur les horloges à eau. Si ce dernier, que nous n'avons plus, pouvait avoir en réalité un but pratique (³), il est bien à remarquer que l'objet des admirables

---

(¹) Περὶ ζυγῶν, Pappus, 1068.

(²) P. 1024, 22. Il faut, je crois, entendre les machines de guerre, d'après l'usage de la langue. La parenthèse qui suit dans le texte, et d'après laquelle il s'agirait de machines pour l'épuisement de l'eau, me semble une interpolation malencontreuse, quoiqu'il y eût certainement des traités sur la matière. Mais Vitruve (X), qui essaye précisément de distinguer les machines et les engins (*organa*), appelle *engins* les machines d'épuisement.

(³) Mais il semble bien qu'au lieu de chercher à assurer une marche bien réglée

recherches d'Archimède sur les centres de gravité et les métacentres des segments de paraboloïdes flottant sur l'eau est de faire la théorie de petits jouets donnant des effets paradoxaux d'équilibre ou d'instabilité; à cet égard, ce Traité peut tout à fait être comparé aux Ζύγια ou aux Ouvrages analogues de Héron.

Le Livre VIII de Pappus, au reste, paraît à peu près en totalité emprunté à des sources antérieures à l'ère chrétienne (1), surtout à Héron d'Alexandrie, et les manuscrits se terminent par des extraits des *Mécaniques* de ce dernier; c'est là que se trouvent décrites les cinq puissances simples des anciens : le treuil, le levier, la moufle, le coin et la vis sans fin (2), tandis que plus haut Pappus avait donné la théorie d'une machine passablement complexe d'après le Βαροῦλκος (3) de Héron. C'est dans ces Ouvrages perdus de l'ingénieur alexandrin comme dans ceux analogues de Philon que se trouvaient réunies les connaissances de mécanique pratique des anciens, et, après eux, ces connaissances ne semblent guère avoir réellement progressé.

7. L'histoire de la Mécanique pratique dans l'antiquité (4) offre au reste une double obscurité. Un premier point ne sera probablement jamais éclairci d'une façon suffisante, car les documents manquent pour déterminer la date réelle des inventions fondamentales; il semble, toutefois, qu'elles doivent, en thèse générale, être regardées comme très antérieures à Archimède, sauf toutefois celle de la vis. Mais une autre question, non moins grave, est susceptible d'être élucidée, au moins dans une très large mesure, par l'étude approfondie des documents qui nous restent. Comment

---

des horloges les anciens se soient surtout préoccupés d'obtenir des effets curieux, comme l'apparition de figures indiquant les heures, etc.

(1) C'est dans son VIIe Livre que Pappus énonce, comme étant de son invention, le théorème ordinairement connu sous le nom de *Guldin*.

(2) Ces extraits ne semblent pas l'œuvre de Pappus.

(3) Tireur de fardeaux. Cette machine se compose d'un treuil, actionné par un équipage de cinq roues dentées, dont la dernière est commandée par une vis sans fin mue par une manivelle. Héron a inséré partie de son Traité sur cette machine dans son Ouvrage *Sur la Dioptre*. Le Βαροῦλκος existe encore en arabe.

(4) Je me borne à signaler sur cette matière les intéressants travaux de M. Rochas d'Aiglun.

les anciens pouvaient-ils suppléer, dans la pratique, à l'insuffisance de leurs connaissances théoriques?

Pour ces dernières, leur histoire est suffisamment claire; les combinaisons de mouvements, au point de vue cinématique, ont été connues de très bonne heure ([1]), et les Grecs y ont déployé une grande ingéniosité; mais ils n'ont jamais précisé le concept de vitesse.

Le génie d'Archimède créa la théorie de la composition des forces parallèles, des centres de gravité et celle de l'équilibre des corps flottants. Mais l'antiquité n'alla pas plus loin; non seulement les premiers principes de la Dynamique ne furent pas soupçonnés, mais la composition statique des forces concourantes fut toujours ignorée, et l'explication des machines se borna à l'extension du principe d'équilibre du levier, qui est le point de départ des travaux d'Archimède, mais peut cependant avoir été reconnu avant lui, au moins empiriquement ([2]).

Il y a donc une singulière exagération à attribuer aux anciens un pressentiment effectif d'un principe comme celui des vitesses virtuelles. Il suffit de remarquer qu'ils étaient incapables de faire la théorie si simple du plan incliné.

Voici comment Pappus (p. 1057) traite cette question. Un corps de poids P est traîné sur un plan horizontal par une force Pf. Pour connaître quelle force sera nécessaire pour lui faire gravir un plan incliné sur l'horizon d'un angle α, il suppose que ce corps est une sphère, et, menant une verticale par le point de contact de cette sphère, et du plan, il détermine, d'après le principe du levier, le poids qui, appliqué à l'extrémité du rayon que rencontre cette verticale, empêcherait la sphère de descendre. Ce poids est $P\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$. La force cherchée serait dès lors, d'après

---

([1]) Le plus ancien exemple est la distinction du mouvement propre des planètes et de leur mouvement diurne par l'école pythagoricienne; le système des sphères concentriques d'Eudoxe, pour représenter les mouvements célestes, offre des combinaisons déjà très savantes, et un passage de Platon (*Lois*, X, 893, *d*) prouve également que, dès son temps, la théorie examinait les cas les plus compliqués.

([2]) Il se trouve énoncé dans les *Mécaniques* d'Aristote, et l'explication du coin s'y trouve ramenée d'une façon d'ailleurs inexacte.

Pappus,

$$\left(P + P\,\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)f = \frac{Pf}{1-\sin\alpha}.$$

Un résultat aussi manifestement erroné, déduit de raisonnements en apparence géométriques, nous montre bien tout ce qui restait à faire avant Stevin et Galilée sur la question la plus capitale de la Statique. Si Archimède avait su ramener à des problèmes géométriques la recherche de l'équilibre dans le cas de forces parallèles, les essais faits après lui dans le même sens ont été des plus malheureux; on n'en doit qu'admirer d'autant plus la puissance de son génie.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME IX.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME IX; 1885. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages.

Aschieri (E.). — Geometria projettiva e descrittiva..... 30-32
Bachmann (Paul). — Ueber die Bewegung eines Punktes..... 253
Bianchi (L.). — Sulle curve a doppia curvatura..... 7-11
Bjerknes. — Niels-Henrik-Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique..... 141-153
Bobek. — Einleitung in die Theorie der elliptischen Funktionen..... 189
Bougaief. — Quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques à la théorie des fonctions discontinues..... 89-103
Boussinesq. — Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques..... 121-123
Cremona (L.). — Les figures réciproques en Statique graphique, traduit par Bossut..... 293-296
Detlefsen. — Die Maase der Erdtheile nach Plinius..... 297
Fischer (O.). — Konforme Abbildung sphærischer Dreiecke auf einander mittelst algebraischer Funktionen..... 277-280
Genocchi (A.). — Calcolo differenziale e principii di Calcolo integrale.. 170-172
Gow (James). — A short history of greek Mathematics..... 157-166
Gram. — Undersegelser angaaende Mængden af Primtal under en given Grænse..... 155-156
Grube. — Zur Geschichte des Problems der Anziehung der Ellipsoïde.. 297-300

Pages

Gruey. — Leçons d'Astronomie 221-224
Haentzschel. — Ueber das cartesische Oval 10
Lühmann (Fried. v.). — Die Sectio Rationis, Sectio Spatii und Sectio determinata des Apollonius 280
Marie (Max.). — Histoire des Sciences mathématiques. T. III et IV... 58-69
Marx (W.). — Lehrbuch der darstellenden Geometrie 190
Mathieu. — Théorie du potentiel 153-155
Mélanges Graux. — Recueil de travaux d'érudition classique dédiés à la mémoire de Charles Graux 224-225
Muller (F.). — Kalender-Tabellen 296
Muller (Richard). — Ueber gewisse Gleichung $2n^{\text{ten}}$ Grades, deren Specialfälle $n = 2$ und $n = 3$ beim Normalenproblem der Ellipse und des Ellipsoïds auftreten 282-283
Petersen. — Kinematik 58
Pfeiffer (G.). — Formeln für den Inhalt der Kegelfläche 253-254
Radau. — Tables de l'intégrale $\psi(z)$ 29-30
Rausenberger (O.). — Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen einer Variabeln 167-169
Salmon. — Traité de Géométrie analytique (courbes planes), traduit par Chemin 57
Schemmel (Victor). — Zum Problem der drei Körper 300-301
Schlegel (Max.). — Bestimmung der Konstanten der sphærischen Kettenlinie 254-255
Schumann (Ad.). — Die Steinerschen Kreisreihen und ihre Beziehung zum Ponceletschen Schliessungstheorem 281-282
Schwarz. — Beweis des Satzes, dass die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens 25-29
Villié (E.). — Compositions d'Analyse et de Mécanique données depuis 1869 à la Sorbonne pour la licence ès Sciences mathématiques 296

MÉLANGES.

Bertrand (J.). — Niels-Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique par C.-A. Bjerknes 190-202
— Discours prononcé aux obsèques de M. Bouquet, au nom de l'Académie des Sciences 301-303
Bonnet (Ossian). — Sur la surface réglée minima 14-15
— Discours prononcé aux funérailles de M. Serret au nom de l'Académie et de la Faculté des Sciences 126-130
Facultés des départements. — Sujets de compositions donnés aux examens de Licence 241-252; 255-261
Faye. — Discours prononcé aux funérailles de M. Serret au nom du Bureau des Longitudes 130
Hankel. — Esquisse historique sur la marche du développement de la nouvelle Géométrie 172-188; 226-240
Hermite. — Sur la théorie des fractions continues 11-13
— Note 135-137
— Discours prononcé aux obsèques de M. Bouquet, au nom de la Faculté des Sciences 303-304

Pages.

JORDAN (C.). — Discours prononcé aux funérailles de M. Serret, au nom de l'Académie des Sciences..... 123-126
MANNHEIM. — Sur une droite qui se déplace de façon que trois de ses points restent sur les faces d'un trièdre trirectangle..... 137-140
NAZIMOW. — Extrait d'une lettre..... 15-20
OBRATZOFF. — Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite..... 132-135
PERROTT (JOSEPH). — Démonstration de l'existence des racines primitives pour les modules égaux à des puissances de nombre premier impair.. 21-24
PICARD (EM.). — Sur les groupes de certaines équations différentielles linéaires..... 202-209
RENAN. — Discours prononcé aux funérailles de M. Serret au nom du Collège de France..... 130-132
RINDI (SCIPION). — Les surfaces polaires inclinées..... 32-56
STIELTJES. — Sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}}$..... 306-311
TANNERY (J.). — Discours prononcé aux obsèques de M. Bouquet, au nom de l'École Normale..... 304-305
TANNERY (P.). — Sur l'Arithmétique pythagoricienne..... 69-88
— Le vrai problème de l'histoire des Mathématiques anciennes..... 104-120
— Proclus et Geminus..... 209-219
— Le classement des Mathématiques d'après Geminus..... 261-276
— Sur l'époque où vivait Geminus..... 283-292
— Les applications de la Géométrie dans l'antiquité..... 311-324

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME IX.

10534 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

10534 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

3

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, MANSION, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME IX. — ANNÉE 1885.

(TOME XX DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1885

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XI; 1883.

Lemoine (*E.*). — Quelques questions de probabilités résolues géométriquement. (13-25).

L'exemple suivant donnera une idée des problèmes que se pose M. Lemoine et des solutions qu'il trouve :

« On prend au hasard un point M dans l'intérieur d'un triangle quelconque ABC, de côtés a, b, c. Quelle est la probabilité pour que, si de ce point on abaisse des perpendiculaires MA_1, MB_1, MC_1, sur les trois côtés :

» 1° On puisse former un triangle avec MA_1, MB_1, MC_1;

» 2° On puisse former un triangle qui n'ait que des angles aigus? »

Voici comment l'auteur résout la première partie de la question :

Le point M doit être situé à l'intérieur du triangle A'B'C' déterminé par les intersections des bissectrices intérieures avec les côtés du triangle ABC. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{\text{surf. A'B'C'}}{\text{surf. ABC}} = \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Picard (*Émile*). — Sur la réduction du nombre des périodes

des intégrales abéliennes, et, en particulier, dans le cas des courbes du second genre. (25-53).

La première Partie du Mémoire est consacrée au problème général de la réduction du nombre des périodes.

M. Picard démontre le théorème suivant :

« Si parmi les p intégrales abéliennes de première espèce relatives à une courbe de genre p, il y en a q ($q < p$) ayant seulement $2q$ périodes, savoir

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_q(x),$$

les q fonctions

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_q,$$

résultant de l'inversion de ces intégrales, sont racines d'équations algébriques, ayant pour coefficients des fonctions uniformes de

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_q,$$

avec $2q$ systèmes de périodes, en posant

$$z_i = u_i(x_1) + u_i(x_2) + \ldots + u_i(x_q) \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

De plus, ces fonctions $2q$ fois périodiques pourront s'exprimer à l'aide des fonctions Θ de q variables indépendantes. »

Dans la seconde Partie, l'auteur traite des courbes du second genre, et résout ce problème :

« Étant donnée l'équation

$$y^2 = x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x),$$

trouver les expressions générales de k^2, l^2, m^2, telles qu'il existe une intégrale de première espèce relative à cette courbe et n'ayant que deux périodes.

Dans la solution intervient un entier arbitraire D. En lui donnant la valeur 2, M. Picard retrouve un résultat de Jacobi.

Il montre que si, pour une courbe donnée du second genre, il existe une intégrale n'ayant que deux périodes, il en existe nécessairement une seconde. Dans certains cas particuliers, il peut arriver qu'il n'y ait pas seulement deux intégrales, *mais une infinité n'ayant que deux périodes.*

Revenant au cas général, l'auteur fait connaître l'équation par laquelle s'effectue l'inversion de l'intégrale $\int \frac{P + Qx}{y}\,dx$, supposée n'avoir que deux périodes.

Finalement, il indique le moyen d'obtenir la transformation qui ramènera l'intégrale hyperelliptique à une intégrale elliptique.

Fouret. — Sur une propriété relative à deux systèmes matériels, composés d'un même nombre de points ayant des masses égales chacune à chacune. (53-65).

Soient

O, O′ les centres de gravité respectifs des deux systèmes;

m_i la masse commune de deux points correspondants A_i, A'_i;

B_i, B'_i ce que deviennent les deux points A_i, A'_i lorsqu'on transporte les deux systèmes parallèlement à eux-mêmes, de manière à faire coïncider leurs centres de gravité;

$M = \Sigma m_i$ la masse totale de chaque système.

On aura

$$\Sigma m_i \overline{A_i A'_i}^2 = M\overline{OO'}^2 + \Sigma m_i \overline{B_i B'_i}^2.$$

En particularisant de différentes manières ce théorème très général, on retrouve diverses propositions connues de Mécanique.

Zeller (*Ch.*). — Problema duplex Calendarii fundamentale. (59-61).

Perrin. — Sur les cas de résolubilité par radicaux de l'équation du cinquième degré.

L'auteur a déjà résolu l'équation du cinquième degré privée de second terme

$$(1) \qquad x^5 + 10px^3 + 10qx^2 + 5rx + s = 0,$$

lorsque les coefficients satisfont aux deux conditions

$$q = 0, \quad r = 4p^2.$$

(*Bulletin*, t. X, p. 139.)

Dans le cas de

$$p = 0, \quad 16q^4 + 2qrs + r^3 = 0,$$

les cinq racines de l'équation (1) sont données par la formule

$$x_p = -\theta^p \sqrt[5]{\frac{p^2}{2q}} + \theta^{2p} \sqrt[5]{\frac{8q^3}{r}}, \qquad (p = 1, 2, 3, 4, 5),$$

où θ représente une même racine cinquième imaginaire de l'unité, quelconque d'ailleurs, et où les radicaux sont pris avec leurs valeurs arithmétiques.

Pour le cas général de résolubilité par radicaux de l'équation du cinquième degré, M. Perrin fait connaître une réduite d'une simplicité remarquable. Cette réduite est

$$25T^2 - UP = 0,$$

U désignant la forme générale binaire du cinquième ordre, T son covariant canonique, P son covariant linéaire le plus simple.

Appell. — Sur certains développements en série de puissances. (65-69).

Soient C, C′ deux cercles qui ne sont pas entièrement intérieurs l'un à l'autre; a, a' les affixes de leurs centres. Toute fonction $f(x)$, holomorphe en tous les points du plan à la fois extérieurs aux deux cercles, est, en ces points, repré-

sentée par la série

$$(1) \qquad f(x) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[\frac{A_\nu}{(x-a)^\nu} + \frac{A'_\nu}{(x-a')^\nu} \right].$$

Telle est la formule, établie antérieurement par M. Appell (*Mathematische Annalen,* t. XXI, p. 118, et *Acta mathematica,* t. I, p. 145). Elle donne lieu aux remarques suivantes :

Si les deux cercles n'ont aucun point commun, le développement (1) n'est possible que d'une manière;

Si les deux cercles se coupent ou se touchent, ce développement est possible d'une infinité de manières. Il existe une infinité de séries de la forme (1) ayant pour somme zéro : on peut donc ajouter une pareille série au développement (1) sans qu'il cesse de représenter $f(x)$.

Mêmes remarques dans le cas où les deux cercles ne sont pas entièrement extérieurs l'un à l'autre : toute fonction $f(x)$, holomorphe dans la partie du cercle C extérieure au cercle C', est alors développable en série de la forme

$$f(x) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[A_\nu (x-a)^\nu + \frac{A'_\nu}{(x-a')^\nu} \right].$$

Ces remarques s'étendent au cas d'un nombre quelconque de cercles.

Lucas (*Édouard*). — Démonstration du théorème de Clausen et de Staudt sur les nombres de Bernoulli. (69-71).

On a, pour les nombres de Bernoulli, l'expression

$$B_n = A_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \cdots - \frac{1}{\lambda},$$

dans laquelle $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ désignent des nombres entiers, et $2, \alpha, \beta, \ldots, \lambda$ tous les nombres premiers qui surpassent de l'unité tous les diviseurs de n.

M. Lucas donne de ce théorème une démonstration directe, fondée sur les théorèmes de Fermat et de Wilson, et sur la méthode de sommation des puissances due à Fermat.

David. — Sur deux séries nouvelles qui expriment le sinus et le cosinus d'un arc donné. (72-76).

Ces séries, qui mettent en évidence, dans les numérateurs de leurs termes, les zéros successifs des fonctions $\sin x$ et $\cos x$, sont les suivantes :

$$\cos x = 1 - \frac{4x^2}{1.2\pi^2} + \frac{4x^2(4x^2 - 2^2\pi^2)}{1.2.3.4\pi^4} - \frac{4x^2(4x^2 - 2^2\pi^2)(4x^2 - 4^2\pi^2)}{1.2.3.4.5.6\pi^6} + \cdots,$$

$$\sin x = \frac{2x}{\pi} - \frac{2x(4x^2 - \pi^2)}{1.2.3\pi^3}$$
$$+ \frac{2x(4x^2 - 3^2\pi^2)}{1.2.3.4.5\pi^5} - \frac{2x(4x^2 - \pi^2)(4x^2 - 3^2\pi^2)(4x^2 - 5^2\pi^2)}{1.2.3.4.5.6.7\pi^7} + \cdots.$$

Elles convergent pour toute valeur finie de x.

Vaněček (*J.-S.* et *M.-N.*). — Sur les ellipses décrites par les points invariablement liés à un segment constant et sur une surface circulaire du huitième ordre. (76-88.)

Perrin. — Sur les résidus des invariants et covariants des formes binaires. (88-106).

L'auteur appelle *résidu* d'un invariant ou d'un covariant de la forme binaire d'ordre m

$$U = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m)(x, y)^m$$

ce que devient l'invariant ou la source du covariant, lorsqu'on y fait $a_m = 0$.

Tout invariant ou covariant d'une forme binaire est complètement déterminé et entièrement calculable, lorsqu'on connaît son résidu.

Le résidu d'un covariant jouit de l'une des propriétés essentielles de la source de ce covariant : toute relation identique, ou syzygie, entre des covariants et invariants subsiste entre leurs résidus, et réciproquement. Dès lors, la recherche des invariants et covariants *distincts* d'une forme binaire est ramenée à la recherche des résidus distincts.

La méthode de M. Cayley, pour la recherche des sources ou péninvariants distincts, est applicable à celle des résidus.

M. Perrin forme le système des résidus distincts relatifs à la forme binaire du cinquième ordre.

Poincaré. — Sur un théorème de la théorie générale des fonctions. (112-125).

Soit y une fonction analytique quelconque de x, non uniforme. On peut toujours trouver une variable z telle que x et y soient fonctions uniformes de z.

Ce beau théorème, fondé sur la démonstration que M. Schwarz a donnée du *Principe de Dirichlet,* ramène l'étude de toutes les fonctions d'une seule variable à celle des fonctions uniformes.

Bobek. — Remarque sur la ligne de striction de l'hyperboloïde à une nappe. (125-129).

Poincaré. — Sur les fonctions Θ. (129-134).

Soit une fonction Θ à n variables

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma e^{\varphi + m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n},$$

φ représentant une forme quadratique par rapport aux n nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Soient ensuite n^2 constantes quelconques

$$a_{ij}, \qquad \left(\frac{i}{j} = 1, 2, \ldots, n\right),$$

M. Poincaré pose, pour abréger,

$$\Theta(x_i - a_{1i}) = \Theta(x_1 - a_{11}, x_2 - a_{12}, \ldots, x_n - a_{1n}).$$

et considère les n équations simultanées

$$\Theta(x_i - a_{1i}) = \Theta(x_i - a_{2i}) = \ldots = \Theta(x_i - a_{ni}) = 0.$$

Combien ces équations ont-elles de systèmes de solutions communes?

Telle est la question que M. Poincaré résout, en s'aidant de la formule de M. Kronecker qui exprime sous la forme d'une intégrale définie multiple le nombre des solutions communes, à un système de n équations à n inconnues, lorsqu'on assujettit ces solutions à être comprises dans un domaine donné. Ce domaine est ici le *prismatoïde* des périodes.

La réponse à la question est $n!$ On ne compte pas, bien entendu, comme distinctes les solutions congruentes.

Après avoir résolu, par l'application du même principe, un problème plus général, M. Poincaré se pose la question suivante :

« Quel est le nombre des fonctions $\Theta(x_i - a_i)$ qui s'annulent pour n systèmes donnés de valeurs de x_i? »

Ce nombre est $n!$ Mais la connaissance de n de ces fonctions entraîne celle des $n! - n$ autres.

D'Ocagne. — Sur le centre de courbure des courbes de poursuite. (134-135).

Poincaré. — Sur les fonctions entières. (136-144).

Un facteur primaire de M. Weierstrass

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{P(x)},$$

est dit de genre n, lorsque le polynôme $P(x)$ est de degré n.

Une fonction entière est de genre n, lorsqu'elle ne contient que des facteurs de genre n ou de genre inférieur.

M. Poincaré fait connaître quelques résultats sur la façon dont les fonctions de genre n se comportent à l'infini.

Soient $F(x)$ une fonction de genre n, α un nombre, aussi petit qu'on voudra, mais d'argument tel que $\lim e^{\alpha x^{n+1}} = 0$, on aura

$$\lim F(x) e^{\alpha x^{n+1}} = 0,$$

lorsque x tendra vers l'infini avec un argument déterminé.

Il suit de là que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{(xz)^{n+1}} F(z)\, dz$$

représente une fonction $\Phi\left(\frac{1}{x}\right)$, Φ étant une fonction entière.

M. Poincaré en conclut que dans une fonction entière de genre n

$$F(z) = \Sigma A_p z^p,$$

on a

$$\lim A_p \sqrt[n+1]{p!} = 0.$$

lorsque p croît indéfiniment.

Goursat. — Sur les équations différentielles linéaires du quatrième ordre, dont les intégrales vérifient une relation homogène du second degré. (144-172).

M. Fuchs a montré que, si les intégrales d'une équation différentielle linéaire du troisième ordre à coefficients rationnels vérifient une relation homogène du second degré, ces intégrales sont les carrés des intégrales d'une équation du second ordre à coefficients rationnels.

M. Goursat commence par retrouver cette propriété en supposant les coefficients de l'équation du troisième ordre fonctions uniformes d'un point analytique. Puis il étudie les cas de réduction analogues que présente l'équation linéaire du quatrième ordre, en supposant que les coefficients soient uniformes; mais ses résultats subsistent quand ce sont des fonctions uniformes d'un point analytique.

Deux cas sont à distinguer, suivant que la relation quadratique considérée contient effectivement quatre intégrales, et alors on peut l'écrire

$$U_1 U_4 = U_2 U_3,$$

ou qu'elle n'en contient que trois, et prend conséquemment la forme

$$U_1^2 = U_2 U_3.$$

Dans le premier cas, les intégrales de l'équation du quatrième ordre sont les produits des intégrales de deux équations linéaires du second ordre dont les coefficients sont racines d'équations quadratiques à coefficients uniformes.

Dans le second, l'équation du quatrième ordre (qui n'est pas irréductible) admet comme intégrales les carrés des intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes.

Mais on peut aussi supposer que les intégrales de l'équation du quatrième ordre vérifient *deux* relations homogènes et du second degré. Ces quatre intégrales sont alors les coordonnées homogènes d'un point d'une biquadratique gauche. De même que dans le problème précédent il s'agissait de trouver les substitutions qui font revenir sur elle-même une surface du second ordre, la question est ici de chercher les substitutions qui font revenir sur elle-même une biquadratique gauche.

Si la courbe est une véritable biquadratique gauche, une intégrale quelconque de l'équation différentielle du quatrième ordre sera racine d'une équation entière à coefficients uniformes, pourvu qu'on ait fait disparaître le second terme de l'équation différentielle.

Si la biquadratique gauche se compose d'une droite et d'une cubique gauche, les intégrales sont les cubes des intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes.

M. Goursat termine par quelques considérations générales sur le rôle important que joue dans la théorie des équations différentielles linéaires l'étude des substitutions linéaires qui reproduisent une forme homogène donnée.

Perott. — Sur le problème des fous.

Nombre des solutions du problème bien connu qui consiste à placer sur l'échiquier un nombre donné de fous, de manière qu'aucun fou ne puisse être pris par un autre.

Lévy (*Lucien*). — Mémoire sur les surfaces développables formées par la réfraction d'un faisceau de rayons lumineux parallèles sur une courbe donnée. (186-199).

Grouper les rayons réfractés de manière à former des surfaces développables. L'auteur ramène ce problème à une équation de Riccati, dont il trouve deux solutions particulières. Le problème ne dépend plus alors que d'une seule quadrature.

L. R.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, fondé par J. LIOUVILLE et continué par H. RESAL.

3e série. — Tome VIII. — Année 1882 [1].

Mathieu (*E.*). — Sur les coordonnées curvilignes. (5-18).

L'auteur étudie les propriétés d'un système de coordonnées n et σ défini de la manière suivante : Supposons une courbe tracée dans un plan, et considérons une portion ω de ce plan qui contienne cette courbe, et dont tous les points en sont très voisins; de chaque point M du champ ω abaissons une normale MP sur la courbe; le point M sera déterminé par la longueur n de la normale MP et par la longueur σ de la courbe comprise entre un point fixe de cette courbe et le point P.

Les coordonnées n et σ ne forment pas un véritable système de deux variables, c'est-à-dire que les signes $\frac{d}{dn}$ et $\frac{d}{d\sigma}$ ne peuvent être intervertis sur une même expression. Si l'on désigne par u une fonction des coordonnées rectangulaires x, y d'un point situé à l'intérieur du contour σ, par v l'angle de la normale intérieure à la courbe avec l'axe des x, on aura

$$\frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma} + \frac{du}{d\sigma}\frac{dv}{dn} = \frac{d\frac{du}{d\sigma}}{dn} + \frac{du}{dn}\frac{dv}{dn}.$$

Cauchy, dans sa théorie de la lame élastique courbe (*Exercices de Mathematiques,* 1828, 3e année, p. 285 à 325), a traité les coordonnées n et σ (qu'il appelle r et s) comme des variables ordinaires : de là les erreurs, et la nécessité de rectifier les calculs.

M. Mathieu donne les formules exactes de double dérivation par rapport aux coordonnées n et σ; en les appliquant au problème du mouvement vibratoire d'une plaque élastique à contour libre, il parvient à mettre sous une forme très élégante les deux conditions au contour trouvées par Kirchhoff.

M. Mathieu étend ses formules à une surface.

---

[1] Voir *Bulletin*, VI_2, 94.

West. — Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski. (Deuxième Note.) (19-54).

Resal. — Sur la détermination du niveau potentiel de l'ellipsoïde. (55-60).

Cet article et les suivants, du même auteur, se trouvent réunis dans le Traité de *Physique mathématique* de Resal, dont on a rendu compte dans une autre partie du *Bulletin*.

David. — Applications de la dérivation d'Arbogast à la solution de la partition des nombres et à d'autres problèmes. (61-72).

La loi de dérivation d'Arbogast (*voir* le grand Traité de Lacroix, n° 123) permet de former immédiatement les termes successifs du développement d'une fonction de série

$$\varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots).$$

En comparant la formule d'Arbogast à une autre formule donnant une expression différente d'une fonction de série, M. David résout simplement le problème de la partition des nombres, qui consiste, comme on sait, dans la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots = n.$$

La loi d'Arbogast résout immédiatement un certain nombre d'autres problèmes.

Clausius. — Sur une formule relative à l'électrisation par influence [1]. (Extrait et annoté par la rédaction.) (73-77).

Soient

$C_1, C_2, \ldots, C_n$, n corps conducteurs qui agissent les uns sur les autres par influence;

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ les quantités d'électricité qui se trouvent sur ces corps à la suite d'une première charge;

$V_1, V_2, \ldots, V_n$ leurs niveaux potentiels;

$Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_n$ et $V'_1, V'_2, \ldots, V'_n$ les équivalents des Q et des V pour une seconde charge; on aura

$$V_1 Q'_1 + V_2 Q'_2 + \ldots + V_n Q'_n = V'_1 Q_1 + V'_2 Q_2 + \ldots + V'_n Q_n.$$

D'après M. Bertrand (*Journal de Physique* de d'Almeida, t. III, p. 73), cette formule aurait été antérieurement établie par Gauss.

Resal. — Commentaire à la théorie analytique de la chaleur de Fourier. (79-124).

---

[1] Wiedemann, *Annales de Chimie et de Physique*, p. 493 et suiv.; 1877.

West. — Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski. (Troisième Note.) (125-166).

Mannheim. — Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux. (167-172).

Nous ne pouvons que renvoyer le lecteur aux élégantes démonstrations géométriques de M. Mannheim.

Appell. — Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables. (173-216).

Les séries les plus simples qu'il convient de considérer comme généralisation de la série hypergéométrique de Gauss sont les suivantes :

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n.$$

La sommation s'étend aux valeurs entières de m et n de zéro à l'infini; le symbole (λ, k) représente le produit

$$\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1),$$

avec la convention $(\lambda, 0) = 1$. On forme ces fonctions en multipliant deux séries de Gauss $F(\alpha, \beta, \gamma, x)\, F(\alpha', \beta', \gamma', y)$, et remplaçant dans le terme général du produit

$$\frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n$$

certains produits tels que $(\alpha, m)(\alpha', n)$ par $(\alpha, m+n)$ de toutes les manières possibles.

M. Appell examine les différents cas où ces séries se ramènent soit à une série de Gauss, soit les unes aux autres (F_1 peut *toujours* se ramener à F_2); il discute les conditions de leur convergence.

De même que la fonction de Gauss satisfait à une équation différentielle qui permet de la définir pour toutes les valeurs de la variable, de même les quatre fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 satisfont à des équations différentielles simultanées permettant de les définir pour tous les groupes de valeurs des variables indépendantes x et y. L'intégration de ces quatre systèmes amène l'auteur à formuler une théorie des équations simultanées aux dérivées partielles

$$r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z,$$
$$t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z,$$

analogue à celle des équations différentielles linéaires à une seule variable.

On connaît la liaison intime qui existe entre la série de Gauss et les fonctions de Laplace. M. Appell rattache de la même façon à la série F_2 les polynômes

$$U = \frac{\partial^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n},$$

que M. Hermite a indiqués comme généralisation des polynômes de Legendre (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LX, p. 370, 432, 461, 512, et *Journal de Crelle*, t. LXIV), et qui ont été étudiés par Didon (*Annales de l'École Normale*, t. V, année 1868).

Les fonctions de M. Appell peuvent s'exprimer au moyen d'intégrales définies doubles (la fonction F_1 peut même s'exprimer par une intégrale simple, comme l'a montré M. Picard, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XC, p. 1267). Il en résulte des relations importantes entre ces fonctions. L'expression de F_3 par une intégrale définie permet de démontrer pour cette fonction une proposition intéressante par son analogie avec la question du développement d'une fonction d'une variable en fraction continue.

M. Appell étudie finalement les fonctions définies par l'équation différentielle unique

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-x^2)r - 2xys + (y-y^2)t \\ &\quad + [\gamma - (\alpha+\delta+1)x]p + [\gamma' - (\alpha+\delta+1)y]q - \alpha\delta z = 0, \end{aligned}\right.$$

obtenue en ajoutant membre à membre les deux équations

$$(x-x^2)r - xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta yq - \alpha\beta z = 0,$$
$$(y-y^2)t - xys + [\gamma' - (\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' xp - \alpha\beta' z = 0,$$

et faisant $\beta + \beta' = \delta$.

La solution entière la plus générale de l'équation (1) est

$$\Phi(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum_{m=0,\ n=0}^{m=\infty,\ n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\delta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} B_{m,n} x^m y^n,$$

où l'on a

$$B_{m,n} = f(m) - \frac{n}{1} f(m+1) + \frac{n(n-1)}{1.2} f(m+2) + \ldots + (-1)^n f(m+n)$$
$$= \varphi(n) - \frac{m}{1}\varphi(n+1) + \frac{m(m-1)}{1.2}\varphi(n+2) + \ldots + (-1)^m \varphi(m+n),$$

les fonctions f et φ étant arbitraires.

L'équation (1) comprend comme cas particulier celle des fonctions de Laplace. Elle fournit ainsi une extension intéressante de la propriété fondamentale de ces fonctions. Si z est une solution de l'équation (1), z_1 une solution de l'équation obtenue en remplaçant dans l'équation (1) α par $\alpha - \lambda$, et δ par $\delta + \lambda$, l'intégrale

$$I = \iint x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} z z_1 \, dx\, dy$$

est nulle tant que

$$\lambda(\delta - \alpha + \lambda) \gtrless 0.$$

M. Appell fait l'application de cette théorie générale à certaines classes de

polynômes, parmi lesquels nous citerons les polynômes,

$$U_{m,n} = x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'} \frac{\partial^{m+n}[x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1}(1-x-y)^{m+n}]}{\partial x^m \partial y^n},$$

qui offrent la plus grande analogie avec ceux de Jacobi. Le théorème fondamental I = 0 permet de calculer les coefficients du développement d'une fonction de deux variables en série de polynômes $U_{m,n}$.

Resal. — Théorie de l'Électrostatique. (217-250).

Poincaré. — Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle [1]. (251-298).

Nous renvoyons, pour les définitions, à l'analyse du premier Mémoire de M. Poincaré (*Bulletin,* VI_2, 100).

V. *Théorie des conséquents.* — L'auteur considère une demi-caractéristique quelconque. On la prolongera indéfiniment, si l'on peut le faire sans rencontrer un point singulier; si, en suivant la demi-caractéristique, on arrive à un nœud, on l'arrêtera à ce nœud; si l'on arrive à un col, on prendra l'un des chemins de droite ou de gauche. Ces conventions conduisent l'auteur à la théorie des *conséquents.*

Soit

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

un arc algébrique sans contact, dont les extrémités A, B correspondent aux valeurs de t

$$t = \alpha, \quad t = \beta.$$

D'un point quelconque M_0 de l'axe AB partent deux demi-caractéristiques : considérons celle de gauche. Plusieurs cas peuvent se présenter.

Cette demi-caractéristique peut se prolonger indéfiniment sans qu'on rencontre jamais l'arc AB; elle peut finir en tournant autour d'un foyer ou aboutir à un nœud avant d'avoir rencontré de nouveau cet arc : alors M_0 *n'a pas de conséquent.* Au contraire la demi-caractéristique peut venir rencontrer AB en M_1 avant d'avoir passé par un point singulier : M_1 est alors le *conséquent* de M_0. La demi-caractéristique peut encore aboutir à un ou plusieurs cols avant d'avoir rencontré de nouveau l'arc AB, et dans ce cas le point M_0 peut avoir plusieurs conséquents. La *loi de conséquence* est la relation qui lie t_0 à t_1, t_0 et t_1 étant les deux valeurs de t qui correspondent à M_0 et à M_1.

Si $t_0 = t_1$, la caractéristique est un cycle; si $t_0 \gtrless t_1$, c'est une spirale.

Toute caractéristique qui n'aboutit pas à un nœud est un cycle ou une spirale.

Si l'on considère t_0 et t_1 comme les coordonnées d'un point, la loi de conséquence

$$t_1 = \varphi_1(t_0)$$

---

[1] *Journal de Mathématiques,* 3e série, t. VII, p. 357.

représente une courbe tout entière comprise dans le carré

$$t_0 = \alpha, \quad t_1 = \alpha,$$
$$t_0 = \beta, \quad t_1 = \beta.$$

C'est la *courbe de conséquence*. M. Poincaré examine les diverses formes qu'elle peut présenter.

VI. *Théorie des cycles limites.* — Les demi-caractéristiques se divisent en quatre catégories : 1° les cycles; 2° les demi-spirales sans nœud ni foyer; 3° les demi-caractéristiques qui aboutissent à un nœud; 4° celles qui tournent indéfiniment autour d'un foyer.

Les demi-caractéristiques de la seconde catégorie rencontrent certains cycles algébriques sans contact en une infinité de points. L'un de ces points est son propre conséquent : la caractéristique correspondante est un cycle, que M. Poincaré appelle *cycle limite* de la demi-caractéristique. On peut trouver un point de la demi-caractéristique aussi rapproché qu'on voudra d'un point du cycle limite.

A l'intérieur et à l'extérieur d'un cycle limite quelconque, il y a toujours au moins un foyer ou un nœud.

Un cycle algébrique qui passe par tous les nœuds et par tous les foyers rencontre tous les cycles limites et par suite toutes les caractéristiques.

Les cycles limites sont en nombre fini, pourvu qu'aucun d'eux ne passe par un col.

Autour d'un cycle limite quelconque se trouve une région annulaire, limitée par deux cycles sans contact que M. Poincaré appelle *cycles frontières,* et sillonnés de cycles sans contact qui ne se coupent en aucun point.

Ces régions annulaires sont les *anneaux limites :* elles sont en nombre fini; les nœuds et les foyers ont aussi leurs anneaux limites.

Les cycles frontières divisent la sphère en deux catégories de régions : 1° les anneaux limites; 2° les régions interannulaires, sillonnées comme les anneaux limites par des cycles sans contact.

Il existe toujours un système topographique formé de cycles sans contact, de polycycles sans contact et de cycles limites. Ce système topographique sillonne toute la surface de la sphère. Les fonds et les sommets sont les nœuds et les foyers de l'équation donnée. Les cols sont les cols de l'équation donnée. La connaissance de ce système topographique permet de discuter complètement les formes des courbes, définies par l'équation différentielle donnée.

VII. *Exemples de discussions complètes.*

VIII. *Recherche des cycles sans contact.* — Quand les cycles limites ne sont pas algébriques, une discussion complète est évidemment impossible; car on ne pourra trouver en termes finis l'équation de ces cycles.

M. Poincaré suppose alors, pour simplifier : 1° qu'il n'y a que deux points singuliers situés en dehors de l'équateur (ces deux points sont par conséquent des foyers ou des nœuds); 2° que ces deux points ont pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = 0.$$

On divisera chaque hémisphère :

1° En régions acycliques, qui ne peuvent être traversées par aucun cycle limite;

2° En régions monocycliques, qui contiennent un cycle limite tout entier et ne sont traversées par aucun autre;

3° En régions cycliques, qui contiennent *certainement* un cycle limite tout entier, et sont *peut-être* traversées par un ou plusieurs autres cycles limites;

4° En régions douteuses, qui contiennent *peut-être* un cycle limite tout entier, *peut-être* plusieurs, et qui *peut-être* ne sont traversées par aucun cycle limite.

On cherchera à étendre les régions acycliques de façon à resserrer les cycles limites dans des régions monocycliques de moins en moins étendues, et à faire disparaître les régions cycliques et les régions douteuses.

L'auteur enseigne à résoudre ces deux problèmes :

1° Reconnaître si une région douteuse est cyclique;

2° Reconnaître si une région est monocyclique.

IX. *Exemples de discussions incomplètes.*

De Saint-Germain. — Extrait d'une Lettre adressée à M. Resal. (297-298).

On peut obtenir sous une forme simple le potentiel d'une couche homogène comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques, en partant de l'expression donnée par Legendre pour le potentiel d'un ellipsoïde en un point qui fait partie de sa masse.

Genty. — Mémoire de Géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre qui ont un centre de figure. (299-334).

Élégante application de la méthode des quaternions à l'étude de la *surface de Kummer,* dont on connaît la liaison intime avec ces complexes.

Gouy. — Propagation des ondes lumineuses, eu égard à la dispersion. (335-356).

Ce Mémoire a pour objet l'étude des mouvements par ondes planes, et en particulier de ceux qui correspondent à la lumière homogène.

Dans de tels mouvements, il y a deux vitesses à considérer, bien différentes l'une de l'autre dans les milieux doués d'une grande dispersion : la *vitesse individuelle des ondes,* égale au quotient de la longueur d'onde λ par la période vibratoire T, et la *vitesse de transport de l'intensité lumineuse,* égale à la dérivée de $\frac{1}{T}$ par rapport à $\frac{1}{\lambda}$. Suivant l'auteur, cette dernière est la *vitesse de la lumière;* telle qu'on la mesure par les méthodes directes qui mettent à profit des variations d'intensité.

Cette conclusion, publiée antérieurement sans démonstration (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 29 novembre 1880 et 3 janvier 1881), a été combattue par M. Cornu (même Recueil, 27 décembre 1880 et 10 janvier 1881).

Mathieu (*E.*). — Sur l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss. (357-388).

La fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ n'a, en général, aucun sens si γ est un entier négatif.

Il y a exception si l'un des nombres α, β est lui-même un entier négatif, moindre que γ en valeur absolue : l'expression de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ se change alors en un polynôme entier.

Cette remarque permet à M. Mathieu d'intégrer dans certains cas sous forme finie l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la série hypergéométrique. Toutes les fois que deux des nombres α, β, γ, $\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta$ sont entiers, l'équation admet une intégrale particulière qui peut s'exprimer sous forme finie. Quand il n'y a qu'une solution particulière susceptible d'être exprimée ainsi, l'auteur ramène immédiatement le calcul d'une seconde solution particulière à celui de l'intégrale d'une différentielle binôme non intégrable exactement.

Dans les applications où intervient la série hypergéométrique, la variable x représente souvent le carré d'un sinus. M. Mathieu examine le cas où

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi)$$

est périodique et a pour période 2π.

Resal. — Formules approchées relatives à l'équilibre d'une portion de chaîne ou de corde pesante, comprise entre deux appuis, et très tendue. (383-388).

Les formules de deuxième approximation, données par l'auteur, reviennent à remplacer l'arc de chaînette compris entre les deux points d'appui par un arc de parabole du troisième degré : elles diffèrent quelque peu de celles de MM. Peaucelier et Wagner, reproduites dans le *Traité de Mécanique générale* de M. Resal (t. VI); cette différence tient à la régularité avec laquelle M. Resal a conduit les approximations.

La théorie exposée par l'auteur n'offre d'intérêt que dans le cas où la tension est voisine du maximum qu'elle doit atteindre et qui est fixé d'avance.

Dawidoff. — Sur une formule générale des intégrales définies. (389-412).

Soient

$F(x)$ un polynôme de degré n, dont les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont toutes différentes entre elles;

$\varphi(x)$ une fonction quelconque dont le module de discontinuité ρ est supérieur au plus grand module des racines α; $\varphi(x)$ est alors développable en série suivant les puissances croissantes de x dans les limites des racines de l'équation $F(x) = 0$;

a, b deux quantités moindres que ρ.

On aura

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum \frac{\varphi(\alpha)}{F'(\alpha)} \int_a^b \frac{F(x)\,dx}{x-\alpha} + e,$$

e tendant vers zéro, lorsque le nombre des termes du développement de $\varphi(x)$ augmente indéfiniment.

En particularisant le polynôme $F(x)$, on retrouve la plupart des théorèmes

connus sur les intégrales définies. M. Dawidoff rattache ainsi à une même formule plusieurs propositions isolées de l'analyse.

Bourget. — Sur un problème de permutations successives nommé *Battement de Monge.*

On considère dix objets, et l'on forme la substitution suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Cette substitution, qu'on peut réaliser en battant d'une manière convenable des cartes numérotées, se nomme *Battement de Monge.*

M. Bourget s'est proposé de résumer les Mémoires antérieurs relatifs à la théorie de cette opération, et d'élucider certains points restés obscurs, qui n'ont pas été traités.

Tome IX. — Année 1883.

Appell (*P.*). — Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. (5-24).

Soient x et y deux variables liées par une équation algébrique $F(x,y) = 0$ représentant une courbe d'ordre m et de genre p. Les fonctions que M. Appell étudie sont les fonctions $\Phi(x,y)$ du point analytique (x,y) qui n'ont sur toute la sphère que des pôles et des points critiques algébriques, à savoir les points critiques de la fonction y de x; de plus, ces fonctions se reproduisent multipliées par un facteur constant, quand le point (x,y) décrit un cycle quelconque. Désignant par $\Theta(u_i)$ la fonction de p variables formées avec les périodes normales $\Omega_k^{(i)}$ des intégrales abéliennes de première espèce relatives à la courbe $F = 0$, on a une première expression de la fonction $\Phi(x,y)$ en prenant

$$\Phi(x,y) = e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x,y)} \frac{\Theta[u^{(i)}(x,y) - k_i - g_i]}{\Theta[u^{(i)}(x,y) - k_i]} R(x,y).$$

Dans cette équation $R(x,y)$ représente une fonction rationnelle de x et y; λ_i, g_i et k_i sont des constantes. Les p constantes k_i sont arbitraires; les $2p$ constantes de λ_i et g_i sont déterminées par les équations suivantes, qui expriment que la fonction Φ possède les $2p$ multiplicateurs donnés μ_k :

$$\mu_{2i-1} = e^{2\pi\lambda_i\sqrt{-1}}, \quad \mu_{2i} = e^{g_i + 2(\lambda_1\alpha_{1i} + \lambda_2\alpha_{2i} + \ldots + \lambda_p\alpha_{pi})}.$$

Cela posé, l'auteur se propose d'obtenir pour la fonction $\Phi(x,y)$ une formule de décomposition en éléments simples analogue à celle que M. Hermite a donnée pour les fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Il écarte d'abord le cas exceptionnel où les constantes g_i seraient nulles à des multiples près de périodes conjuguées, et prend pour élément de décomposition la fonc-

tion

$$\mathcal{F}(x, y, \xi, \eta) = K e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x,y)} \frac{\Theta[u^{(i)}(x,y) - u^{(i)}(\xi,\eta) + h_i - g_i]}{\Theta[u^{(i)}(x,y) - u^{(i)}(\xi,\eta) + h_i]},$$

où h désigne l'expression

$$C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k).$$

Cette fonction $\mathcal{F}$ admet les mêmes multiplicateurs que la fonction Φ à décomposer: elle devient infinie du premier ordre aux p points

$$(\xi, \eta)(x_1, y_1)(x_2, y_2)\ldots(x_{p-1}, y_{p-1}).$$

De ces p points, les $p-1$ derniers (x_k, y_k) sont entièrement arbitraires; le premier seul (ξ, η) est supposé, dans la formule de décomposition que donne M. Appell, coïncider successivement avec les infinis de la fonction Φ. La constante K, qui figure dans l'expression de $\mathcal{F}$, est déterminée de manière que pour l'infini $x = \xi$ le résidu de l'une des valeurs de $\mathcal{F}$ soit égal à l'unité.

Le cas exceptionnel, écarté d'abord, est ensuite traité directement par l'auteur en s'appuyant sur la formule de Roch qu'a fait connaître M. Lindemann. Dans ce cas, l'élément de la décomposition est la fonction

$$H_i = e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x,y)} Z_i,$$

Z_i désignant l'intégrale abélienne de seconde espèce dont le pôle se trouve au point (ξ_i, η_i).

De la formule générale qu'il a obtenue pour les fonctions $\Phi(x, y)$, l'auteur déduit la formule de Roch pour la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle du point (x, y), de même que M. Hermite a déduit de la formule de décomposition des fonctions doublement périodiques de seconde espèce celle des fonctions périodiques ordinaires. Puis il présente une nouvelle démonstration de sa formule fondamentale, et indique le principe d'un autre mode de décomposition des fonctions Φ.

En terminant, il étudie les relations entre les résidus d'une fonction $\Phi(x, y)$. Ces relations paraissent être en nombre infini, mais il n'y en a que $p-1$ qui soient distinctes. Dans le cas d'exception signalé plus haut, les résidus vérifient p relations que l'on obtient immédiatement à l'aide des relations entre les résidus d'une fraction rationnelle qui figure dans le théorème de Roch.

Resal. — Exposé des principes de la théorie des courants électriques. (25-42).

L'auteur se borne à l'étude des courants permanents. Partant de la loi de Ohm, il démontre la loi de Joule pour les conducteurs de section très petite mais variable, à l'aide de l'hypothèse des tranches qu'il transporte de l'hydrodynamique à l'électrodynamique. Pour rendre compte de l'induction, M. Resal admet la loi de Weber : il calcule alors le potentiel de l'action mutuelle de deux éléments de courant, le potentiel total relatif à deux courants fermés d'inten-

sités constantes agissant l'un sur l'autre, et la force électromotrice d'un courant induit produit dans un circuit par un courant extérieur.

Aoust. — Des bissectrices d'un réseau de lignes tracées sur une surface quelconque. (43-64).

Deux faisceaux de courbes étant tracés sur une surface, il s'agit de déterminer les courbes qui, en un point quelconque de leur parcours, divisent en deux parties égales l'angle formé par une ligne du premier faisceau avec une ligne du second. Les calculs sont facilités lorsqu'on peut prendre pour réseau de lignes coordonnées les deux faisceaux de courbes données : ce cas a été traité par M. l'abbé Aoust, dans son *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque.* Comme cette simplification n'est pas toujours possible, l'auteur reprend actuellement la question d'une manière tout à fait générale.

Soient $F(\rho, \rho_1) = u$, $F_1(\rho, \rho_1) = u_1$ les équations des deux faisceaux rapportés à des coordonnées curvilignes ρ, ρ_1 faisant un angle φ généralement variable; $d\sigma$, $d\sigma_1$ les composantes obliques suivant les coordonnées d'un déplacement élémentaire sur une courbe du faisceau u à partir d'un certain point; n le rapport $\frac{d\sigma_1}{d\sigma}$; n_1 le rapport correspondant pour la courbe du faisceau u_1 qui passe par le point considéré; $\delta\sigma$, $\delta\sigma_1$ les déplacements composants sur l'une des bissectrices curvilignes de l'angle de ces deux courbes : l'équation différentielle de la double bissectrice sera

$$(2\cos\varphi + n + n_1)\,\delta\sigma_1^2 + 2(1 - nn_1)\,\delta\sigma\,\delta\sigma_1 - 2nn_1(\cos\varphi + n + n_1)\,\delta\sigma^2 = 0.$$

On en conclut aisément la réalité et l'orthogonalité des bissectrices curvilignes, lorsque les courbes des deux faisceaux donnés sont réelles ou imaginaires conjugués. La forme significative de l'équation précédente permet de passer avec la plus grande facilité d'un système coordonné à l'autre. L'auteur présente quelques observations sur l'intégration de l'équation de la double bissectrice; il fait remarquer que cette intégration n'exige pas que l'on connaisse sous forme finie les équations des courbes u et u_1.

Après quelques applications particulières des théories qui précèdent, l'auteur passe au problème inverse : « Trouver tous les couples de courbes tracées sur une même surface qui admettent un même système de bissectrices. » L'équation différentielle de ces couples

$$(R_1 + A)\,d\sigma_1^2 + 2(L + A\cos\varphi)\,d\sigma_1\,d\sigma + (R + A)\,d\sigma^2 = 0$$

contient trois fonctions déterminées R, R_1, L et une fonction arbitraire A des coordonnées ρ, ρ_1. Il existe donc une infinité de réseaux répondant à la question.

Les lignes de courbure se présentent comme conséquence naturelle de cette analyse. L'auteur retrouve l'équation de ces lignes, en les considérant comme les bissectrices d'un réseau formé par le double système des lignes asymptotiques d'une surface. Toutes les propriétés connues des lignes de courbure se déduisent alors de la théorie générale des bissectrices d'un réseau. L'auteur démontre, en terminant, quelques théorèmes importants en ce qu'ils donnent divers modes de génération des lignes de courbure.

Resal. — Commentaire à la théorie mathématique du jeu de billard. (65-98).

En commentant l'Ouvrage de Coriolis, M. Resal n'a pas seulement en vue de simplifier les démonstrations. Le théorème général qu'il établit au commencement de ce Mémoire lui permet de corriger certaines imperfections de la théorie de Coriolis, notamment en ce qui concerne l'effet d'un coup de queue horizontal.

Voici le théorème auquel nous faisons allusion. Il s'agit de la force vive perdue dans le choc de deux corps imparfaitement élastiques; au moment de la plus grande compression, ces corps se meuvent comme deux solides invariables qui peuvent rouler ou glisser l'un sur l'autre. Soient J l'impulsion due à l'action moléculaire développée au contact, w la projection de la vitesse de glissement sur la direction de J, v_0 la vitesse d'une molécule de masse m avant le choc, v sa vitesse après le choc, U la vitesse perdue à la fin du choc. La perte totale de force vive sera, d'après M. Resal, exprimée par la formule

$$\Sigma m v_0^2 - \Sigma m v^2 = \varepsilon \mathrm{S}\, m \mathrm{U}^2 + \varepsilon \mathrm{S}\, m' \mathrm{U}'^2 - 2 \mathrm{J} w.$$

Les symboles S et S′ ont la signification de somme étendue à l'un et à l'autre corps; les coefficients ε, ε' sont caractéristiques des deux corps en présence; ils dépendent non seulement de leur nature, mais aussi de leur forme, de leurs dimensions et de leurs positions respectives.

Nous nous contentons de signaler ce théorème, fondé d'ailleurs sur des hypothèses simples et naturelles, sans entrer dans le détail des applications que M. Resal en fait à la théorie du jeu de billard.

Laguerre. — Mémoire sur la théorie des équations numériques. (99-146).

L'auteur fait connaître certains critériums pour obtenir une limite supérieure du nombre des racines comprises dans un intervalle donné. Ces critériums sont fondés sur la notion d'*alternance* : $\mathrm{P} + \mathrm{Q} + \mathrm{R} + \mathrm{S} + \ldots$ désignant une suite quelconque de termes, le nombre des alternances de cette suite est le nombre des variations de la suite

$$\mathrm{P},\ \mathrm{P} + \mathrm{Q},\ \mathrm{P} + \mathrm{Q} + \mathrm{R},\ \mathrm{P} + \mathrm{Q} + \mathrm{R} + \mathrm{S},\ \ldots.$$

Parmi les nombreuses propositions démontrées par M. Laguerre, nous signalerons celle-ci : Étant donné le polynôme

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{A} x^{\alpha} + \mathrm{B} x^{\beta} + \mathrm{C} x^{\gamma} + \ldots + \mathrm{L} x^{\lambda},$$

ordonné suivant les puissances croissantes de x, le nombre des racines positives de l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$, qui sont inférieures à un nombre positif donné a, est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\mathrm{A} a^{\alpha} + \mathrm{B} a^{\beta} + \mathrm{C} a^{\gamma} + \ldots + \mathrm{L} a^{\lambda},$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est paire. Dans le cas où $\mathrm{F}(x)$ est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, la même suite donne par ses alternances une limite supérieure du nombre des racines de $\mathrm{F}(x) = 0$ supérieures au nombre positif a. Les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sont

des quantités réelles quelconques, positives, négatives, commensurables ou incommensurables.

M. Laguerre cherche à déterminer avec la plus grande approximation possible le nombre des racines d'une équation algébrique entière $f(x) = 0$, supérieures à un nombre positif donné; il démontre, à ce sujet, un théorème dont l'application se fait de la façon la plus simple au moyen d'un algorithme employé déjà par Horner et Budan. Le théorème auquel nous faisons allusion conduit naturellement à la remarque suivante : z désignant un nombre positif quelconque, le nombre V des variations de $e^{zx}f(x)$ suivant les puissances croissantes de x est au moins égal au nombre p des racines positives de l'équation $f(x) = 0$; ce nombre V ne peut que diminuer quand z augmente, et, pour des valeurs suffisamment grandes de z, V devient égal à p. De là une méthode entièrement différente de celles de Lagrange et de Sturm pour déterminer exactement le nombre des racines positives d'une équation algébrique. Ce procédé, quoique peu pratique, doit être mentionné eu égard au petit nombre de méthodes qui permettent de résoudre la question.

M. Laguerre aborde ensuite les équations de la forme

$$f(x) = A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = 0,$$

où $F(x_0) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ est une série entière à coefficients positifs. Lorsque les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont positives et rangées par ordre croissant de grandeur, le nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$ est au plus égal au nombre des alternances de la suite $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Prenant $F(x)$ égal au développement de e^x, et faisant croître $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ par degrés égaux et insensibles, on obtient pour $f(x)$ l'expression $\int_a^b e^{-zx}\Phi(z)dz$, où $\Phi(z)$ désigne une fonction arbitraire, et l'on peut énoncer le résultat suivant : le nombre des racines de l'équation $\int_a^b e^{-zx}\Phi(z)dz = 0$ est au plus égal au nombre des racines de l'équation $\int_a^b \Phi(x)dx = 0$, qui sont comprises entre a et b. Cette proposition sert de point de départ à M. Laguerre pour déduire d'une équation ayant toutes ses racines réelles une infinité d'autres équations qui jouissent de la même propriété

Signalons, en terminant, l'étude que l'auteur consacre, toujours dans le même ordre d'idées, aux équations de la forme

$$\frac{a_0}{(x-\alpha_0)^\omega} + \frac{a_1}{(x-\alpha_1)^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{(x-\alpha_n)^\omega} = 0,$$

où les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont rangés par ordre croissant de grandeur, et où ω désigne un nombre positif arbitraire.

Vallier. — Étude sur les lois de la résistance de l'air. (147-194).

Resal (*H.*). — Du magnétisme statique. (195-244).

Il s'agit des aimants doués de force coercitive. Coulomb admet que les deux fluides, après leur séparation, se sont respectivement concentrés en deux points

2ud Part.

ou *pôles* de l'élément magnétique. Au point de vue analytique, l'hypothèse d'Ampère revient à celle de Coulomb. Poisson n'a recours à aucune supposition particulière sur le mode de répartition des deux fluides à la surface de l'élément. M. Resal commence par montrer que l'action exercée par un aimant sur un point extérieur est la même dans la théorie de Poisson et dans celle de Coulomb. Il laisse de côté la théorie de Green qui pèche par plusieurs points. Il ne s'arrête pas davantage à celle de M. W. Thomson, qui se trouve implicitement comprise dans le premier Mémoire de Poisson.

Pour établir les équations de l'équilibre intérieur d'un aimant, Poisson a recours à une savante analyse qui n'implique aucune hypothèse particulière sur la forme de l'élément magnétique. Les calculs se simplifient beaucoup si, comme le fait M. Resal, on substitue à cet élément une sphère de même volume. On sait que le problème de l'équilibre intérieur des deux fluides dans un corps aimanté consiste à déterminer les trois composantes α, β, γ de l'intensité magnétique en chaque point. Lorsque la température du corps est uniforme, ces composantes sont les dérivées partielles, par rapport aux trois coordonnées rectangulaires x, y, z, d'une même fonction f, qui satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

La fonction f doit, en outre, vérifier la condition

$$V + Q - \frac{4\pi}{3}(1-k)f = 0,$$

qui achève de la déterminer. Dans cette dernière équation, k représente un coefficient constant, V le potentiel des aimants extérieurs et Q une intégrale définie dont voici la signification : si l'on désigne par $d\omega'$ un élément de la surface du corps aimanté, par w' la normale extérieure à cet élément, par u' sa distance au point intérieur considéré, Q sera donné par la formule

$$Q = -k\int \frac{\partial f}{\partial w'}\,\frac{d\omega'}{u'}.$$

La détermination de f exige l'intervention des fonctions sphériques.

M. Resal applique cette théorie générale aux cas particuliers d'une enveloppe sphérique et d'un ellipsoïde magnétiques. Il examine ensuite l'action simultanée de plusieurs sphères aimantées par l'influence de la Terre sur un point qui leur est extérieur. Ce dernier problème lui fournit l'occasion de relever une singulière inadvertance de Poisson, d'où l'illustre analyste avait conclu à tort que les actions des sphères ne pouvaient jamais s'entredétruire pour toutes les directions du magnétisme terrestre.

Léauté (*H.*). — Note sur le profil des lames du dynamomètre de Poncelet. (245-256).

M. Resal a donné l'équation exacte de la fibre neutre des lames de dynamomètre dont la face intérieure est plane. Cette équation est trop compliquée pour être utilisée d'une manière immédiate. M. Léauté se propose de présenter sous une forme pratique le résultat obtenu, c'est-à-dire de trouver une forme du profil extérieur suffisamment exacte et facile à tracer.

Collet. — Des enveloppes des courbes dans l'espace. (257-268).

Vaněček (*M.-N.*). — Sur la génération des surfaces et des courbes à double courbure analogue à celle de Maclaurin. (269-273).

Voici d'abord la généralisation du théorème de Maclaurin, telle que la donne l'auteur : « Lorsqu'un polygone, de forme variable, se meut de manière que tous ses côtés enveloppent respectivement des courbes $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ de classe $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$, et que tous les sommets, moins un, parcourent des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ d'ordre $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, le sommet libre engendre une courbe d'ordre $2c'_1 c'_2 \ldots c'_n c_1 c_2 \ldots c_{n-1}$. »

Ce théorème a pour correspondant dans l'espace la proposition suivante : « Lorsqu'un polyèdre P, de forme variable, à n faces, se meut de manière que toutes ses faces enveloppent respectivement des surfaces développables $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de classe $s_1, s_2, \ldots, s_n$ et que toutes ses arêtes, moins une, rencontrent des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ d'ordre $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, l'arête libre engendre une surface gauche de degré $2s_1 s_2 \ldots s_n c_1 \ldots c_{n-1}$.

L'auteur fait connaître d'autres propriétés intéressantes des polyèdres P.

Boussinesq (*J.*). — Équations de petits mouvements d'un liquide pesant quand ils sont principalement horizontaux, que les frottements s'y trouvent peu sensibles, et que le liquide est contenu soit dans un bassin à fond presque horizontal, soit dans un tuyau ou un canal de peu de pente longitudinale, la surface supérieure soumise à des pressions constantes ou légèrement variables, n'ayant aussi que des pentes faibles. (273-300).

On suppose la hauteur des ondes petite vis-à-vis de la profondeur H du bassin, et les vitesses de propagation très supérieures aux vitesses moyennes des filets fluides. Le choix des coordonnées est naturellement indiqué : on prend pour plan des xy un plan horizontal très voisin de la surface libre primitive et pour axe des z une verticale dirigée vers le bas. Les trois inconnues principales sont alors l'ordonnée variable $-h$ d'un point de la surface libre, et les composantes horizontales moyennes U, V de la vitesse tout le long d'une même verticale. Voici les équations de *deuxième approximation*, auxquelles parvient M. Boussinesq, dans le cas où la pression à la surface est constante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{H}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right) + \frac{\partial h\mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial h\mathrm{V}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial x} + \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + \frac{\mathrm{H}}{3}\frac{\partial^3 h}{\partial t^2 \partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial y} + \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{dx} + \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \frac{\mathrm{H}}{3}\frac{\partial^3 h}{\partial t^2 \partial y} = 0.$$

Lorsqu'il s'agit d'un canal sensiblement rectangulaire, ayant pour axe l'axe des x, il convient de prendre pour inconnues : 1° la hauteur moyenne du liquide au-dessus de son niveau primitif dans toute l'étendue d'une section transver-

sale; 2° la valeur moyenne que possède dans toute la section la composante de la vitesse suivant l'axe des x. Si l'on désigne encore par h et U ces deux inconnues, on aura, pour les déterminer, les deux équations

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \Pi \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial h U}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Pi}{3} \frac{\partial^3 h}{\partial t^2 \partial x} = 0.$$

La forme de ces équations montre que, dans le cas où le fluide se meut par filets rectilignes et parallèles de vitesses inégales, les ondes de translation se propagent exactement comme si la masse liquide se mouvait tout d'une pièce avec la vitesse moyenne des filets.

La même loi régit les longues ondes dans un canal prismatique de forme quelconque, pourvu que les différences initiales de vitesse des divers filets fluides soient très inférieures aux vitesses de propagation.

West (*E.*). — Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski. (301-406).

Schiff. — Sur l'équilibre d'un cylindre élastique. (407-424).

L'auteur résout complètement ce problème : « Trouver l'état d'équilibre d'un cylindre de révolution isotrope, soumis à des forces normales appliquées à sa surface latérale et à des forces tangentielles appliquées à ces bases, ces dernières forces ayant la même valeur à la même distance de l'axe. »

Les formules de M. Schiff concordent avec ses expériences sur le caoutchouc : les fibres intérieures subissent des pressions normales, alors même que la surface latérale n'est soumise à aucune pression, et le cylindre se change en un corps de révolution légèrement convexe. La solution de M. Schiff généralise de la manière la plus heureuse celle de M. de Saint-Venant : elle fait disparaître les contradictions que des hypothèses trop particulières semblaient créer entre l'expérience et la théorie.

Boussinesq (*J.*). — Sur la pression moyenne en chaque point intérieur de l'espace qu'occupe un liquide agité. (425-430).

M. Boussinesq fait connaître une particularité curieuse de la théorie de la houle et du clapotis. La moyenne des pressions en un point toujours occupé par le liquide agité est inférieure à la pression hydrostatique. La différence a pour expression

$$\frac{1}{2g}\left[\text{moyenne}\,(u^2 + w^2) - \text{moyenne générale}\,(u^2 - w^2\right],$$

g désignant la gravité, u et w les composantes horizontale et verticale de la vitesse au point considéré. En prenant la moyenne de $u^2 - w^2$ par rapport au temps, puis la moyenne de toutes les valeurs moyennes ainsi obtenues pour tous les points d'un même plan horizontal, on aura ce que M. Boussinesq appelle la moyenne générale de $u^2 - w^2$.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

2e série, t. XII (1883). — Supplément.

André (*D.*). — Mémoire sur la multiplication dont le multiplicateur est la somme $x + a$. (3-32).

L'objet principal de ce Mémoire est la recherche des caractères qui permettent de déterminer à *priori* le nombre exact des couples de variations perdues dans la multiplication d'un polynôme $f(x)$ par $x + \alpha$. La solution de ce problème repose sur la notion des *trinômes abaisseurs*.

Le polynôme $f(x)$ est supposé ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x; deux termes sont dits *consécutifs* lorsqu'ils ne sont point séparés par une lacune.

M. André appelle *trinôme abaisseur* tout groupe de trois termes *consécutifs* où les coefficients extrêmes sont de même signe, et où le carré du coefficient moyen ne dépasse pas le produit des coefficients extrêmes.

On dit qu'un nombre positif α est *compris* dans un trinôme abaisseur,

$$\pm (\mathrm{L}x^{p+1} \mp \mathrm{M}x^p + \mathrm{N}x^{p-}), \quad \mathrm{M}^2 \leq \mathrm{LN},$$

lorsqu'il satisfait à la double inégalité

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}} \leq \alpha \leq \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}.$$

Un trinôme abaisseur est de *première* ou de *seconde espèce* suivant qu'il présente deux variations ou deux permanences.

Dans un même polynôme, deux trinômes abaisseurs de même espèce sont *distincts*, lorsqu'ils n'ont aucun terme commun ou qu'ils en ont un seul; ils sont *imbriqués* lorsqu'ils en ont deux.

Plusieurs trinômes abaisseurs, tous de même espèce, sont *distincts*, lorsque deux quelconques d'entre eux sont toujours distincts; ils sont *compatibles*, lorsqu'il existe un nombre, au moins, que chacun d'eux comprenne.

Ces définitions posées, l'auteur démontre le théorème suivant, qui est fondamental :

Lorsqu'on multiplie par $x + a$ ($a > 0$) un polynôme $f(x)$ ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, on perd juste autant de couples de variations qu'il y a, dans ce polynôme, de trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts les uns des autres, et comprenant le nombre a.

Ce théorème, si remarquable par sa précision, permet à M. André de résoudre un certain nombre de problèmes importants, relatifs à la multiplication d'un polynôme par $x + a$. La résolution de ces problèmes est simplifiée par un certain mode de *représentation graphique* du système des trinômes abaisseurs de première espèce qui figurent dans $f(x)$.

Appliqué à l'abaissement des limites des racines fournies par la règle des signes de Descartes, le théorème fondamental conduit à deux propositions, qui présentent le double avantage de donner tout l'abaissement qu'on peut tirer de la multiplication par $x + a$, et d'être applicables dès que les coefficients satisfont simplement à certaines *inégalités*.

1° Si l'on désigne par v le nombre des variations du polynôme $f(x)$, par θ le plus grand nombre des trinômes abaisseurs de première espèce, distincts et compatibles, que présente $f(x)$, le nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$ est au plus égal à $v - 2\theta$, et s'il est supérieur à cette limite, c'est un nombre pair.

2° Si l'on désigne par w le nombre des variations du polynôme $f(-x)$, par τ le plus grand nombre des trinômes abaisseurs de la seconde espèce, distincts et compatibles, que présente le polynôme $f(x)$, le nombre des racines négatives de l'équation $f(x) = 0$ est au plus égal à $w - 2\tau$, et, s'il est inférieur à cette limite, c'est un nombre pair.

L'auteur termine par la démonstration de plusieurs théorèmes sur les équations dont toutes les racines sont réelles, et sur les sommes des produits n à n de ces racines.

André (*D.*). — Mémoire sur la multiplication dont le multiplicateur est la différence $x - a$. (33-44).

L'analyse du Mémoire précédent nous dispense d'insister longuement sur celui-ci.

M. André appelle *trinôme élévateur* tout groupe de trois termes consécutifs, qui présente deux permanences, et où le carré du coefficient moyen est moindre que le produit des coefficients extrêmes.

On dit qu'un nombre positif α est *compris* dans le trinôme élévateur

$$\pm (L x^{p+1} + M x^p + N x^{p-1}), \quad M^2 < LN,$$

s'il satisfait à la double condition

$$\frac{M}{L} \leq \alpha < \frac{N}{M}.$$

Les mots *distincts, imbriqués, compatibles* se définissent pour les trinômes élévateurs de la même façon que pour les trinômes abaisseurs.

Un trinôme élévateur comprenant α est *superflu* lorsque ses deux premiers coefficients composent ou terminent une suite de coefficients consécutifs, tous de même signe, formant une progression de raison α, et précédés immédiatement soit d'une lacune, soit d'un coefficient de signe contraire, soit d'un coefficient de même signe, trop petit en valeur absolue pour faire partie de la progression. Les trinômes superflus ne peuvent évidemment se présenter que dans des cas exceptionnels.

Le théorème fondamental est le suivant :

« Dans la multiplication du polynôme $f(x)$ par $x - a$ ($a > 0$), il se gagne : autant de variations qu'il y a dans $f(x)$ de trinômes élévateurs comprenant a et non superflus; plus autant de couples de variations qu'il y a dans $f(x)$ d lacunes présentant une permanence; plus, enfin, une variation unique. »

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI. In-4°, 3e Série (1).

Transunti, t. II; 1877-1878.

Betti. — Sur une extension des principes généraux de la Dynamique. (32-33).

Énoncé de quelques théorèmes et en particulier du suivant :

« Lorsque le principe d'Hamilton est applicable et que la fonction des forces V dépend seulement des coordonnées et de leurs dérivées premières par rapport au temps, il faut et il suffit, pour qu'on puisse appliquer le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité, que V ne change pas quand on change l'origine des coordonnées et que l'on communique à tous les points des vitesses égales en grandeur et en direction. »

Gautero (*G.*). — Sur les roues à turbine. (52-53).

Volpicelli. — Observations sur l'induction électrostatique. (53-54).

Cerruti (*V.*). — Un nouveau théorème général de Mécanique. (75-76).

L'auteur énonce sans démonstration le théorème suivant :

« On considère un système matériel en mouvement. Soit Φ le complexe déterminé par les forces qui agissent sur ces divers points. On suppose : 1° que le complexe Φ soit constamment en involution avec un autre complexe linéaire Θ; 2° que le système, supposé non invariable, puisse prendre à tout instant le mouvement hélicoïdal infiniment petit, défini par le complexe Θ. Dans ces conditions il existe une intégrale linéaire par rapport aux composantes des vitesses des divers points, qui exprime que le moment du complexe, déterminé par les quantités de mouvement rapportées au complexe Θ, est constant pendant toute la durée du mouvement. Si l'on désigne par l, m, n, p, q, r les coordonnées du complexe Θ, par μ la masse du point x, y, z, l'expression de cette intégrale est

$$l\Sigma\mu\frac{dx}{dt}+m\Sigma\mu\frac{dy}{dt}+n\Sigma\mu\frac{dz}{dt}+p\Sigma\mu\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)$$
$$+q\Sigma\mu\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+r\Sigma\mu\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\text{const.}\text{ »}$$

Brioschi. — Sur quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques. (115-118).

---

(1) Voir *Bulletin*, II_2, p. 77.

L'auteur donne, pour passer de la forme canonique des différentielles elliptiques de première espèce à celle introduite par M. Weierstrass, la relation

$$\frac{dx\sqrt[12]{\delta}}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=(2kk')^{\frac{1}{3}}\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

où δ désigne le discriminant $g_2^3-27g_3^2$. Il exprime ensuite les périodes ω et ω' de la fonction p au moyen de K et K′ et établit l'équation différentielle linéaire du second ordre que vérifie ω.

Il donne enfin une série de relations concernant le problème de la transformation.

De Gasparis. — Sur une relation remarquable qui se présente dans un double changement de variables. (192-195).

Le premier changement de variables consiste à substituer aux coordonnées rectangulaires x_2, y_2 d'un point d'une courbe l'abscisse et l'ordonnée à l'origine x_1, y_1 de la tangente en ce point, ce qui donne

$$x_1=x_2-y_2\frac{dx_2}{dy_2},\quad y_1=y_2-x_2\frac{dy_2}{dx_2}.$$

Le second changement de variables s'obtient en posant

$$x_2=x_3-y_3\frac{dx_3}{dy_2},\quad y_2=y_3-x_3\frac{dy_3}{dx_3}.$$

On en conclut la relation

$$\sqrt{x_1y_1}=\sqrt{x_1y_3}+\sqrt{y_1x_3}\quad\text{ou}\quad\frac{1}{\sqrt{x_3y_3}}=\frac{1}{\sqrt{x_1y_3}}+\frac{1}{\sqrt{y_1x_3}}.$$

Tome III, 1878-1879.

Battaglini. — Sur les complexes du second degré. (43-44).

De Gasparis. — Produit de deux déterminants à trois indices exprimé par un déterminant ordinaire. (44-45).

Brioschi. — Sur l'équation modulaire du huitième degré. (45-47).

M. Klein et M. Brioschi ont démontré, par des considérations différentes, que l'équation modulaire jacobienne correspondant à la classe étudiée par M. Brioschi dans son Mémoire *Sopra una classe di equazioni modulari* (*Annali di Matematica,* t. IX) est

$$y^8-14y^6+63y^4-70y^2+14ty-7=0.$$

Si l'on pose

$$\sqrt{y'}=(2y^7-29y^5+139y^3-187y+7t)\sqrt{y},$$

$$\sqrt{y''}=(y^4-11y^2+33)y\sqrt{y},\quad\sqrt{y'''}=(y^4-9y^2+14)\sqrt{y},$$

y', y'', y''' seront racines des équations modulaires jacobiennes du huitième degré; et si l'on pose

$$\sqrt{Y} = p\sqrt{y} + q\sqrt{y'} + r\sqrt{y''} + s\sqrt{y'''},$$

p, q, r, s étant des quantités indépendantes de y, l'équation du huitième degré en Y sera la plus générale de son espèce.

De Gasparis. — Sur l'expression d'un des termes de correction des coordonnées elliptiques dans la théorie des perturbations planétaires. (92).

Kantor. — Génération simple de la jacobienne d'un réseau de courbes du troisième ordre. (93-95).

De Gasparis. — Sur quelques éléments elliptiques en fonction de l'anomalie moyenne exprimée en parties du rayon. (111-112).

De Gasparis. — Sur la valeur inverse du cube du rayon vecteur d'une planète, exprimée au moyen d'une série ordonnée suivant les puissances du temps. (144-145).

De Saint-Robert. — Du mouvement d'un pendule simple dans une voiture de chemin de fer. (145).

Siacci. — Sur la rotation des corps. (146).

Quand un corps, sur lequel n'agit aucune force, tourne autour d'un point fixe, il existe un hyperboloïde dont les axes coïncident avec les axes principaux du corps, qui tourne sans glisser sur un cylindre de révolution, dont l'axe passe par le point fixe et est normal au plan invariable.

Klein. — Sur la résolvante du onzième degré de l'équation modulaire du douzième degré. (177).

Cerruti. — Sur une transformation des équations du mouvement d'un point matériel. (196-197).

Un point matériel se meut dans l'espace sous l'action d'une force quelconque. On considère un complexe linéaire Φ. On peut décomposer la force en deux autres : l'une dirigée vers le pôle du plan osculateur à la trajectoire par rapport au complexe Φ, l'autre suivant la tangente à la trajectoire. La première a pour expression $\frac{\nu r T^2}{\rho \tau^3}$, la seconde $\frac{T}{\tau^2}\frac{dT}{ds}$, si l'on appelle

T le moment de la quantité de mouvement du point par rapport au complexe Φ;
τ le moment par rapport au même complexe de la tangente à la trajectoire;
r la distance du mobile au pôle du plan osculateur à la trajectoire;
ρ le rayon de courbure de la trajectoire au point occupé par le mobile;
ν le cosinus de l'angle compris entre l'axe du complexe et la normale au plan osculateur.

Brioschi. — Sur l'équation de l'octaèdre. (235-237).

Soient $F(x_1, x_2)$ une forme binaire du sixième degré,

$$H = \frac{1}{2}(F, F)_2, \quad A = \frac{1}{2}(F, F)_6;$$

on suppose que le covariant biquadratique $(F, F)_4$ soit identiquement nul. Alors F est le covariant du sixième degré d'une forme biquadratique f et

$$4H^3 + \frac{1}{18} A t F_4 = 0$$

l'équation octaédrique du vingt-quatrième degré en $x = \frac{x_1}{x_2}$. Cette équation est soluble algébriquement; si on l'emploie pour la transformation de $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{F(x)}}$, on obtient une intégrale elliptique par rapport à t. Si l'on pose $f = x_1^4 + x_2^4$, on obtient pour forme normale $F = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4)$, et l'équation octaédrique devient

$$t = \frac{1}{108} \cdot \frac{(1 + 14x^4 + x^8)}{x^4(1 - x^4)^4}.$$

Tome IV; 1879-1880.

Bertini. — Sur la congruence du second ordre, de sixième classe et de première espèce, douée seulement de surface focale. (30-31).

Battaglini. — Observations sur l'équation différentielle elliptique. (49-50).

Résumé d'une Note lue à l'Académie, qui contient une méthode directe de résolution de l'équation différentielle d'Euler. Conditions pour qu'une forme quadratique de trois variables soit l'intégrale générale de l'équation différentielle elliptique.

De Gasparis. — Sur la variation des excentricités des orbites planétaires. (50-51).

Gautero (*G.*). — Sur le mouvement d'une surface qui touche constamment une autre surface fixe. (106-109).

Conditions pour que les deux surfaces se touchent constamment. Application aux surfaces réglées. L'auteur parvient dans ce cas particulier à une formule qui diffère par un terme additif de celle qu'a donnée M. Resal dans sa *Cinématique pure*, p. 146.

De Gasparis (*A.*). — Sur la variation de l'aire décrite par la Lune autour de la Terre produite par l'action du Soleil. (116-117).

Veronese (*G.*). — Sur quelques configurations remarquables de points, de droites et de plans, de conique, et de surfaces du second ordre. (132-149).

Énoncés, donnés sans démonstration, d'un grand nombre de théorèmes sur les groupes projectifs, ouverts ou fermés.

Étant données deux surfaces du second ordre et un point P, on détermine le plan polaire p de P par rapport à l'une de ces surfaces, le pôle P_1 de p par rapport à l'autre surface, le plan polaire p_1 de P_1 par rapport à la première, le pôle P_2 de p_1 par rapport à la seconde, et ainsi de suite. Les points P, P_1, ... et les plans p, p_1, p_2, ... forment des groupes projectifs (P) et (p). On a un groupe cyclique si P_n coïncide avec P.

Le problème traité est celui de savoir quelle relation de position doivent avoir les deux surfaces pour que les points (P) forment un cycle.

Les cas de $n = 2$ et $n = 3$ sont soumis à un examen particulier.

Siacci. — Sur une proposition de Jacobi. (236-241).

Dans le premier des Mémoires posthumes qui font suite aux *Vorlesungen über Dynamik*, Jacobi affirme sans démonstration que les théorèmes 10, 11 et 12 du Mémoire donnent tous les systèmes possibles d'éléments dont les dérivées ont la forme canonique et qui se déduisent tous de l'un d'entre eux. Cette assertion a été contestée par M. Mathieu. M. Siacci démontre un lemme qui lui permet de prouver l'exactitude de la proposition de Jacobi en ce qui concerne les théorèmes 10 et 11, et de la corriger à propos du théorème 12. En outre, il donne un nouveau théorème qui comprend comme cas particulier celui que Jacobi appelle *théorème fondamental* dans le Mémoire précité.

Brioschi. — Sur une classe d'équations différentielles intégrables par les fonctions elliptiques. (241-246).

Méthode nouvelle pour former des équations différentielles linéaires intégrables par les fonctions elliptiques.

Soit

$$\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

On pose

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\varphi(x)} - \sqrt{\varphi(\xi)}}{x - \xi},$$

ξ étant d'une constante indéterminée. On forme la suite

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \mu + \psi(x),\\
\Lambda_2 &= \Lambda_1^2 + \Lambda'_1\sqrt{\varphi},\\
\Lambda_3 &= \Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda'_2\sqrt{\varphi},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\Lambda_r &= \Lambda_1\Lambda_{r-1} + \Lambda'_{r-1}\sqrt{\varphi},
\end{aligned}$$

où μ désigne une nouvelle constante indéterminée, et Λ'_k la dérivée $\frac{d\Lambda_k}{dx}$. Entre les fonctions Λ existent deux séries de relations linéaires dont les coefficients

sont des fonctions de x. De plus, ces fonctions A sont liées à une fonction y qui s'exprime par les fonctions elliptiques par la relation

$$\frac{d^r y}{du^r} = \frac{A_r y}{(e_3 - e_1)^{\frac{r}{2}}},$$

en posant

$$x - e_1 = (e_2 - e_1)\,\mathrm{sn}^2 u,$$

et désignant par e_1, e_2, e_3 les trois racines de l'équation $\varphi(x) = 0$. Des relations linéaires entre les A résultent par suite des équations différentielles linéaires qui sont intégrables par les fonctions elliptiques.

De Gasparis (*A.*). — Vérification et application d'une nouvelle formule pour le calcul des perturbations planétaires. (246-247).

Maggi (*A.*). — Sur l'histoire des fonctions cylindriques. (254-263).

Tome V; 1880-1881.

Battaglini (*G.*). — Sur les formes ternaires bilinéaires. (24-25).

De Gasparis (*A.*). — Sur une équation entre les dérivées partielles des inverses des distances de trois planètes qui s'attirent mutuellement. (79-80).

De Gasparis (*A.*). — Sur une nouvelle formule pour le calcul des orbites des étoiles doubles. (133-134).

Betti (*E.*). — Sur le mouvement d'un ellipsoïde fluide hétérogène. (201-202).

La masse fluide, dont toutes les parties s'attirent suivant la loi d'attraction newtonienne, est supposée formée de couches ellipsoïdales homothétiques et concentriques, la densité étant la même dans toute une couche, mais variant d'une couche à l'autre.

Le problème revient à trouver une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre et à neuf variables. On en obtient facilement cinq intégrales qui forment avec la proposée un système jacobien. On est ramené (d'après les travaux de Lie et Meyer) à la recherche d'une intégrale commune à six équations, d'une intégrale commune à quatre équations et d'une intégrale commune à deux équations différentielles, toutes équations différentielles ordinaires. Au cas où la figure de la masse est invariable, le mouvement est permanent; on peut, connaissant le mouvement de la masse et sa figure, obtenir une condition que doit vérifier la densité du fluide.

Casorati (*F.*). — Observations sur le mode d'exposition commu-

nément suivi pour plusieurs questions fondamentales de l'Analyse infinitésimale. (216-217).

Soient $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$ les polynômes entiers en z, et soient c_1, c_2, ..., c_n autant de constantes différentes. On considère le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_1^z f_1(z) & c_2^z f_2(z) & \dots & c_n^z f_n(z) \\ \theta c_1^z f_1(z) & \theta c_2^z f_2(z) & \dots & \theta c_n^z f_n(z) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \theta^{n-1} c_1^z f_1(z) & \theta^{n-1} c_2^z f_2(z) & \dots & \theta^{n-1} c_n^z f_n(z) \end{vmatrix},$$

dans lequel les symboles $\theta f(z)$, $\theta^2 f(z)$, ... représentent respectivement les expressions $f(z+1)$, $f(z+2)$, ...

Pour que ce déterminant soit identiquement nul, il faut et il suffit que l'une des fonctions $f(z)$ soit identiquement nulle.

Hermite. — Lettre à M. de Gasparis. (217).

Respighi (*L.*). — Sur les observations du diamètre horizontal du Soleil, faites en 1880, à l'Observatoire du Capitole. (237).

Schiaparelli (*G.*). — Observations astronomiques et physiques sur l'axe de rotation et la topographie de la planète Mars. (266-269).

Tacchini (*P.*). — Observations de petites planètes faites à l'Observatoire du Collège romain. (277).

Tacchini. — Sur la comète de 1807. (279).

Veronese (*G.*). — Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions. (303-304).

Résumé très court de la Note mentionnée ci-après sous le même titre.

Respighi et *Celoria.* — Détermination de la différence de longitude de Rome et de Milan (308-310).

La différence trouvée est de $13^m 10^s,548$ avec une erreur probable de $\pm 0^s,013$.

De Gasparis (*A.*). — Sur les corrections aux coordonnées elliptiques dans le calcul des perturbations planétaires. (310-312).

Veronese (*G.*). — Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions. (333-338).

Toute configuration de $n+1$ points dans un plan pris dans un espace à 3 di-

mensions est toujours la projection d'une pyramide à $n+1$ sommets dans l'espace à n dimensions. (La pyramide à $n+1$ sommets dans l'espace à n dimensions correspond au tétraèdre dans l'espace ordinaire.)

Une courbe quelconque dans l'espace à n dimensions a, en général, $3n$ caractères, entre lesquels existent $3(n-1)$ relations indépendantes; trois d'entre eux suffisent pour déterminer les autres. A toute solution en nombres entiers et positifs de ce système de $3(n-1)$ relations entre les caractères d'une courbe de genre zéro correspond effectivement une courbe.

Si l'on appelle courbes de *même espèce* deux courbes du même genre p qui ont les mêmes caractères, abstraction faite de leurs $3p-3$ modules, toutes les courbes rationnelles d'ordre n et toutes les courbes elliptiques d'ordre $n+1$ dans l'espace à n dimensions sont de même espèce.

La courbe rationnelle d'ordre n et la courbe elliptique d'ordre $n+1$ dans l'espace à n dimensions sont telles, qu'on obtient par leur projection toutes les différentes courbes rationnelles d'ordre $\leq n$ et toutes les courbes elliptiques d'ordre $\leq n+1$ dans les espaces à moins de n dimensions. Extension aux courbes de genre supérieur.

Tome VI; 1881-1882.

Respighi (*L.*). — Sur la lumière des comètes. (22-27).

Battaglini (*G.*). — Sur les formes quaternaires bilinéaires. (40-42).

Brioschi. — Sur l'origine de certaines équations différentielles linéaires. (42-47).

Soit l'équation différentielle linéaire

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1}$$

où p et q sont des fonctions de la variable indépendante x, et soient y_1, y_2 deux intégrales fondamentales. Introduisant une nouvelle variable z liée à x par une relation

$$f(z, x) = 0,$$

y_1 et y_2 deviennent fonctions de z. S'il existe entre y_1, y_2 et leurs dérivées successives par rapport à z certaines relations algébriques que l'auteur enseigne à former, la fonction z de la variable x vérifiera une équation différentielle linéaire dont l'ordre varie suivant les cas.

La méthode de formation de cette dernière équation différentielle entre z et x trouve son application à l'occasion du problème de la transformation des fonctions elliptiques. Soient (avec les notations de Jacobi)

$$x = \frac{4}{27}\,\frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^2k'^2}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{M}}\left(\frac{\lambda\lambda'}{kk'}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

Dans le cas de transformation du cinquième degré, l'auteur part de la forme

connue de la relation $f(z, x) = 0$, et il établit que z vérifie l'équation du troisième ordre

$$z''' + 3pz'' + (p' + 2p^2 + 4q)z' + 2(q' + 2pq)z = 0,$$

p et q ayant respectivement pour expressions

$$p = \frac{1}{6}\frac{4 - 7x}{x(1-x)}, \quad q = \frac{11}{3600}\frac{1}{x(1-x)}.$$

L'équation

$$y'' + py' + qy = 0$$

est alors une équation hypergéométrique et z est une forme quadratique à coefficients constants de deux intégrales fondamentales y_1, y_2 de cette équation.

L'auteur traite ensuite de la transformation du septième degré et de celle du treizième, et annonce que, dans ce dernier cas, la fonction z de x vérifie une équation linéaire du septième ordre.

De Gasparis (*A.*). — Nouvelles séries donnant les coordonnées héliocentriques en fonction de l'anomalie moyenne. (65).

Casorati (*F.*). — Sur les équations différentielles linéaires. (121-124).

Observations sur une Note de M. Besso publiée dans le t. X des *Mémoires* de l'Académie, sous ce titre : *Quelques propositions relatives aux équations différentielles linéaires.*

Schiaparelli (*G.*). — Observations sur la topographie de la planète Mars. (167-173).

Allievi. — Équilibre intérieur des colonnes métalliques suivant les lois de la déformation élastique. (257-260).

Respighi (*L.*). — Sur la comète Wells (*a*) de 1882. (327-329).

Respighi (*L.*). — Sur la flexion astronomique des lunettes. (329).

Respighi (*L.*). — Sur l'éclipse totale de Soleil du 7 mai 1882. (329-331).

Respighi (*L.*). — Sur les observations spectroscopiques de la chromosphère et des protubérances solaires faites à l'observatoire du Capitole (mai 1881 à juin 1882); résumé des résultats obtenus par les observations faites depuis octobre 1869 jusqu'à ce jour. (331).

Tome VII; 1882-1883.

Henry (*C.*). — Sur quelques propositions inédites de Fermat. (39-40, fr.).

Ces propositions sont extraites d'une correspondance inédite de Fermat avec le P. Mersenne; la plupart sont mises sous forme de problèmes : l'une d'elles résulte comme cas particulier de ces deux théorèmes généraux : « Tout entier qui, débarrassé de la plus grande puissance de 4 qui le divise, n'est pas de la forme $8x+7$, est de la forme $x^2+y^2+z^2$; tout entier est la somme de quatre carrés. »

Bianchi (*L.*). — Sur une classe de systèmes triples de surfaces orthogonales. (46-47).

Toute surface de courbure constante négative et égale à $-\frac{1}{R^2}$ donne lieu à un système triple de surfaces orthogonales dans lequel un système est formé de surfaces ayant cette courbure moyenne constante négative, et les deux autres de surfaces ayant un système de lignes de courbure linéaires et de rayon R.

Respighi (*L.*). — Observations sur le passage de Vénus, le 6 décembre 1882, faites à l'observatoire du Capitole. (47-51).

Jung. — Nouveaux théorèmes complétant la règle de Guldin, et propriétés de la spirale $r=\frac{a\sin\theta}{\theta}$.

Respighi (*L.*). — Nouvelle Note sur le passage de Vénus. (100-101).

Tacchini. — Observation du passage de Vénus. (106-109).

Millosevich (*E.*). — Sur les observations du passage de Vénus sur le disque solaire faites en Italie, le 6 décembre 1882. (109-111).

Tacchini. — Sur la comète Finlay de 1882. (136-137).

Tacchini. — Observations de la nouvelle petite planète (232) faites à l'Observatoire romain. (137).

Brioschi. — Relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques du premier ordre. (137-140).

Démonstration nouvelle du théorème de Göpel : « Les carrés de douze

des fonctions hyperelliptiques du premier ordre sont des fonctions linéaires des carrés des trois autres. » On en déduit la célèbre équation biquadratique établie par Göpel entre trois fonctions hyperelliptiques.

Tacchini. — Sur les observations des taches et des facules solaires faites à l'Observatoire romain pendant les années 1881 et 1882. (151-153).

Millosevich. — Observations de la comète Swift découverte en Amérique. (167-168).

Respighi. — Sur la comète Finlay de 1882. (181-183).

Spottiswoode. — Sur les invariants et les covariants d'une fonction transformée par une substitution quadratique. (218-223, fr.).

Étant donnée la forme quadratique

$$U = (a, b, c)(x, y)^2,$$

on effectue la transformation quadratique

$$\frac{x}{V} = \frac{y}{V'},$$

en posant

$$V = (\alpha, \beta, \gamma)(\xi, \eta)^2, \quad V' = (\alpha', \beta', \gamma')(\xi, \eta)^2.$$

Soit $W = 0$ le résultat de l'élimination de x et y entre les équations $U = 0$, $xV' - yV = 0$. L'auteur calcule les dérivées (invariants et covariants) de la forme biquadratique W, et donne les relations qui lient ces dérivées à celles des formes U, V et V', considérées soit comme fonctions indépendantes, soit comme fonctions combinées.

Glaser. — Détermination de la couche attractive qui, répandue à la surface d'un ellipsoïde, produit en chaque point intérieur au corps une action constante donnée en grandeur et en direction (224-227).

L'équation de l'ellipsoïde étant

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

et M la masse de la couche, la densité aura pour expression

$$\rho = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2}}} \left[\frac{M - 2\pi ABC}{4\pi ABC} - \frac{x(a-x)}{A^2} - \frac{y(b-y)}{B^2} - \frac{z(c-z)}{C^2} \right].$$

Les trois paramètres a, b, c sont déterminés par les formules

$$X = a\pi \int_0^\infty \frac{ABC.ds}{(A^2+s)\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)(C^2+s)}},$$

$$Y = b\pi \int_0^\infty \frac{ABC.ds}{(B^2+s)\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)(C^2+s)}},$$

$$Z = c\pi \int_0^\infty \frac{ABC.ds}{(C^2+s)\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)(C^2+s)}},$$

qui expriment les composantes données de la force constante.

Besso. — Sur une équation différentielle hypergéométrique. (230).

L'équation

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6}\xi\right)\frac{dy}{d\xi} + \frac{5}{576}\xi = 0$$

admet les deux intégrales fondamentales

$$u_1 = \sqrt{\alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 y_3} \quad u_2 = \sqrt{\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 y},$$

où les α, β, γ sont des constantes, y_1, y_2, y_3 les trois racines de l'équation

$$y^3 + y + x = 0,$$

x étant lié à ξ par la relation

$$x^3 = \frac{27}{256}\xi.$$

Maisano. — Théorèmes relatifs aux formes binaires de degré quelconque avec applications à l'étude des racines multiples des équations du sixième degré. (231-232).

Conditions pour qu'une forme d'ordre n se réduise (quand n est pair) à la puissance $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{ième}}$ d'une forme quadratique; pour qu'elle soit le produit de deux formes linéaires, l'une élevée à la puissance $n-2$, l'autre à la puissance 2.

Énumération des cas de multiplicité des racines de l'équation du sixième degré.

Morera Giacinto. — Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. (268-270).

Établissement des équations d'équilibre données par M. Beltrami (*Mém. de l'Ac. de Bologne*, t. III, p. 4), suivi d'une interprétation mécanique de ces équations.

Respighi (*L.*). — Sur les observations spectroscopiques de la

chromosphère et des protubérances solaires faites à l'Observatoire du Capitole, de 1878 à 1882. (273).

Tacchini. — Sur l'éclipse du Soleil du 5 mai 1883. (287-288).

Tacchini. — Deux lettres sur l'éclipse totale du Soleil du 5 mai 1883. (309-310). L. R.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von L. KRONECKER und K. WEIERSTRASS.

Tome XCIII; 1882.

Kronecker (*L.*). — Sur les unités complexes. Dissertation inaugurale arithmétique. (lat.). (1-52).

Cette dissertation du célèbre géomètre date de l'été de 1845 où, sur le Rapport de Lejeune-Dirichlet, elle a été approuvée par la Faculté de Philosophie à l'Université de Berlin. Cependant, elle ne fut pas alors publiée complètement : l'impression, qui porte la date du 10 septembre, ne contient que les paragraphes 1-16 ; les paragraphes 17-20 (p. 38-52) sont publiés ici pour la première fois. La *Festschrift* de M. Kronecker, dédiée à M. Kummer, à l'occasion du cinquantième anniversaire de son doctorat, contient la réimpression de cette dissertation, et c'est de là qu'elle est passée dans le journal rédigé par MM. Kronecker et Weierstrass. Comme il y a presque quarante ans que la thèse a paru, et qu'elle était devenue très rare, l'auteur en fait en même temps un présent gracieux à son vieux maître et ami qui l'avait alors engagé à entrer dans ses recherches, et aussi à ses disciples d'aujourd'hui, désireux de se procurer ce Mémoire important.

Frobenius (*G.*). — Sur les fonctions elliptiques de seconde espèce. (53-68).

Le nom de *fonction elliptique de seconde espèce* est attribué, suivant M. Hermite, à toute fonction qui porte partout, dans le domaine du fini, le caractère d'une fonction rationnelle et dont la dérivée logarithmique est doublement périodique (*Comptes rendus*, t. LXXXV). Soient 2ω et $2\omega'$ les périodes de $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}$, on aura

$$(1) \qquad \varphi(u+2\omega) = m\,\varphi(u), \quad \varphi(u+2\omega') = m'\varphi(u),$$

où m et m' sont deux constantes qui sont nommées les multiplicateurs de $\varphi(u)$. Introduisons deux autres constantes μ et μ' définies par les équations

$$(2) \qquad m = e^{-2\pi i\mu'}, \quad m' = e^{2\pi i\mu}.$$

Soient enfin ν et ν' deux nombres entiers; il vient

$$(3) \qquad \varphi(u + 2\nu\omega + 2\nu'\omega') = e^{2\pi i(\mu\nu' - \mu'\nu)}\varphi(u).$$

Si μ et μ' s'évanouissent en même temps, $\varphi(u)$ est une fonction elliptique de première espèce. Dans la théorie des fonctions elliptiques de seconde espèce, il faut considérer comme exceptionnel non seulement ce cas, mais plus généralement encore celui où $2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ est une période, c'est-à-dire où deux nombres ν et ν' peuvent être déterminés de sorte que $\mu\omega + \mu'\omega'$ soit égal à $\nu\omega + \nu'\omega'$. Car, posant $\frac{a}{i\pi} = -\frac{\mu' - \nu'}{m} = \frac{\mu - \nu}{m}$, on trouve sous cette hypothèse $\varphi(u) = e^{au}\psi(u)$, $\psi(u)$ étant une fonction doublement périodique.

Pour rapprocher la théorie des fonctions elliptiques de seconde espèce de celle des fonctions de première espèce, M. Frobenius part de la série $\sigma(u)$ que M. Weierstrass a introduite dans la théorie des fonctions elliptiques. On sait que la dérivée $-\frac{d^2 \log\sigma(u)}{du^2}$ fournit la fonction fondamentale $p(u)$ de M. Weierstrass. Voilà pourquoi M. Frobenius écrit

$$q(u) = \frac{\sigma(2\mu\omega + 2\mu'\omega' - u)}{\sigma(2\mu\omega + 2\mu'\omega')\,\sigma(u)}\, e^{(2\mu\eta + 2\mu'\eta')u}.$$

La fonction $\sigma(u)$ satisfait à la relation

$$\sigma(u + 2\nu\omega + 2\nu'\omega') = (-1)^{\nu\nu' + \nu + \nu'} e^{(\nu\eta + \nu'\eta')(u + \nu\omega + \nu'\omega')}\,\sigma(u),$$

où ν et ν' sont deux nombres entiers et où les constantes sont liées par l'équation

$$\eta\omega' - \eta'\omega = +\frac{1}{2}i\pi \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2}i\pi,$$

suivant que l'ordonnée de la grandeur complexe $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ est positive ou négative. Quand on choisit ω et ω' de telle façon qu'elle devienne positive, $q(u)$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce. Enfin M. Frobenius pose, pour abréger,

$$r(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)},$$

et c'est en particulier la théorie des fonctions elliptiques de seconde espèce, exprimées par $q(u)$ et $r(u)$, qui fait l'objet principal du Mémoire.

§ 1. Propriétés générales. § 2. Addition et multiplication. § 3. Multiplication et division. § 4. Transformation.

Thomæ (*J.*). — Sur les intégrales de seconde espèce. (69-80).

Si l'on emploie les notations de Riemann, la fonction $\frac{d\log(v_1, v_2, \ldots, v_p)}{d\zeta}$, où $v_\nu = u_\nu(\sigma, \zeta) - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_\nu(s_\mu, z_\mu)$, peut se mettre sous la forme

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} t(\sigma, \zeta; s_\mu, z_\mu) + C.$$

Si les valeurs initiales des intégrales de seconde espèce t sont données, il reste à déterminer la quantité C qui est indépendante de $s_1, z_1; s_2, z_2; \ldots; s_p, z_p$, mais qui est une fonction de σ, ζ et des modules de classe. Si $s_{1,\zeta}, z_{1,\zeta}; s_{2,\zeta}, z_{2,\zeta}, \ldots; s_{p,\zeta}, z_{p,\zeta}$ sont les p couples de valeurs pour lesquels on a

$$[u_1(\sigma, \zeta), u_2(\sigma, \zeta), \ldots, u_p(\sigma, \zeta)] \equiv [\Sigma u_1(s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}), \ldots, \Sigma u_p(s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta})],$$

il résulte immédiatement la valeur

$$C \equiv -\sum_{\mu=1}^{\mu=p} t(\sigma, \zeta; s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}),$$

et C se trouve exprimée par une somme d'intégrales de seconde espèce. Mais cette somme se prête à être représentée par des intégrales plus spéciales et par des fonctions algébriques : c'est ce que M. Thomae effectue dans ce Mémoire. Après une discussion du cas général, il achève de rechercher le cas où s est une racine carrée. La détermination du cas où s est une racine cubique a été faite par M. Thomae dans deux monographies sur les fonctions abéliennes à trois valeurs (*dreiwerthig*). Le cas général présente encore quelques difficultés algébriques sur lesquelles l'auteur se réserve de revenir.

§ 1. Notations. § 2. Application du théorème d'Abel. § 3. Représentation des intégrales de seconde espèce. § 4. Résultats. § 5. Surfaces à deux feuilles.

Reye (*Th.*). — Sur le système de rayons de deuxième classe, de sixième ordre, de première espèce. (81-86).

Dans une Communication antérieure (t. 86, p. 84; *Bulletin*, IV_2, p. 41), M. Reye avait enseigné à construire, par les méthodes de la Géométrie synthétique, les systèmes de rayons du second ordre sans courbes focales; il n'avait exclu de ses considérations que la première espèce des systèmes de rayons de second ordre de sixième classe. Actuellement il comble cette lacune et montre que ce système restant de second ordre peut être engendré par deux surfaces collinéaire de seconde classe, de même que ceux de cinquième, quatrième, troisième et deuxième classe, et cette génération conduit, non seulement aux propriétés de ce système, découvertes par M. Kummer, mais elle en révèle encore de nouvelles. Signalons surtout le caractère essentiel que les six rayons situés dans un plan touchent toujours une section conique, et que le système est contenu dans un complexe tétraédral de rayons de second degré.

Graefe (*Fr.*). — Généralisation d'un théorème de Hesse sur des hexagones dans l'espace. (87-88).

Kostka (*C.*). — Sur la relation entre quelques formes de fonctions symétriques. (89-123).

Soient

$$(1) \qquad T_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}} = \Sigma t_1^{\alpha_0} t_2^{\alpha_1} \ldots t_n^{\alpha_{n-1}}.$$

où les autres membres de la somme s'obtiennent par les permutations des exposants :

$$\text{(II)} \qquad K_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{r-1}} = c_{\beta_0} c_{\beta_1} \ldots c_{\beta_{r-1}},$$

où c_β signifie la somme des combinaisons des $t_1, \ldots, t_n$ pris β à β sans répétition, $c_0 = 1$;

$$\text{(III)} \qquad C_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}} = | c_\lambda c_{\lambda+1} \ldots c_{\lambda+r-1} |,$$

où le membre de droite représente un déterminant dont on obtient la $h^{\text{ième}}$ ligne en remplaçant, dans celle qu'on lit dans la formule (III), λ par $\lambda_{h-1} + h - 1$. Un c dont l'indice est négatif ou supérieur à n, est à regarder comme s'évanouissant; donc nul λ ne doit être plus grand que n si C doit avoir une valeur différente de zéro. La série des λ est figurée comme ordonnée en décroissant, et C s'évanouirait aussitôt qu'un λ_h serait inférieur d'une unité à celui qui le suit.

Cela posé, on peut demander d'exprimer une quelconque de ces trois formes par une des deux autres : c'est ce qui constitue six problèmes. Exprimer T par un agrégat des K ou, pour plus de brièveté, le problème T, K, c'est le problème le mieux connu et traité. Il y a des travaux célèbres de Waring, Gauss, Cauchy, Borchardt, Kronecker qui s'y rapportent. Quant au problème K, T, on en connaît le cas spécial de la formule polynomiale. Pour satisfaire aux besoins de la pratique, Meyer, Hirsch et M. Cayley ont calculé des Tables qui indiquent les relations entre les K et T pour les dix premières dimensions. La question du développement des C suivant les K a été effleurée dans un travail de M. Naegelsbach qui a révélé plusieurs transformations et applications des C.

La relation entre les C et T a été étudiée par M. Kostka dans deux Mémoires insérés aux tomes 81 et 82 du Journal. Le Mémoire actuel se rattache étroitement à ces deux travaux et présente quelques résultats ultérieurs qui s'obtiennent par la voie que l'auteur avait prise alors. Après avoir réduit le problème général (§ 1), M. Kostka traite les problèmes C, T et K, C, de même qu'en particulier un problème auxiliaire du calcul des combinaisons, problème dont les nombres de solutions offrent une analogie remarquable avec les nombres figurés (2-6). Les résultats des quatre problèmes que nous venons de mentionner peuvent être réunis dans une Table carrée facile à construire pour chaque dimension (§ 8). Quelques mots sur les problèmes T, K et K, T terminent le Mémoire.

Prym (*F.*). — Déduction rapide de la formule des thétas de Riemann. (124-131).

En 1882, M. Prym a publié chez M. Teubner, à Leipzig, la monographie : *Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel und die Riemannsche Charakteristikentheorie.*

La formule dont il s'agit s'y trouve développée, mais, en même temps, M. Prym observe que le procédé qui sert à l'obtenir peut être remplacé par un autre d'une beaucoup plus grande simplicité et qu'il a trouvé en 1880. La Note du journal communique ce nouveau procédé.

Schrœter (*H.*). — Sur une courbe gauche de quatrième ordre et de première espèce. (132-175).

Dans une Note, M. Schroeter explique l'origine de ce Mémoire comme il suit :

« Les recherches qui vont suivre ont été entamées et continuées par le commerce épistolaire et oral avec mon ami et ancien élève M. H. Thieme, à Posen, qui a déjà signalé la courbe dans l'espace de quatrième ordre et de première espèce, laquelle sera étudiée ici de plus près, dans son Mémoire : *Contribution à la géométrie du tétraèdre* (Schloemilch, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1882). Les résultats auxquels chacun de nous est parvenu, indépendamment de l'autre et par une voie parfois différente, se sont trouvés d'accord en tant qu'ils se sont rencontrés, sans qu'il ait été toujours possible de constater auquel de nous appartenait la priorité de chaque résultat particulier. Après que M. Thieme a donné son assentiment, je publie ma repésentation du sujet tout en lui cédant expressément sa part à la priorité des résultats ».

On connaît ce théorème de la Géométrie plane : « Trois couples de rayons issus d'un point et qui passent par les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet forment une involution. Si l'involution est orthogonale, on en tire la proposition également connue : Les trois cercles qui ont pour diamètre les trois diagonales d'un quadrilatère complet appartiennent à un faisceau de cercles et ont donc leurs centres sur une droite. Cette propriété de la figure plane a son analogue dans l'espace quand on remplace les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet par les trois couples de côtés opposés d'un tétraèdre, et le cercle par un hyperboloïde orthogonal. On parvient ainsi à ce théorème : « Quand on fait passer un hyperboloïde orthogonal par chacun des trois couples de côtés opposés d'un tétraèdre, ces trois hyperboloïdes appartiendront à un faisceau, c'est-à-dire qu'ils se coupent dans la même courbe $C^{(4)}$ de quatrième ordre et de première espèce ». Ou bien : « Le lieu d'un point en partant duquel chacun des trois couples de côtés opposés d'un tétraèdre est vu sous un angle droit (c'est-à-dire est situé dans deux plans perpendiculaires), est une courbe $C^{(4)}$ dans l'espace, de quatrième ordre et de première espèce ». L'étude de cette configuration intéressante fait l'objet du Mémoire. Quant au nom d'*hyperboloïde orthogonal* nous renvoyons le lecteur au Mémoire de M. Schroeter : *Sur un hyperboloïde particulier à une nappe* (t. 85, p. 26, *Bulletin*, 2e série, t. III_2, p. 140). On y lit, p. 78 : « Une surface de second ordre pour laquelle deux droites gauches données s, s_1 ont des rayons conjugués et en forment les axes d'involution de plans est un hyperboloïde orthogonal et jouit de la propriété que les distances de chacun de ses points à s et s_1 sont dans un rapport constant. »

Grafe (*Fr.*). — Sur l'hexagone de Pascal, resp. de Brianchon. (184-187).

Hamburger. — Contribution à la théorie de l'intégration d'un système de n équations non linéaires aux dérivées partielles de premier ordre à deux variables indépendantes et à n variables dépendantes. (188-214).

Le travail de M. Hamburger fait suite à son Mémoire inséré au t. 81 (*Bulletin*, 1re série, t. XI, p. 45, etc.) et où il avait étudié les équations linéaires aux dérivées partielles et une classe spéciale d'équations non linéaires, sous certaines conditions d'intégrabilité. Il ramène maintenant l'intégration d'un système général d'équations non linéaires aux dérivées partielles à l'intégration

de systèmes incomplets d'équations aux différentielles totales. Si ceux-ci sont intégrables, la connaissance d'une intégrale pour chacun de ces systèmes conduit à la solution complète avec $2n$ constantes du système proposé d'équations aux dérivées partielles. Dans la seconde Partie, M. Hamburger traite, d'après une méthode semblable, l'intégration d'une équation non linéaire aux dérivées partielles de $n^{\text{ième}}$ ordre entre une variable indépendante et deux variables dépendantes. Pour $n = 2$ les résultats s'accordent avec ceux que M. Darboux a trouvés, par une méthode toute différente, dans son Mémoire : *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Ann. de l'Éc. Norm.*, t. VII, p. 163-173).

Stahl (*Wilhelm*). — Sur la construction synthétique des complexes du second degré. (215-236).

Dans sa propriété comme surface des singularités du complexe général de second degré, la surface kummérienne de quatrième ordre et de quatrième classe douée de seize points et plans singuliers a été amplement étudiée par M. F. Klein, et après cette recherche analytique M. Reye a construit, par la voie synthétique, cette surface avec le système de tangentes doubles. Le succès de la synthèse devait encourager les géomètres à aborder la construction du complexe de second degré. Le Mémoire intéressant de M. W. Stahl nous montre comment il a su vaincre les difficultés du problème. Il considère les arrangements des douze rayons des six complexes fondamentaux qui sont situés dans un plan ou passent par un point. A cet effet, il met en usage quelques théorèmes auxiliaires qui concernent des réseaux de surfaces de second degré et qui ont été déjà donnés par M. Harnack. Leur développement synthétique, qui est assez simple, fait la première partie du travail. Pour plus de brièveté, les démonstrations de quelques-unes des propositions ne sont souvent qu'ébauchées, parce qu'elles ne présentent guère de difficultés. La fin du Mémoire s'occupe de la théorie des polaires pour le complexe de second degré; un article de M. Schur, dans les *Mathematische Annalen*, t. 15, avait déjà enseigné à engendrer le complexe général de second degré par les sections d'éléments correspondants de deux réseaux réciproques de deux complexes linéaires (comp. l'analyse de cet article, *Bulletin*, t.V_1, p. 444). En se reportant sur cette construction, M. Stahl discute la théorie des polaires pour le complexe de second degré et démontre encore le mode de génération de M. Schur pour les complexes traités par lui-même.

Von Lilienthal (*R.*). — Sur deux faisceaux de courbes sphériques dont les coordonnées sont des fonctions elliptiques. (237-250).

Voici les propriétés des deux faisceaux de courbes :

1° Si l'on excepte une constante qui reste arbitraire de même que le module, toutes les autres constantes qui entrent dans les expressions pour les coordonnées peuvent être déterminées de telle sorte que la courbe en question soit située sur une sphère;

2° L'intégrale qui représente la longueur de l'arc de la courbe est une intégrale elliptique de première espèce, augmentée de deux intégrales elliptiques de troisième espèce;

3° Dans le second faisceau des courbes dont il s'agit, la courbe qui était en-

core arbitraire peut être déterminée de façon que l'intégrale pour l'arc devienne une intégrale elliptique de première espèce;

4° En intégrant les fonctions qui représentent les coordonnées des courbes considérées, on obtient deux faisceaux de courbes transcendantes, dont la longueur de l'arc est une intégrale elliptique de première espèce. De plus les courbes d'intégration du second faisceau sont situées sur des cylindres algébriques;

5° Les courbes d'intégration de ces courbes du second faisceau dont la longueur de l'arc est une intégrale elliptique de première espèce, sont les lignes asymptotiques de surfaces minima sur lesquelles est situé un faisceau de courbes algébriques.

§ 1. Le premier faisceau de courbes sphériques. § 2. Le second faisceau de courbes sphériques. § 3. La longueur de l'arc des courbes en question. §. 4. Les courbes d'intégration. § 5. Les courbes d'intégration comme lignes asymptotiques.

Craig (*Thomas*). — Sur la surface parallèle à l'ellipsoïde. (251-270, angl.).

Cette surface s'obtient comme enveloppe d'une sphère qui a un rayon de longueur constante et dont le centre décrit la sphère de l'ellipsoïde, ou bien comme lieu du centre d'une sphère qui roule tout le long de la surface entière. Son équation développée contient environ cent termes et n'est donc propre à aucun usage pratique. Comme dans le cas de la surface des centres et de maintes autres surfaces de degrés élevés, il vaut mieux représenter la surface par trois équations qui servent à exprimer les coordonnées d'un point quelconque de la surface au moyen de deux paramètres indépendants. C'est ce que M. Craig effectue : il exprime les coordonnées ξ, η, ζ d'un point de l'ellipsoïde et les coordonnées x, y, z d'un point de la surface parallèle par deux paramètres u, v qui servent à déterminer les deux surfaces confocales passant par le point (ξ, η, ζ) et il établit ainsi une correspondance analytique entre les points des deux surfaces. Les lignes de courbure sur la surface parallèle correspondent aux lignes de courbure sur l'ellipsoïde, théorème général pour des surfaces parallèles, parce que les surfaces formées par les normales tout le long des lignes de courbure constituent une série de surfaces orthogonales aux surfaces parallèles. Cependant l'auteur vérifie cette proposition évidente par le calcul appliqué à ses formules de représentation. La mesure de courbure d'un point de l'ellipsoïde, exprimée par les grandeurs u et v, a une expression qui est proportionnelle à la quatrième puissance de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent. Pour la surface parallèle, l'auteur se contente de calculer les quantités auxiliaires d'où dépendent les valeurs des deux rayons de courbure. La description des sections faites par les plans principaux est le sujet de la dernière Partie du Mémoire. Il est évident que ces sections principales consisteront : 1° en des lignes parallèles aux sections principales de l'ellipsoïde à la distance donnée R; 2° en des courbes qui correspondent à certaines courbes de l'ellipsoïde : les normales de l'ellipsoïde entre les points de ces dernières courbes et les plans principaux ont la longueur donnée R. Les courbes de la seconde sorte sont des sections coniques dont une réelle et deux imaginaires, ou deux réelles et une imaginaire. Elles sont des lignes doubles de la surface parallèle et touchent, dans quatre points, la courbe parallèle à l'ellipse du plan respectif. M. Craig se réserve de traiter encore les lignes géodésiques. (*Voir* t. 94.)

Nœther (*M.*). — Sur les fondements de la théorie des courbes algébriques dans l'espace. (271-318).

C'est un extrait du Mémoire couronné dont il a été rendu compte (*Bulletin* t. VIII$_1$, p. 177).

Section I. — Recherche des courbes dans l'espace à l'aide de sections spéciales faites par des surfaces.

§ 1. Définitions et propositions auxiliaires. § 2. Génération de la courbe dans l'espace par une transformation uniforme. § 3. Propositions sur la courbe projetée plane d'une courbe dans l'espace. § 4. Application à la courbe, section complète de deux surfaces, et à la section dont le reste est une courbe plane.

Section II. — Recherche des courbes dans l'espace à l'aide de sections faites par des surfaces générales.

§ 5. Une proposition auxiliaire sur des courbes planes. § 6. Les courbes du genre maximum sur une surface d'ordre donné. § 7. Les conditions pour qu'une surface F_μ passe par une courbe R_m^p. § 8. Les conditions pour qu'une surface F_ν passe par une courbe R_m^p donnée sur une surface F_μ. § 9. (Suite) : 1° Méthode des restes. 2° Méthode de la section plane. § 10. L'ensemble des courbes dans l'espace R_m^p. § 11. Sur le nombre de constantes des courbes dans l'espace. Un nouvel élément. Une nouvelle inégalité. § 12 (suite). Observations et spécialités.

Section III. — Applications aux courbes dans l'espace des ordres particuliers. § 13. Classification des courbes dans l'espace. § 14. Les courbes sur les surfaces des ordres 2-5. § 15. Les espèces des courbes irréductibles dans l'espace jusqu'au neuvième ordre. § 16. Les espèces générales des courbes dans l'espace de dix-septième ordre. § 17. Applications de la seconde méthode du § 9. § 18. Application à la géométrie de surfaces spéciales.

Runge (*C.*). — Les relations linéaires entre les divers subdéterminants de systèmes symétriques. (319-327).

Dans un Mémoire sur *Les subdéterminants de systèmes symétriques* (*Sitzungsbericht der Berliner Akademie,* 27 Juli 1882). M. Kronecker a signalé certaines relations linéaires qui subsistent entre eux. M. Runge démontre que les relations découvertes par M. Kronecker sont les seules en ce sens que toutes les autres sont engendrées par des expressions linéaires par rapport aux relations de M. Kronecker. Encore a-t-il trouvé une méthode de déterminer un système de subdéterminants indépendants par lesquels tous les autres de même ordre peuvent être exprimés linéairement.

Rausenberger (*Otto*). — Contribution à la théorie des fonctions elliptiques. (328-333).

Au lieu des fonctions elliptiques, doublement périodiques, on peut introduire des transcendantes à période simple multiplicatoire, c'est-à-dire des fonctions qui satisfont à l'équation $f(px) = f(x)$. En partant du produit

$$\eta(p, x) = \Sigma p^{n^2}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = \Pi(1 - p^{2n+2})(1 + p^{2n+1}x)\left(1 + \frac{p^{2n+1}}{x}\right)$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

et en se servant des notations de M. Königsberger, M. Rausenberger établit les

fonctions $S(p, x)$, $D(p, x)$ qui correspondent aux fonctions $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$, $\Delta \operatorname{am} x$: la plupart des relations pour les fonctions elliptiques subsistent pour les fonctions périodiques par multiplication.

Schwering. — Sur la théorie des fonctions arithmétiques qui ont été appelées $\psi(\alpha)$ par Jacobi. (334-337).

Kronecker. — Contribution à la théorie des équations abéliennes. Remarques au sujet du Mémoire précédent de M. Schwering. (338-364).

Soient p et λ deux nombres premiers réels et impairs, x une racine de l'équation $x^p = 1$, α une racine de l'équation $\alpha^\lambda = 1$ où l'une et l'autre fois il faut excepter cependant l'unité comme racine, $p = 2n\lambda + 1$, $\lambda > 3$, enfin g une racine primitive mod. p. Posant

$$(\alpha, x) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} + \alpha^5 x^{g^3} + \ldots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}}$$

ou bien

$$(\alpha, x) = \sum_{1}^{p-2}{}_m \alpha^{\operatorname{ind} m} x^m,$$

on a

$$\psi(\alpha) = \frac{(\alpha^h, x)(\alpha^k, x)}{(\alpha^{h+k}, x)}.$$

Les exposants h et k étant arbitraires, cette équation définit une série de fonctions $\psi(\alpha)$ différentes. M. Schwering montre que $\Delta + \psi(\alpha)$ est toujours divisible par $(1 - \alpha)^3$. Une autre partie de sa Note se rattache à une remarque de M. Bachmann dans son Livre *Die Lehre von der Kreistheilung*. Il s'agit de séparer les ψ essentiellement différents et d'en déterminer le nombre.

M. Kronecker fait voir que dans toute espèce d'équations abéliennes d'un domaine quelconque de rationnalité, il existe des équations pour lesquelles il subsiste une congruence aussi simple que pour les équations dont dépend la division du cercle. La propriété des nombres complexes $\psi(\omega)$ découle de leur définition originaire, non comme chez M. Schwering, d'une définition dérivée, et de là résulte aussi immédiatement la réduction des fonctions ψ à la sixième partie, comme on le trouve pour les $\psi(\alpha)$ dans un manuscrit sur les leçons de Jacobi de 1836.

La remarque de M. Bachmann porte plus loin que ne l'avait pensé M. Schwering. En voici le texte : « Les fonctions ψ peuvent même être réduites à un plus petit nombre, et le calcul peut s'en simplifier. Cependant, il ne me semble pas indiqué de reproduire ici ces recherches subtiles de Jacobi ». M. Kronecker dit que ce passage vise un problème posé par Jacobi dans la XVIIe Leçon et qui est de développer des relations par lesquelles on déduit d'une des fonctions une autre en remplaçant α par d'autres racines et en multipliant ces expressions les unes par les autres. Cette question, résolue par Jacobi, seulement inductivement pour les nombres premiers jusqu'à 31, est amplement traitée par M. Kronecker : il montre que les demandes de Jacobi ne s'accomplissent plus pour le nombre premier 47 si l'on s'en tient rigoureusement à ce que le problème a de plus intéressant.

Kronecker. — Sur la théorie arithmétique des formes algébriques. (365-366).

Prix Steiner de l'Académie des Sciences à Berlin pour l'année 1884.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome XCVIII; 1884.

N° 14; 7 avril.

De Saint-Venant. — Sur une évaluation, ou exacte ou d'une très grande approximation, de la poussée des terres sablonneuses contre un mur destiné à les soutenir. (880).

Cette Communication est destinée à mettre en relief l'importance théorique et pratique des recherches de M. Boussinesq sur ce sujet.

Sylvester. — Sur le théorème de M. Brioschi, relatif aux fonctions symétriques. (859).

L'intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$\left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n}\right) \varphi = 0,$$

considérée dans une Communication antérieure de M. Sylvester sur le théorème de M. le capitaine Mac-Mahon, résulte d'un théorème bien connu de M. Brioschi sur les fonctions symétriques, à savoir que

$$r \frac{\partial \varphi}{\partial s_r} + a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_{r+1}} + \ldots + a_{n-r} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = 0;$$

il en résulte que, si φ est une fonction des n premières sommes-puissances des racines de l'équation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots = 0,$$

avec exclusion de la somme s_r, on aura

$$a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} + \ldots + a_{n-r} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = 0.$$

Plus généralement, l'intégrale générale de l'équation

$$\left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n}\right)^i \varphi = 0.$$

où l'astérisque signifie qu'on doit prendre le produit complet de l'action de la forme linéaire agissant sur elle-même, sera

$$F + s_1 F_1 + s_1^2 F_2 + \ldots + s_1^{i-1} F_i,$$

où les F sont des fonctions des sommes-puissances $s_2, s_3, \ldots, s_n$. M. Sylvester indique diverses conséquences et généralisations de cette remarque.

De Jonquières. — Sur le théorème de Fermat. (863).

L'équation $a^n + b^n = c^n$ est impossible si a, b sont des nombres premiers.

La démonstration de l'impossibilité de l'équation ci-dessus quand l'un des nombres a, b est premier dépend du théorème suivant : « La différence des $n^{\text{ièmes}}$ puissances de deux nombres entiers consécutifs n'est jamais égale à la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre premier, si $n > 2$.

Abel (*Œuvres*, 2e éd., p. 254) paraît s'être occupé, à ce point de vue, du théorème de Fermat.

Gaillot (*A.*). — Influence de l'attraction luni-solaire sur la marche des pendules. (893).

N° 15; 14 avril.

Discours prononcés aux obsèques de M. Dumas.

N° 16; 21 avril.

Le Paige. — Sur les surfaces du troisième ordre. (971).

Sur l'inscription à une telle surface d'une configuration $(15_6, 20_3)$ formée au moyen de deux tétraèdres homologiques, de leur centre et de leur plan d'homologie.

Lecornu. — Sur les surfaces à pente uniforme et les réseaux proportionnels. (972).

Il s'agit de surfaces dont chaque ligne de plus grande pente a toutes ses tangentes également inclinées sur la verticale; l'auteur indique diverses propriétés simples de ces surfaces, dont il donne l'équation générale, obtenue par l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$rp^2 + 2spq + tq^2 = 0.$$

Boussinesq. — Sur le principe du prisme de plus grande poussée, posé par Coulomb dans la théorie de l'équilibre-limite des terres. (975).

N° 17; 28 avril.

De Jonquières. — Note sur le degré des surfaces osculatrices. (1025).

Sur la solution en nombres entiers de l'équation

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Sylvester. — Sur une extension de la loi de Harriot aux équations algébriques. (1026).

Toute fonction *monothétique* rationnelle et entière de x du degré n en matrices de l'ordre ω peut être représentée de $(1.2.3\ldots n)^{\omega-1}$ manières différentes comme un produit de n facteurs linéaires dont chacun sera la différence entre x et une des racines de la fonction donnée.

(Dans les fonctions *monothétiques,* chaque coefficient est une fonction rationnelle de la même matrice).

N° 18; 5 mai.

Séance publique annuelle.

N° 19; 12 mai.

Discours prononcés aux funérailles de M. Wurtz.

N° 20; 19 mai.

Tisserand. — Note sur un théorème de M. A. Lindstedt, concernant le problème des trois corps. (1207).

Il s'agit du beau théorème qui forme l'objet principal du Mémoire de M. Lindstedt inséré dans les *Annales de l'École Normale,* 3e série, t. I, p. 85. M. Tisserand en donne une démonstration nouvelle, ayant son point de départ dans le Travail de Jacobi : *Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps.*

Petot. — Propriétés de neuf points d'une courbe gauche du quatrième ordre et de sept points d'une cubique gauche, de huit points associés. (1245).

Cette Communication fait suite à celles du même auteur sur les dix points

d'une surface du second degré, etc. Il applique les propositions qu'il énonce à ces problèmes : « Trouver les deux dernières traces d'une courbe gauche du quatrième ordre donnée par huit points sur un plan mené arbitrairement par deux de ces points; trouver la dernière trace d'une cubique gauche, donnée par six points, sur un plan mené arbitrairement par deux de ces points, etc. ».

Goursat. — Sur une équation linéaire. (1246).

Sur l'équation

$$x^3(x-1)^3\frac{d^3y}{dx^3} - [Ax + B(x-1)]x^2(x-1)^2\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+ [Cx(x+1) + Dx + E(1-x)]x(x-1)\frac{dy}{dx}$$
$$- [Fx^2(x-1) + hx(x-1) + Hx + K(x-1)]y = 0,$$

où

$$A = n + n' + n'' - 2,$$
$$B = m + m' + m'' - 2,$$
$$C = pp' + p'p'' + pp'' + 2p + \frac{5p'}{3} + \frac{4p''}{3} + \frac{20}{9},$$
$$D = nn' + n'n'' + nn'' - \frac{n'}{3} - \frac{2n''}{3} + \frac{2}{9},$$
$$E = mm' + m'm'' + mm'' - \frac{m'}{3} - \frac{2m''}{3} + \frac{2}{9},$$
$$F = -p\left(p' + \frac{1}{3}\right)\left(p'' + \frac{2}{3}\right),$$
$$H = n\left(n' + \frac{1}{3}\right)\left(n'' + \frac{2}{3}\right),$$
$$K = m\left(m' + \frac{1}{3}\right)\left(m'' + \frac{2}{3}\right),$$

en désignant par $m, m', m'', n, n', n'', p, p', p''$ des entiers positifs ou négatifs, dont la somme est nulle et par h un paramètre arbitraire. L'intégrale générale de cette équation s'exprime au moyen d'intégrales elliptiques de première et de troisième espèce.

Boussinesq. — Remarque relative à la vitesse de propagation de l'intumescence produite dans l'océan Indien par l'éruption du Krakatoa. (1251).

Cette vitesse vérifie très exactement la formule

$$v = \sqrt{2gH}.$$

N° 21; 26 mai.

Weyr (Ed.). — Sur la théorie des quaternions. (1310).

Partant de cette remarque de M. Sylvester que la théorie des quaternions est

identique avec la théorie des matrices binaires, l'auteur fait l'étude de la périodicité de la fonction exponentielle et donne les valeurs que prend la fonction inverse en supposant que les arguments soient des quaternions.

N° 22; 2 juin.

De Jonquières. — Commentaire arithmétique sur une formule de Gauss. (1358).

Il s'agit de la formule célèbre

$$4X = Y^2 \mp pZ^2,$$

où $X = \frac{x^p - y^p}{x - y}$, où p est un nombre premier, où Y et Z sont des polynômes entiers en x à coefficients entiers et où enfin on doit prendre le signe supérieur ou le signe inférieur selon que p est de la forme $4i + 1$ ou de la forme $4i + 3$.

Après avoir remarqué que, dans le dernier cas, on peut tout aussi bien poser

$$X = Y_1^2 + pZ_1^2,$$

l'auteur insiste particulièrement sur ce que la solution fournie par les formules algébriques dans chaque cas, et qui est unique (sauf pour $p = 3$, où elles en indiquent trois), n'est pas toujours, à beaucoup près, la seule solution existante au point de vue numérique.

Gyldén. — Sur les distances moyennes des planètes dans l'état primordial du système solaire. (1363).

Étude du mouvement d'un corps soumis à l'action d'une force centrale de la forme

$$\frac{A}{r^2} + Br,$$

où A et B sont des fonctions du temps soumises à certaines hypothèses. Conséquences relatives aux distances moyennes des planètes. Ces recherches se relient aux hypothèses imaginées par M. Faye sur l'évolution du système solaire.

N° 23; 9 juin.

Tannery (J.). — Sur les fonctions symétriques des différences des racines d'une équation. (1420).

Cette Communication se rapporte aux Notes de M. Sylvester, précédemment analysées, relatives au théorème de M. le capitaine Mac-Mahon.

L'auteur montre comment on parvient aux relations qui lient les fonctions symétriques entières des différences des racines de l'équation

$$(1) \qquad z^n + na_1 z^{n-1} + n(n-1)a_2 z^{n-2} + \ldots + n(n-1)\ldots 1.a_n = 0.$$

aux sommes $s_2, s_3, \ldots, s_n$ des carrés, des cubes, etc., des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation

$$\zeta^n + a_1 \zeta^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

en partant de l'identité

$$\psi(x)\,\varphi(x) + \varphi'(x) = 0,$$

où l'on suppose

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \\ \psi(x) &= s_2 x + s_3 x^2 + s_4 x^3 + \ldots, \\ \varphi(x) &= 1 + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots, \end{aligned}$$

les quantités $C_2, C_3, \ldots$, étant liées aux quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par les relations

$$a_i = \frac{a_1^i}{1.2\ldots i} + C_2 \frac{a_1^{i-2}}{1.2\ldots(i-2)} + \ldots + C_i.$$

Les $n-1$ premières de ces quantités C entrent comme coefficients dans l'équation que l'on déduit de l'équation (1) en faisant disparaître le second terme; par suite, toutes les fonctions symétriques entières des différences des racines de cette équation sont des fonctions entières des quantités $C_2, C_3, \ldots, C_n$.

Lagrange (*C.*). — Forme générale du reste dans l'expression d'une fonction au moyen d'autres fonctions. (1422).

Solution du problème suivant :

« $F(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ étant des fonctions de x, trouver des coefficients constants $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et un reste R, fonction de x, qui rendent exacte la relation

$$F(x) = a_0 + a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \ldots + a_n \varphi_n(x) + R,$$

de $x = a$ à $x = a + H$, après avoir, d'ailleurs, fixé les conditions que doivent remplir les fonctions proposées pour qu'une telle relation soit possible.

N° 24; 16 juin.

Pellet. — Sur les irrationnelles du second degré. (1482).

Léauté. — Sur la position à attribuer à la fibre moyenne dans les pièces courbes. (1483).

Lorsqu'on applique à une pièce courbe, de faible rayon de courbure, les formules établies pour les pieces droites, il convient de prendre pour définition de la fibre moyenne, non le lieu des centres de gravité ou d'élasticité proprement dits des sections normales, comme on le fait d'ordinaire : mais le lieu des centres de percussion de ces mêmes sections correspondant, pour chacune d'elles, à la droite symétrique de la droite polaire par rapport au centre d'élasticité.

N° 25; 23 juin.

De Jonquières. — Commentaire arithmétique sur une formule de Gauss. (1515).

Barbier (*E.*). — Sur une généralisation de la théorie des réduites. (1531).

Sur la recherche d'une commune mesure approximative à trois grandeurs par un procédé analogue à celui du plus grand commun diviseur.

N° 26; 30 juin.

Berthot. — Sur les effets des forces mutuelles. (1570).

NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE [1].

Tome X; 1884.

Landré (*Corn.-L.*). — L'erreur moyenne des observations qui servent à faire connaître plusieurs inconnues. (1-17).

Réfutation des déductions différentes de l'expression connue $\sqrt{\frac{M}{m-s}}$ de l'erreur moyenne de m observations par rapport à s inconnues; déduction nouvelle.

Landré (*Corn.-L.*). — Formules entre la précision des tables de mortalité et celle des tarifs de l'assurance sur la vie. (18-26).

L'auteur exprime l'erreur probable des tarifs en fonction des erreurs probables des tables de mortalité pour le cas de rente viagère et pour le cas d'une somme payable tout d'un coup.

Landré (*Corn.-L.*). — Une particularité à laquelle il faut faire attention dans la compilation des données pour le calcul de la probabilité de mort. (26-30).

---

[1] Voir *Bulletin*, VII_2, 152.

Janse (*L.-Bz.*). — Sur la partie sphérique du Soleil couverte par la Lune à l'occasion d'une éclipse (suite) [1]. (31-53 et 140-171).

Schoute (*P.-H.*). — Sur une courbe gauche remarquable du septième ordre. (54-65).

La courbe R^7 en question est le lieu des octuples de points d'intersection des couples correspondants de plans de trois faisceaux de plans en involution, qui se trouvent dans une position semi-perspective (c'est-à-dire que les trois axes des faisceaux sont situés dans le même plan et que ce plan fait partie de trois couples correspondants). Cette courbe admet des points d'où elle se projette par un cône du troisième ordre et le nombre de ces points triconiques, en général trois, peut s'élever à cinq. Dans une courbe R^7 à cinq points triconiques, le lieu des points qui séparent harmoniquement un quelconque de ces points triconiques des deux autres points situés sur les arêtes du cône correspondant du troisième ordre est une courbe gauche du quatrième ordre et de première espèce, dont les autres points triconiques de R^7 sont les quatre points biconiques.

De Vries (*J.*). — Sur les équations différentielles partielles linéaires du troisième ordre à trois variables. (66-75).

L'auteur applique la méthode de solution des équations différentielles partielles linéaires du second ordre donnée par Monge aux équations analogues du troisième ordre et en donne quelques exemples.

Benthem (*A.-Gz.*). — La cochléoïde. (76-80)

Étude de la courbe $\rho\varphi = ar \sin\varphi$; solution graphique de la rectification de l'arc de cercle.

Stolp (*C.*). — Le développement des fonctions au moyen de l'intégration par parties. (81-97).

Krantz (*H.-J.*). — Sur la détermination des développantes de courbes planes. (97-103).

Van Zanten (*L.-Jzn*). — Solution d'un problème de Mécanique. (104-106).

L'auteur simplifie la solution du problème de Jullien (*Problèmes de Mecanique rationnelle*, t. II, p. 61, n° 8) donnée par G.-F.-W. Baehr (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 385; 1854).

---

(1) Voir *Bulletin*, VII_2, 151.

Gravelaar (*N.-L.-W.-A.*). — L'emploi des déterminants dans la méthode des moindres carrés. (107-112).

Cardinaal (*J.*). — Quelques propriétés d'un système particulier de surfaces quadriques. (113-130).

L'auteur s'occupe du système triplement infini de surfaces F^2 déterminé par quatre surfaces F^2 inscrites dans une surface F^2 donnée et de quelques propriétés de la surface nodale du système. En passant, il donne la construction des cent vingt-huit surfaces F^2 inscrites dans une surface F^2 donnée et tangentes à quatre surfaces F^2 également inscrites dans cette même surface, problème qu'il reconnaît comme un problème du deuxième ordre.

Cardinaal (*J.*). — Quelques propriétés des surfaces quadriques, qui touchent quatre droites données. (131-139).

L'auteur montre, par des considérations géométriques, que le lieu des tangentes d'une surface F^2, qui s'appuient sur deux tangentes fixes, est composé de deux hyperboloïdes, tandis que les points de contact se trouvent sur deux coniques fixes. Il montre qu'il y a huit surfaces F^2 qui contiennent une conique donnée et qui touchent quatre droites données, etc.

Fischer (*F.-W.*). — Déduction d'une formule utile dans la construction des cadrans solaires. (172-176).

Kapteyn (*W.*). — Sur l'intégration des fonctions rationnelles. (177-180).

Kapteyn (*W.*). — Deux théorèmes de la théorie des déterminants. (180-185).

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur la rectification approximative d'un arc de cercle (suite) [1] (186-193).

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur une déduction inadmissible d'une des formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique. (193-198).

Van den Berg (*F.-J.*). — Un problème arithmétique. (198-202).

Il s'agit de remplacer les fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{9}$ par d'autres fractions équi-

---

[1] Voir *Bulletin*, III_2, 173.

valentes dont le numérateur et le dénominateur sont formés, ensemble, des neuf chiffres, par exemple, $\frac{1}{2}$ par $\frac{93\,27}{186\,54}$, etc.; les nombres des solutions pour $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ est respectivement 12, 2, 4, 12, 3, 7, 46, 3.

Liste par ordre de matières des articles de quelques journaux mathématiques. (203-222).

ARCHIVES NÉERLANDAISES DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES, publiées par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem et rédigées par E.-H. VON BAUMHAUER [1].

Tome XV; 1880.

Engelmann (*Th.-W.*). — Sur les phénomènes électriques du cœur à l'état d'activité. (1-38, 1 pl.).

Disposition des expériences. Résultats : 1. Action générale de la surface du cœur sous l'influence d'excitations directes et indirectes. 2. Particularités relatives à la forme et à la marche successive de l'oscillation. 3. Force électromotrice de l'oscillation excitatoire. 4. Vitesse de propagation de l'onde excitatrice dans le cœur. 5. Détail des expériences.

Buys-Ballot (*C.-H.-D.*). — Sur la marche annuelle de la température en quelques lieux d'Europe et sur la mesure de sa variabilité. (75-112).

Legebeke (*G.-J.*). — Quelques propriétés générales d'une couche matérielle qui a le même potentiel qu'une masse donnée. (113-123).

L'auteur démontre la relation $\int_S P_i\,dm = \int_{S'} P_i\,dm_1$ pour le cas d'une fonction P_i qui dans tous les points intérieurs à S reste finie et continue de même que ses dérivées et satisfait à l'équation $\Delta P_i = 0$. Il en déduit des théorèmes connus (Liouville, Thomson) et en donne des généralisations.

Heringa (*P.-M.*). — Considérations sur la théorie des phénomènes capillaires (suite). [2]. (124-134).

---

[1] Voir *Bulletin*, IV_2, 180.
[2] Voir *Bulletin*, IV_2, 178.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — La charge double d'une distribution centrobarique de masse. (135-147).

Après avoir expliqué comment la distribution centrobarique se compose d'une charge unique et d'une charge double (c'est-à-dire une charge qui contient autant de matière positive que de matière négative), l'auteur étudie la distribution excentrique sur la surface d'une sphère.

Bierens de Haan (*D.*). — Sur la différentiation de quelques intégrales elliptiques par rapport au module ou à une fonction du module. (225-268).

L'application de la méthode de Leibnitz, appelée *differentiatio de curva in curvam,* aux intégrales elliptiques mène l'auteur à une série de nouveaux résultats.

Tome XVI; 1881.

Lorentz (*H.-A.*). — Les équations du mouvement des gaz et la propagation du son suivant la théorie cinétique des gaz. (1-46).

Historique. § 1. Établissement de l'équation fondamentale. § 2. Les équations du mouvement sous leur forme générale. § 3. Première approximation dans laquelle on néglige le frottement interne et la conductibilité calorifique. § 4. La propagation du son. § 5. Déduction plus exacte des équations du mouvement. Frottement interne et conductibilité calorifique.

Baehr (*G.-F.-W.*). — Sur un théorème d'Abel et sur les formules goniométriques qui s'en déduisent. (116-125).

L'auteur déduit quelques identités goniométriques du théorème de la p. 355 du t. I des *Œuvres complètes d'Abel.*

Donders (*F.-C.*). — Sur les systèmes chromatiques. (150-214).

Dans un aperçu historique, l'auteur s'occupe du critérium des couleurs fondamentales. Dans le système chromatique normal, il distingue trois couleurs fondamentales, le rouge, le vert et le violet; ensuite il décrit les trois systèmes anormaux (cécité pour le rouge, le vert ou le violet) et leurs formes de passage comme systèmes dichromatiques.

Gronemann (*H.-J.-H.*). — Recherches sur la nature de la lumière zodiacale. (215-272).

1. Les caractères distinctifs des observations de Jones. 2. Examen et critique de la première partie du Traité de M. Serpieri. 3. Nos propres observations sur la lumière zodiacale. 4. Suite de l'examen et de la critique du Traité de M. Serpieri. 5. Conclusions préliminaires déduites des raisonnements précédents

6. La lumière zodiacale est-elle un phénomène planétaire ou un phénomène terrestre? 7. Conclusion définitive. Supplément.

Legebeke (*G.-J.*). — Sur une propriété des racines d'une équation dérivée. (273-278).

Extension du théorème de Rolle au plan.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Le transport de l'énergie pendant le choc des corps. (303-332).

A. Etablissement des expressions de la vitesse et de l'énergie. B. Répartition de l'énergie cinétique pendant le choc. C. Le transport d'énergie pendant le choc.

Van der Stok (*J.-P.*). — L'influence de la Lune sur le mouvement de l'aiguille aimantée. (333-376, 1 pl.).

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur les relations récurrentes périodiques entre les coefficients du développement des fonctions : plus spécialement entre les nombres de Bernoulli, ainsi qu'entre quelques nombres analogues. (387-443).

L'auteur développe le produit de la norme d'une fonction réelle par sa dérivée logarithmique en série suivant les puissances ascendantes de la variable et trouve dans le cas spécial de la fonction $-\frac{\cot\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}}$ des formules pour les nombres de Bernoulli, etc. Le travail se termine par une énumération des travaux sur les nombres de Bernoulli et une Note contenant une nouvelle démonstration de la formule qui exprime le cosinus du multiple d'un arc en fonction des puissances du cosinus de l'arc lui-même.

Bierens de Haan (*D.*). — Note sur le rôle de nos ingénieurs hollandais dans l'emploi des lignes de niveau. (444-452, 1 pl.).

Tome XVII; 1882.

Michaëlis (*G.-J.*). — Sur les mouvements des fluides sous l'influence du frottement. (1-22).

L'auteur poursuit les considérations théoriques de M. Helmholtz en tenant compte du frottement; à titre d'exemple il étudie le mouvement stationnaire d'un ellipsoïde de révolution qui se déplace dans la direction de l'axe de révolution.

Lorentz (*H.-A.*). — Les formules fondamentales de l'Électrodynamique. (83-100).

L'auteur donne une démonstration nouvelle de la loi la plus générale, qui puisse être admise pour l'action électrodynamique de deux éléments de courants donnés par M. Korteweg (*Journal für Mathematik*, t. XL).

Schols (*Ch.-M.*). — Le calcul de la distance et de l'azimut au moyen de la longitude et de la latitude. (101-167, 1 pl.).

Simplification des méthodes données par M. Helmert dans son manuel, *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*) : A. Énumération des formules. B. Développement des formules.

Lorentz (*H.-A.*). — Sur les mouvements qui se produisent dans une masse gazeuse, sous l'influence de la pesanteur, à la suite de différences de température. (193-219).

Après une courte critique d'un Mémoire de M. Oberbeck et d'un calcul de M. Lorenz, l'auteur, en poursuivant les idées déposées dans son Mémoire antérieur, donne quelques formules pour les mouvements en question, qu'il ne veut avoir regardées que comme une préparation à un traitement plus complet.

Van der Ven (*E.*). — Sur l'effet utile du courant dans les lampes à incandescence. (220-231).

L'examen porte sur trois lampes d'Edison, deux de Swan, deux de Maxim et une de Lane Fox et est exécuté au moyen d'un photomètre du système Evans.

Haga (*H.*). — Détermination des variations thermométriques produites par la tension et le relâchement des fils métalliques et de l'équivalent mécanique de la chaleur. (261-288, 1 pl.).

Historique (Thomson, Joule, Edlund, Rühlmann, Dahlander). I. Variations de la température lors de la traction et du relâchement. *a*. Méthode. *b*. Expériences (fil d'acier et fil de maillechort). II. Coefficients de dilatation des fils à l'état de tension. III. Chaleur spécifique. IV. Calcul de l'équivalent mécanique de la chaleur (résultats, par le fil d'acier : A = 437,8 ; par le fil de maillechort : A = 428,1).

Van Schaik (*W.-C.-L.*). — Recherches concernant la dispersion électromagnétique sur un spectre de grande étendue. (373-390).

Vérification expérimentale des formules existantes pour le spectre ultraviolet.

Rink (*H.-J.*). — Sur quelques applications géométriques simples du théorème d'Abel. (460-478).

Après avoir donné deux démonstrations simples du théorème d'Abel, l'une par rapport au cas d'une cubique coupée par une droite et l'autre générale à l'aide d'un théorème de Jacobi, l'auteur applique ce théorème dans sa forme la plus simple à la solution d'un grand nombre de problèmes sur les cubiques et quartiques planes (STEINER, WIENER, *etc.*).

Tome XVIII; 1883.

Stieltjes (*T.-J.*). — Quelques considérations sur la fonction rationnelle entière d'une variable complexe (1-21).

L'auteur montre que le module d'une fonction rationnelle entière $f(z)$ ne saurait prendre une valeur maximum ou minimum aux points radicaux de l'équation dérivée $f'(z) = 0$; ensuite il s'occupe des domaines limités par des courbes mod. $f(z) = \text{const.}$

Groneman (*H.-J.-H.*). — Sur les périodes de l'aurore boréale; remarques sur l'étude faite sous ce titre par M. le Dr Sophus Tromholt, dans l'annuaire de 1880 de l'Institut météorologique danois. (22-28).

Bueno de Mesquita (*J.*). — Équations générales d'un système de lentilles centrées. (57-69).

Solution des inconnues φ_1, φ_{11} et Φ des formules données par M. Ferraris (*Atti di Torino*, Vol. XVI, 1880).

Van Schaik (*W.-C.-L.*). — Sur la rotation électromagnétique du plan de polarisation. (70-104, 2 pl.).

Aperçu des théories anciennes et nouvelles de la nature des ondulations de la lumière et de la rotation électromagnétique, éclairci par la description de modèles imitant ce mouvement.

Kapteyn (*W.*). — Quelques remarques sur les équations différentielles linéaires ordinaires. (105-126).

D'abord l'auteur cherche les conditions qui expriment que l'équation linéaire du deuxième ordre se transforme en équation à coefficients constants; ensuite, α étant une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, il démontre que $f(\alpha x)$ est en même temps solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre m donnée de $f(x)$, quand les fonctions de x qui forment les coefficients des termes de cette équation satisfont à certaines relations où entre α, etc.

Van Geer (*P.*). — Sur l'emploi des déterminants dans les méthodes des moindres carrés. (127-137) [1].

---

[1] Ce travail, publié d'abord en hollandais dans le *Nieuw Archief voor Wiskunde*, t. IX, p. 180, 1880, a été omis par inadvertance. *Bulletin*, VII$_2$, 151.

Démonstration d'un théorème trouvé par M. Glaisher.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Les équations du mouvement du champ électromagnétique, considérées en rapport avec la théorie de Maxwell. (225-240).

L'auteur s'occupe du cas d'un lieu imparfaitement polarisant et conducteur, cas dont Maxwell ne s'est pas spécialement occupé dans sa théorie de la lumière.

Stieltjes (*T.-J.-Jr.*). — Contribution à la théorie des résidus cubiques et biquadratiques. (358-436).

L'auteur déduit le caractère de 2, $1+i$ et $1+\rho$, où ρ est une des racines cubiques complexes de l'unité, d'une manière entièrement indépendante de la loi générale de réciprocité, bien énoncée par Gauss, mais jusqu'ici pas encore démontrée. A cette fin, il remplace le nombre premier, dont il s'agit de déterminer le caractère, par un produit congruent de facteurs et il détermine le caractère de ces facteurs en suivant la voie pratiquée par Gauss (*Werke*, t. II, p. 78-87) qu'il étend à des nombres complexes. Ainsi il démontre tous les théorèmes que Gauss a trouvés par induction (*art.* 28 du *Mém. cit.*) et dont seulement une partie a été démontrée par M. Lebesgue (*Journal de Liouville*, t. IV, p. 51).

Van Geer (*P.*). — Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius. (453-468).

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN te Amsterdam (2e série). In-8 (1).

Tome XI; 1877.

Van der Waals (*J.-D.*). — Sur l'influence de la pression sur la température de la densité maxima de l'eau. (119-131).

Par des considérations théoriques l'auteur démontre que l'influence en question peut être trouvée quand on connaît les coefficients de compressibilité de l'eau à des températures différentes; en s'appuyant sur la détermination expérimentale de ces coefficients par Grassi, il trouve que la température de la densité maxima diminue quand on augmente la pression. Dans le verre, le volume minimum apparent correspond à la température de 5°,8 sous la pression ordinaire, et à 5° sous une pression de 7 atmosphères, résultat qui a été constaté expérimentalement.

---

(1) Voir *Bulletin*, I_2, 146.

Baehr (*G.-F.-W.*). — Note sur le mouvement elliptique. (241-246).

Quand la force centrale suit la loi de la nature, les trajectoires elliptiques décrites autour du même centre d'attraction avec des vitesses initiales égales mais de directions différentes ont de grands axes égaux; le lieu des sommets est un limaçon. Quand l'attraction est proportionnelle à la distance du centre attirant, l'ellipse est en même temps l'hodographe du mouvement.

Rink (*H.-J.*). — Sur les variations de la résistance galvanique du mercure avec la température. (260-300).

Tome XII; 1878.

Bierens de Haan (*D.*). — Matériaux pour l'histoire des sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas. XII. Adriaan Anthonisz. (1-35). — XIII. Manuscrit de Franciscus van Schooten. (36-61, 1 pl.). — XIV. Josephus Scaliger (J.-C.-Fil.), comme quadrateur de cercles. (62-96). — XV. Adriaan van Roomen. (97-108). — XVI. Jacob Marcelis, Daniel Waeywel et Gillis Bovy. (109-117). — XVII. Deux lettres de Ludolf van Ceulen. (118-126). — Amplifications des Matériaux I-XVII. (127-142). — Liste des livres décrits ou cités dans les Matériaux I-XVII. (143-157). — Corrections. (158-160).

Bosscha (*J.*). — Des lunettes à grossissement variable. (161-168).

L'auteur démontre qu'il est possible de règler les déplacements des trois lentilles de la lunette pancratique de M. Donders [1] les unes par rapport aux autres par le système articulé de Peaucellier de manière que la distance focale de la lunette soit la même dans toutes les positions.

Van der Waals (*J.-D.*). — La chaleur spécifique de la vapeur saturée. (169-184).

Quand on échauffe un volume de vapeur saturée et que l'on diminue le volume de manière que la vapeur reste saturée, on doit soustraire de la chaleur à la vapeur dans le cas de la vapeur d'eau et ajouter de la chaleur à la vapeur dans le cas de la vapeur d'éther. L'auteur cherche à démontrer qu'à ce sujet les vapeurs ordinaires se feront guider généralement par la vapeur d'eau; que cependant la conduite de la vapeur d'éther n'est pas une aberration d'une loi, mais au plus d'une règle observée jusqu'ici, etc.

---

[1] Voir *Bulletin*, IV_2, 178.

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Sur la détermination des distances focales de petites lentilles. (235-256, 1 pl.).

Van Hasselt (*W.*). — Les coefficients magnétiques d'un vaisseau de fer comparés aux résultats des observations. (291-303).

Bierens de Haan (*D.*). — Contribution à la théorie des intégrales définies, n° XIV. — Des intégrales de la forme

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{1+p\sin^2 x\cos^2 x} \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,F(x)\,dx}{1+p\sin^2 x\cos^2 x},$$

où F représente une fonction goniométrique. (325-370).

Bierens de Haan (*D.*). — Sur quelques jeu de dés. (371-400) (¹).

Tome XIII; 1878.

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Théorie de la lunette pancratique de M. Donders (60-91, 1 pl.).

§ 1. Problème de la lunette pancratique. Double solution dont l'une seulement satisfait aux conditions posées. Cette solution donne encore des lunettes de deux constructions différentes. § 2. Déplacement nécessaire de l'objectif ou de l'oculaire pour un déplacement fini de la lentille du milieu, celle-ci étant supposée positive. Distance focale de la lunette entière, si ce déplacement de l'objectif ou de l'oculaire n'a pas lieu. § 3. Considérations sur le cas où, pour les deux limites du grossissement, la longueur de la lunette est supposée la même. § 4. Solution du problème, lorsqu'on emploie l'oculaire pour corriger la distance focale. § 5. Solution du problème en employant l'objectif pour corriger la distance focale. § 6. Limite supérieure de F. § 7. Lunette pancratique à lentille du milieu négative. Solution du problème. Limite inférieure de f. § 8. Limite supérieure de f. § 9. Exemple de calcul. § 10. Épaisseur des lentilles. § 11. Déduction plus simple des équations principales du problème. § 12. Solution plus simple, en négligeant le déplacement de l'objectif ou de l'oculaire. § 13. Lieu des diaphragmes internes ou externes. § 14. La lunette pancratique peut-elle être construite achromatiquement?

Bierens de Haan (*D.*). — Rapport sur les travaux de M. Edward Sang, par rapport aux tables des sinus de chaque dix-millième partie d'un angle droit, calculés jusqu'à 33° en vingt-cinq décimales. (92-95).

Schoute (*P.-H.*). — Quelques considérations par rapport au

(¹) Voir *Bulletin*, IV, 172 et 173.

nombre maximum des points multiples d'une courbe plane algébrique. (96-138).

Dans tous les manuels, le nombre maximum des points doubles d'une courbe C^n est trouvé au moyen d'une courbe auxiliaire C^{n-2} ou C^{n-1}. Mais la démonstration qu'une courbe auxiliaire d'un autre ordre ne saurait mener à un maximum plus petit que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ n'est pas encore donnée. Car la démonstration originale de J. Plücker (*Theorie der algebraïschen Curven*, p. 215; Bonn, 1839) est inadmissible, parce que Plücker a cherché la valeur p de l'ordre de la courbe auxiliaire qui correspond à la plus grande valeur du nombre maximum des points doubles, tandis que le problème exige que l'on détermine la valeur de p qui rend minimum ce nombre maximum. L'auteur démontre que cette valeur minimum est obtenue au moyen d'une courbe auxiliaire, dont l'ordre p diffère autant que possible de $n - \frac{3}{2}$ et que les limites du problème n'admettent que les valeurs $n - 2$ et $n - 1$ de p, qui mènent au même nombre maximum des points doubles. Ensuite, il s'occupe du plus grand nombre des points de multiplicité k d'une courbe C^n et termine son travail par des théorèmes et des problèmes qui se rapportent en général à des courbes C^n du genre zéro.

Baehr (*G.-F.-W.*).— Note sur l'attraction. (145-160).

D'abord l'auteur cherche l'équation différentielle des surfaces, dont les normales représentent pour un de leurs points d'intersection avec un ellipsoïde homogène de révolution la résultante de l'attraction exercée sur ce point par l'ellipsoïde et il trouve que la famille des surfaces qui correspond à cette équation différentielle contient un ellipsoïde de révolution concentrique et coaxiale à l'ellipsoïde donné; de plus, il démontre que la distance d'un point de l'ellipsoïde donné au pied de la normale correspondante est proportionnelle à l'attraction. Ensuite l'auteur s'occupe de l'attraction exercée par le tore sur un point de son axe qu'il réduit à des intégrales elliptiques.

Mees (*R.-A.*). — Sur la théorie du radiomètre. (265-341).

L'auteur donne une critique : 1° de la théorie de vaporisation d'Osborne Reynolds et de la théorie d'émission de Zöllner; 2° des théories qui expliquent l'action des rayons de lumière par des courants de gaz; 3° des théories d'Osborne Reynolds, de Johnstone Stoney, etc., qui expliquent l'action par la théorie cinétique des gaz et finit par l'exposition de ses propres idées.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Sur une détermination simple de la fonction caractéristique. (342-355).

Détermination de la fonction caractéristique en trois cas simples : 1° pour le mouvement d'un point matériel libre sous l'influence de la pesanteur; 2° pour le mouvement d'un point matériel libre autour d'un centre d'attraction; 3° pour le mouvement d'un point pesant sur la surface d'une sphère.

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Sur les orbites annuelles que les étoiles

semblent parcourir à cause de l'aberration de la lumière. (356-367, 1 pl.).

L'auteur démontre que les orbites en question sont des cercles, même quand on tient compte de l'excentricité de l'orbite terrestre, etc.

Tome XIV; 1879.

Ryke (*P.-L.*). — Le microphone. (1-26).

Buys-Ballot (*C.-H.-D.*). — Comment déterminera-t-on les quantités de vapeur d'eau produites par un *polder?* (27-51).

Mees (*R.-A.*). — Détermination de la compressibilité de l'eau suivant la méthode de Jamin et à l'aide du manomètre de Regnault. (108-132, 1 pl.).

Bierens de Haan (*D.*). — L'équation intégrante. (162-179).

L'auteur démontre que l'équation différentielle linéaire du second ordre et d'un ordre supérieur ne peut pas être intégrée au moyen du facteur intégrant; il s'occupe chemin faisant de l'intégration de quelques cas simples de l'équation du second ordre.

Bierens de Haan (*D.*). — Matériaux pour l'histoire des sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas. XVIII. Martinus Carolus Creszfeldt. (180-187).

Baehr (*G.-F.-W.*). — Sur le principe de la moindre action. (232-250).

L'auteur démontre le principe et en donne des applications différentes en cherchant des courbes qui engendrent des surfaces minima, des courbes brachistochrone, etc.

Schoute (*P.-H.*). — Quelques considérations générales sur les courbes gauches. (251-319).

Formules de Plücker-Cayley. Les courbes situées sur une surface réglée du second ordre. Remarques sur le nombre des points doubles apparents et sur la classification des courbes gauches. Étude des surfaces gauches $S(1, 2, 3)$, $S(1^2, 2)$ et $S(1^3)$, dont la première est le lieu des droites qui s'appuient sur trois courbes gauches données, la seconde le lieu des cordes d'une courbe gauche donnée qui s'appuient sur une autre et la troisième le lieu des cordes triples d'une courbe gauche donnée. L'étude se termine par l'indication de deux corrections qui doivent être apportées au Mémoire antérieur de l'auteur, dont l'une

lui a été communiquée par M. F.-J. van den Berg, tandis que l'autre est le résultat d'une correspondance de M. E. Dewulf avec l'auteur ([1]).

Van den Berg (*F.-J.*). — Déduction de quelques identités algébriques et goniométriques semblables. (340-359).

En s'appuyant sur les propriétés d'un déterminant, l'auteur déduit quelques identités remarquables entre n quantités α et n quantités β, par exemple l'extension de la relation donnée par Chasles (*Géométrie superieure*, p. 229-230; 1852).

Tome XV; 1880.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — La charge double d'une distribution centrobarique de masse. (38-50) ([2]).

Van der Waals (*J.-D.*). — La relation entre la pression, le volume et la température d'une matière en dissociation. (199-217).

La déduction de la formule désirée a été fondée par M. Willard Gibbs sur le théorème suivant également trouvé par lui :

« Pour l'équilibre d'un système isolé, il est nécessaire et suffisant que dans tous les changements du système, qui n'affectent pas son énergie, l'accroissement de l'entropie du système est zéro ou une quantité négative. »

L'auteur parvient à la même formule, sans se servir de ce théorème. Ensuite l'auteur applique cette formule au problème de la séparation partielle des molécules, au problème de la vaporisation et à un problème plus compliqué de dissociation.

Mees (*R.-A.*). — Sur la méthode de Jamin pour la détermination de la compressibilité des liquides. (218-230).

L'auteur démontre que la méthode de Jamin si simple en apparence n'est guère plus excellente que celle de Regnault.

Lorentz (*H.-A.*). — Les équations du mouvement des gaz et la propagation du son suivant la théorie cinétique des gaz. (350-393) ([3]).

Mees (*R.-A.*). — Sur la propagation des ondes sonores planes dans les gaz suivant la théorie cinétique des gaz (394-425).

([1]) Voir *Bulletin*, III_1, p. 383-400, et *Nouv. Ann.*, p. 401; 1881.
([2]) Voir plus haut, p. 61.
([3]) Voir plus haut, p. 61.

Dans la première partie l'auteur étudie le mouvement des ondes sonores planes suivant la méthode dont Clausius s'est servi dans son Mémoire sur la conduction de la chaleur à travers les gaz. Dans la seconde partie, il examine à quel titre l'état de mouvement, qui a servi pour point de départ dans la première partie, s'entretient lui-même.

Van der Waals (*J.-D.*). — Sur la compressibilité de l'éthylène. (426-432).

Schoute (*P.-H.*) — Sur une transformation géométrique d'un problème de la théorie des enveloppes dites *courbes de sûreté* et sa généralisation. (435-444) (1).

Tome XVI; 1881.

Bierens de Haan (*D.*). — Matériaux pour l'histoire des Sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas. XIX. Premier usage des isohypses par les ingénieurs hollandais. — N.-S. Cruquius. — M. Bolstra (1-27, 1 pl.). XX. Précurseurs des cartes marines. — Les cartes marines de Willem Jansz Blaeu. (28-44, 1 pl.).

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur les relations récurrentes périodiques entre les coefficients du développement des fonctions : plus spécialement entre les nombres de Bernoulli ainsi qu'entre quelques nombres analogues. (74-176) (2).

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Communication par rapport aux constellations dont les habitants de Java conseillent la hauteur à un moment déterminé de la nuit à l'usage de l'Agriculture. (177-194).

Baehr (*G.-F.-W*). — Sur un théorème d'Abel et sur les formules goniométriques qui s'en déduisent. (195-204) (3).

Compte rendu sur l'essai des paratonnerres, par MM. Bosscha, Van der Waals et Grinwis. (215-222).

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Le transport de l'énergie pendant le choc des corps. (244-273) (4).

---

(1) Voir *Bulletin*, VI_2, p. 175.
(2) Voir plus haut, p. 62.
(3) Voir plus haut, p. 61.
(4) Voir plus haut, p. 62.

Schols (*Ch.-M.*). — Sur la jonction d'un réseau triangulaire d'un ordre inférieur à un réseau triangulaire d'un ordre supérieur. (297-349, 4 pl.).

L'auteur démontre que la méthode du déplacement parallèle due à M. Gleuns en usage aux Pays-Bas fait subir aux angles une variation assez considérable. Ensuite, il propose une méthode plus rationnelle, la méthode de la transformation conforme, qui jouit de la propriété que les carrés des variations des angles ont une somme minima.

Tome XVII; 1882.

Oudemans (*A.-C.-Jr.*). — Sur la densité et le coefficient de dilatation du diéthylamine. (1-20).

Kapteyn (*W.*). — Sur la forme et les intégrales de quelques expressions différentielles, dont les intégrales sont des fonctions algébriques. (93-128).

L'auteur s'occupe de l'intégrale $\int \sqrt[q]{F(x)}\, dx$, où q représente un nombre entier et $F(x)$ une fonction rationnelle. Il cherche la forme la plus générale de $F(x)$ qui mène à une intégrale purement algébrique. Ensuite, il examine les cas où l'expression

$$(x-\alpha)^m(\beta+\gamma x+\ldots+\lambda x^n)^p$$

est réductible à cette fonction et il achève totalement cette réduction dans les deux cas particuliers de la fonction

$$x^m(a+bx^n)^p$$

et la fonction

$$x^m(a+bx^n+cx^{2n})^p.$$

Michaëlis (*N.-Th.*). — Poutres de pont secondaires à bord supérieur peu courbé et à soutiens en fer battu. (129-139, 1 pl.).

Lorenz (*H.-A.*). — Les formules fondamentales de l'électrodynamique. (144-161) (1).

Lorenz (*H.-A.*). — Sur les mouvements qui se produisent dans une masse gazeuse, sous l'influence de la pesanteur, à la suite de différences de température. (179-205) (2).

---

(1) Voir plus haut, p. 63.
(2) Voir plus haut, p. 63.

Haga (*H.*). — Détermination des variations thermométriques produites par la tension et le relâchement des fils métalliques et de l'équivalent mécanique de la chaleur. (211-239, 2 pl.) (1).

Stieltjes (*T.-J.-Jr.*). — Sur la formule d'interpolation de Lagrange. (239-254).

L'auteur déduit le reste simplifié de la formule d'interpolation sans faire usage des ressources du Calcul intégral.

Compte rendu sur l'érection de paratonnerres sur les édifices gouvernementaux de Médemblik, par MM. Bosscha, Van der Waals et Grinwis. (255-260).

Stieltjes (*T.-J.-Jr.*). — Contribution à la théorie des résidus cubiques et biquadratiques. (338-417) (2).

Tome XVIII; 1883.

Schols (*Ch.-M.*). — Le calcul de la distance et de l'azimut au moyen de la longitude et de la latitude. (1-70, 1 pl.) (3).

Kapteyn (*W.*). — Quelques remarques sur les équations différentielles linéaires ordinaires. (95-117) (4).

Compte rendu sur la crémation. (202-217).

Bierens de Haan (*D.*). — Matériaux pour l'histoire des sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas. XXI. Corneille Saskerz van Leeuwen. — Abraham de Graaf. (218-276). XXII. Jean-Henri Jarichs van der Ley. (277-301).

Schols (*Ch.-M.*). — Sur la jonction d'un réseau triangulaire d'un ordre inférieur à trois points d'un réseau triangulaire d'un ordre supérieur. (303-325, 1 pl.).

---

(1) Voir plus haut, p. 63.
(2) Voir plus haut, p. 65.
(3) Voir plus haut, p. 63.
(4) *Voir* plus haut, p. 64.

L'auteur démontre que, dans le cas simple de trois points de jonction, les angles du réseau secondaire subissent des variations qui sont proportionnelles aux projections des côtés opposés suivant une direction constante. Il fait voir que, dans ce cas, la méthode de transformation conforme peut être remplacée par des considérations plus simples.

Bueno de Mesquita (*J.*). — Équations générales d'un système centré de lentilles. (329-342).

L'auteur résout les équations données par M. Ferraris par rapport à la distance focale de la première lentille et celle du système entier. Ensuite, il applique les formules générales au cas de quatre lentilles.

Korteweg (*D.-J.*). — Théorèmes généraux par rapport au mouvement stationnaire d'un liquide incompressible et frottant. (343-359).

L'auteur démontre cinq théorèmes qui se rapportent au travail de frottement.

Compte rendu par rapport au choix d'un premier méridien. (391-394).

Tome XIX; 1884.

Bierens de Haan (*E.*). — Matériaux pour l'histoire des sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas. XXIII. Corneille Sackersz van Leeuwen. — Claes Heynderichsz Gietermaker. — Christian Martinii Anhaltin. (1-38). XXIV. Deux Ouvrages rares de Benedictus Spinoza (*Calcul algébrique de l'arc-en-ciel,* 1687; *Calcul des chances*). (78-84). XXV. De Thiende (Le dixième). — Les Ouvrages de Simon Stevin. (249-295).

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Les équations du mouvement du champ électromagnétique, considérées en rapport avec la théorie de Maxwell. (44-59) (¹).

Stieltjes (*T.-J.-Jr.*). — Sur la décomposition quadratique des nombres premiers de la forme $3n+1$. (105-111).

(¹) Voir plus haut p. 65.

Dans la décomposition unique de la forme $a^2 + 3b^2$ d'un nombre premier p, la racine a est le reste de la division de p par $2^{n-1}\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1.2\ldots n}$, ce reste pris entre les limites $-\frac{1}{2}p$ et $+\frac{1}{2}p$.

Mees (*R.-A.*). — Résultats des observations avec le piézomètre. (137-193, 1 pl.).

Description de l'appareil employé. Trois séries différentes d'observations selon que la pression règne : *a*, dans l'intérieur, *b*, dans l'extérieur et *c*, à la fois dans l'intérieur et dans l'extérieur du vase piézométrique. L'auteur démontre que les résultats sont d'accord avec la théorie de l'élasticité d'abord en s'appuyant sur les formules de Lamé, ensuite en faisant usage des considérations de Regnault et de Grassi. Il termine son travail par la discussion de l'action retardataire du verre.

Lorenz (*H.-A.*). — L'action d'un aimant sur un courant électrique découverte par Hall et la rotation électromagnétique du plan de polarisation de la lumière. (217-248).

L'auteur considère l'action en question dans la lumière de quelques théorèmes généraux sur la nature des forces naturelles. Il en donne une description mathématiques et s'occupe ensuite de l'influence du magnétisme sur le mouvement de la lumière.

Compte rendu sur la question s'il est souhaitable et possible de faire des observations régulières des phénomènes du tremblement de terre aux Pays-Bas. (296-306).

Le Paige (*C.*). — Sur les surfaces du troisième ordre. (328-348).

L'auteur développe les méthodes de construction d'une surface du troisième ordre, définie par dix-neuf points, qu'il a indiquées rapidement aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (1).

Compte rendu sur l'observation du passage de Vénus le 6 décembre 1882 à Curaçao, par P.-H. Brocx. (372-380, 1 pl.).

De Boer (*F.*). — Extension du théorème de Rolle. (384-416).

En posant $f(z) = f(x+iy) = X + iY = Re^{i\Phi}$, l'auteur s'occupe d'abord des courbes $R = \alpha$, $\Phi = \beta$, $X = \gamma$, $Y = \delta$, où α, β, γ, δ représentent des constantes. Pour le cas d'une équation algébrique $f(z) = 0$ de l'ordre n et quand les ra-

(1) *Voir* t. XCVII, p. 34 et 158.

cines de $f(z) = 0$ et de l'équation dérivée $f'(z) = 0$ sont toutes différentes, il démontre entre autres les théorèmes suivants, dont quelques-uns ont été donnés par MM. Van den Berg, Legebeke et Stieltjes [1] :

« 1° Chaque branche fermée d'une courbe $R = \alpha$, qui entoure p racines de $f = 0$, entoure $p - 1$ racines de sa dérivée.

2° Il y a $n - 1$ courbes $\Phi = \beta$, qui joignent généralement deux points racines de $f = 0$ d'une telle manière que toutes ces courbes forment un entier cohérent sans un seul contour fermé. Chacune de ces courbes $\Phi = \beta$ passe par un des points de $f' = 0$ (extension du théorème de Rolle). Et quand par hasard une de ces courbes se termine à un point racine de $f' = 0$ au lieu d'un point racine de $f = 0$, cette courbe est normale en ce point à la courbe Φ qui contient ce point racine de $f' = 0$. Ou bien, autrement :

3° Il y a $2n - 2$ courbes limitées $\Phi = \beta$, qui joignent une racine de $f = 0$ à une racine de $f' = 0$ ou bien deux racines de $f' = 0$ entre elles, de manière qu'elles forment un entier cohérent sans un seul contour fermé. Aux points racines de $f' = 0$ deux de ces courbes Φ forment l'allongement l'une de l'autre. S'il passe une troisième courbe Φ par un de ces points, elle est normale aux deux autres et s'il y passe encore une quatrième, ces quatre courbes y forment une croix rectangulaire. Dans les suppositions énoncées, il est impossible qu'il passe plus de quatre courbes Φ par un point racine de $f' = 0$. Si quelques-unes des courbes Φ sont dans l'allongement l'une de l'autre, on trouve un nombre impair de points racines de $f' = 0$ entre deux points racines de $f = 0$.

4° Chaque branche de la courbe $X = \gamma$, qui ne passe pas par un point racine de $f' = 0$, est coupée une fois par chaque courbe $Y = \delta$ et réciproquement.

5° Chaque courbe $X = \gamma$ ou $Y = \delta$, qui ne passe pas par un point racine de $f' = 0$ est composée de n branches qui partagent le plan en $n + 1$ parties; le nombre des points racines de $f' = 0$ situés dans une quelconque de ces parties est égal au nombre des branches limitantes moins un.

6° Si l'on joint deux à deux les points racines de $f = 0$ par des droites, les points racines de $f' = 0$ se trouvent à l'intérieur du polygone formé.

7° Le centre de gravité des points racines de $f = 0$ coïncide avec le centre de gravité des points racines de $f' = 0$, de $f'' = 0$, etc.

Ensuite, l'auteur indique les changements que ces théorèmes doivent subir dans le cas d'une $f' = 0$ à deux racines égales. Et, après l'application des théorèmes à l'équation $z^3 - 3a^2z + B = 0$, le travail est terminé par une démonstration plus simple des théorèmes au moyen de la théorie de Riemann et par un appendice contenant la littérature du sujet.

Schoute (*P.-H.*). — Sur une courbe particulière du quatrième ordre à trois points doubles. (420-431, 1 pl.).

Un aperçu de ce Mémoire a paru dans le *Bulletin* [2].

---

[1] Voir *Bulletin*, VII_2, p. 150 et plus haut, pp. 62 et 64.

[2] Voir *Bulletin*, t. VIII_1, p. 278-280.

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON.

Vol. 172; 1881.

Niven. — Sur l'induction des courants dans les plaques indéfinies et les surfaces sphériques. (307-353).

L'Auteur, en s'inspirant des idées exposées par Maxwell dans un Mémoire inséré au t. XX des *Proceedings of the Royal Society,* établit les équations générales du mouvement et étudie le cas particulier d'une plaque indéfinie d'une épaisseur finie ou infiniment petite et celui d'une surface sphérique.

Spottiswoode. — Sur les quarante-huit coordonnées d'une cubique gauche. (375-386).

Ces *coordonnées* sont les analogues des six coordonnées pluckériennes d'une droite. Dans un Mémoire antérieur (*Transactions of the London Mathematical Society*, 1879) l'auteur a donné les vingt et une coordonnées d'une conique. Pour une cubique gauche, les quatre équations des perspectives de la courbe sur les quatre plans du tétraèdre de référence sont de la forme $UP' - U'P = 0$, les quantités U, U' étant des formes quadratiques ternaires, les quantités P, P' étant des expressions linéaires à trois variables; dans les six quantités U, U' entrent quarante-huit coefficients qui sont les coordonnées de la cubique, liées d'ailleurs par une série d'identités que développe l'auteur. Quant aux coefficients des quantités P, P', ..., ils sont compris dans les coefficients des quantités U, U', ...

Darwin. — Sur le frottement dû aux marées pour une planète attirée par divers satellites et sur l'évolution du système solaire. (494-535).

I. Théorie du frottement dû aux marées pour une planète soumise à l'attraction d'un nombre quelconque de satellites.

§ 1. Établissement et limitation du problème.
§ 2. Formation et transformation des équations différentielles.
§ 3. Méthode pour la résolution des équations au moyen de séries.
§ 4. Solution graphique dans le cas où il n'y a pas plus de trois satellites.
§ 5. Solution graphique dans le cas de deux satellites.

II. Discussion des effets dus aux marées; application à l'évolution du système solaire.

§ 1. Considérations générales sur le problème présenté par le système solaire.
§ 2. Données numériques; déductions de ces données.
§ 3. Sur la part due au frottement des marées dans l'évolution du système solaire.
§ 4. Discussion générale et résumé.

Hicks. — Sur les fonctions toroïdales. (609-652).

On sait que Riemann a laissé quelques pages sur le potentiel d'un tore; elles pourraient être regardées comme le point de départ des recherches de M. Hicks, qui toutefois ne les a connues qu'après l'achèvement de son travail, ainsi que le Mémoire de M. Schmidt intitulé : « *Allgemeine Lösung des Problemes über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers welcher von irgend zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt ist,* où se trouvent employées des coordonnées analogues à celles dont il se sert, mais toutefois avec des méthodes très différentes.

Les fonctions introduites par M. Hicks jouent le même rôle par rapport au tore que les fonctions sphériques par rapport à la sphère; elles tirent leur origine de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2\psi}{du^2} - n^2\psi + \frac{4m^2-1}{4\,\mathrm{sh}^2 u}\psi = 0,$$

où sh désigne un sinus hyperbolique, et qui provient elle-même de l'équation de Laplace; n est l'ordre de la fonction, m en est le rang. Pour m nul on a les « *zonal toroïdal functions* »,

$$\psi = \sqrt{\mathrm{sh}\,u}\,\mathrm{P};$$

on ramène l'étude à celle des fonctions sphériques à argument imaginaire et d'ordre $\frac{2n+1}{2}$. Cette étude est faite avec détail par l'auteur, qui complète sur ce point les indications données par Heine dans le *Handbuch der Kugelfunctionen.* Le cas où dans l'équation (1) n est nul fournit les « *sectorial functions* ». Dans le cas général, on a les « *tesseral functions* ». Enfin l'auteur applique les résultats de son travail à la recherche du potentiel d'un tore et à quelques questions qui s'y rattachent.

Rowe. — Mémoire sur le théorème d'Abel. (713-750).

Cayley. — Addition au Mémoire de M. Rowe. (751-758).

Le travail de M. Rowe est un intéressant remaniement du célèbre Mémoire d'Abel « *Sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes* »; l'auteur montre comment, par quelques modifications apportées à l'ordre adopté par Abel, par l'emploi de meilleures notations, et enfin par l'usage d'un théorème dû à Boole, on peut singulièrement faciliter la lecture du Mémoire d'Abel.

La première Partie contient l'étude du théorème fondamental et son application aux fonctions circulaires et elliptiques. Dans la seconde Section l'auteur montre comment la somme d'un nombre quelconque d'intégrales peut s'exprimer au moyen d'un nombre fini de ces intégrales et cherche quelle est la plus petite valeur p que l'on puisse attribuer à ce nombre; dans la dernière Section on s'occupe en particulier du cas où la fonction algébrico-logarithmique du second membre se réduit à une constante.

Enfin M. Rowe a dressé une liste complète des *errata* du Mémoire d'Abel. L'addition de M. Cayley consiste à montrer comment, en se plaçant au point de

vue de M. Rowe, on peut retrouver la signification géométrique du nombre p (*genre, deficiency*).

Glaisher. — Sur l'équation de Riccati et des transformations; sur certaines intégrales définies qui vérifient cette équation. (759-828).

En partant de l'équation de Riccati écrite sous la forme

$$(2) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} - a^2 u = \frac{p(p+1)}{x^2} u,$$

et en essayant d'y satisfaire au moyen de séries de forme

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} A_r x^{m+r}, \quad e^{\pm ax} \sum_{r=0}^{r=\infty} B_r x^{m+r},$$

on trouve six solutions de cette équation, et les relations entre ces solutions, lorsque p n'est pas entier, s'obtiennent sans difficulté; lorsque p est entier, on trouve parmi les quatre dernières séries deux qui sont limitées, en sorte que l'on a ainsi obtenu, sous forme finie, les intégrales de l'équation de Riccati; mais il est aisé de voir qu'au lieu de limiter les séries on peut, après quelques termes nuls, les recommencer en quelque sorte de manière à satisfaire encore à l'équation différentielle. M. Glaisher fait observer qu'en adoptant ces solutions les relations qu'il a établies antérieurement entre les six intégrales subsistent et que, au contraire, ces relations changent de forme quand on adopte, comme il est naturel de le faire, les solutions finies.

Relativement à ces solutions sous forme finie, M. Glaisher montre encore que, si p est un entier positif, le coefficient de h^{p+1} dans le développement de

$$e^{a\sqrt{x^2+xh}},$$

suivant les puissances ascendantes de h, vérifie l'équation (1).

L'auteur traite encore des intégrales définies

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^m}} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{(a^2+x^2)^n} dx,$$

dont la seconde vérifie l'équation (1), tandis que la première satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 v}{dz^2} - a^2 z^{2q-2} v = 0,$$

qui s'en déduit par une transformation facile; il en exprime les valeurs au moyen de séries; on a par exemple, lorsque n n'est pas entier,

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left[1+\frac{n-1}{n-1}\frac{(2a)}{1}+\frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)}\frac{(3a)^2}{1.2}+\ldots\right]e^{-2a}$$
$$+\frac{a^n}{2}\Gamma\left(\frac{-n}{2}\right)\left[1+\frac{n+1}{n+1}\frac{2a}{1}+\frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\frac{(2a)^2}{1.2}+\ldots\right]e^{-2a};$$

quand n est un entier positif impair, on devra limiter la première série, en s'arrêtant dès qu'on trouve en numérateur un facteur nul et supprimer la seconde série; c'est le contraire si n est un entier négatif impair.

L'auteur donne ensuite de nombreuses solutions symboliques de l'équation (1); il montre comment on peut relier entre elles les diverses solutions de cette nature qui ont été données par MM. Ellis, Boole, Lebesgue, Hargreave, Williamson, Donkin, etc. Enfin il montre comment les résultats précédemment obtenus se lient aux fonctions de Bessel : l'équation de Bessel

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) w = 0$$

se déduit en effet de l'équation (1) par la substitution simple

$$u = x^{\frac{1}{2}} w, \quad p + \frac{1}{2} = n, \quad a^2 = -1.$$

NACHRICHTEN VON DER K. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN UND DER GEORG-AUGUSTS-UNIVERSITATS.

Année 1876.

Dillner (*Göran*). — Développement de formules pour le théorème d'Abel. (29-50).

Dans son Mémoire, *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques* (*Œuvres complètes d'Abel*, 1re édition, t. I, p. 335), Abel a appliqué, pour établir le théorème de l'addition, une méthode qui s'étend facilement au cas d'un radical quelconque. Les résultats ainsi obtenus ne forment qu'un cas particulier du grand théorème qu'Abel a traité dans le Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris; mais les formules que l'on trouve offrent en elles-mêmes assez d'intérêt.

Schubert (*Hermann*). — Solution du problème des tangentes à contact du quatrième ordre relativement à une surface du $n^{\text{ième}}$ ordre et de problèmes analogues. (89-99).

Résultats de géométrie énumérative obtenus par les méthodes de Chasles et par les procédés propres à l'auteur.

Riecke (*Eduard*). — Sur le mouvement de l'électricité dans les corps conducteurs et en particulier dans une sphère conductrice. (224).

Bjerkness (*C.-A.*). — Sur les pressions qui résultent des mouvements périodiques accompagnés de contractions et de dilatations de plusieurs corps sphériques situés dans un liquide. (245-288).

Les résultats de Bjerkness sont maintenant du domaine public. Les considérations mathématiques qui leur servent de base ont été depuis 1876 publiées d'une façon plus complète, par exemple dans les *Acta mathematica* (1884).

Riecke (*Eduard*). — Sur la théorie de l'induction unipolaire et des recherches de Plücker. (332-352).

Hurwitz (*A.*) et *Schubert* (*H.*). — Sur le théorème $\alpha\mu + \beta\nu$ de Chasles. (503-517).

Dans les *Comptes rendus* du 4 septembre 1876, Halphen publiait une Note intitulée : *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques;* il y mettait en doute le théorème de Chasles, disant que le nombre des coniques du système (μ, ν) satisfaisant à la nouvelle condition z est toujours de la forme

$$\alpha\mu + \beta\nu,$$

α et β étant des coefficients qui dépendent uniquement de la condition nouvelle z. Halphen cherchait des exemples où cette proposition n'ait pas lieu. Schubert et Hurwitz veulent dans cette Note donner une démonstration de ce théorème.

Enneper (*A.*). — Remarques sur quelques surfaces à courbure constante. (597-619).

Dans les deux Mémoires suivants :

Kretschmer. — *Beiträge zur Theorie der Flächen mit ebenen Krümmungslinien welche gegebenen Bedingungen genügen.*
Programm der Gymnasii zu Frankfurt a. O. 1871.
Simon. — *Ueber Flächen mit constanten Krümmungsmaass. Inaugural-Dissertation.* (*Halle,* 1876),

il n'y a, d'après Enneper, aucun résultat nouveau différent de ceux auxquels il était arrivé et qu'il avait présentés et publiés en 1868 dans les *Gött. Nach.*

Année 1877.

Réthy (*Moritz*). — Complément à la théorie des phénomènes de réfraction. (73-88).

Thomæ (*J.*). — Sur l'identité

$$\int_u^v \frac{\sqrt[3]{v_1 - v}\, dz}{\sqrt[3]{(z-u)(z-u_1)(z-v)^2(z-v_1)^2}} + \int_u^v \frac{\sqrt[3]{u_1 - u}\, dz}{\sqrt[3]{(z-v)(z-v_1)(z-u)^2(z-u_1)^2}} = 0.$$

(223-228).

Schiötz (*O.-F.*). — Recherches sur l'attraction et la répulsion apparente des corps qui se meuvent dans un liquide. (291-310).

Bjerkness (*C.-A.*). — Remarque sur le Mémoire précédent. (310-312).

Enneper (*A.*). — Remarques sur quelques transformations de surfaces. (369-396).

L'auteur part d'une propriété commune à plusieurs transformations connues de surfaces. Voir :

Hirst. — *Sur la courbure d'une série de surfaces et de lignes.* (*Annali di Matematica*, t. II, p. 95-112 et p. 138-167; 1859).

Cayley. — *Sur la surface qui est l'enveloppe des plans conduits par les points d'un ellipsoïde perpendiculairement au rayon mené par le centre* (*Annali di Matematica*, t. II, p. 168-179; 1859).

Lettres de Thomson à Liouville (*Journal de Liouville*, t. X, p. 364, 1845; t. XII, p. 265, 1847).

Note de Liouville, (*Journal de Liouville*, t. XII, p. 265-290).

Catalan. — *Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes.* (*Mémoire de l'Académie de Belgique*, t. XXXVIII, 1871, et *Bulletin de l'Académie de Belgique*, t. XXVII_2, p. 129-142).

Enneper prend la définition plus générale suivante : Les points correspondants P et P_1 des deux surfaces S et S_1 se correspondent relativement à un point fixe O, de telle sorte que le plan passant par O, P et P_1 contienne les normales aux surfaces S et S_1 respectivement aux points P et P_1.

Schubert (*H.*). — Extensions géométriques du théorème fondamental de Bézout. (401-426).

Année 1878.

Fuchs (*L.*). — Sur une classe d'équations différentielles qui sont

intégrables par les fonctions elliptiques ou abéliennes. (19-32).

L'équation différentielle de Lamé

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y$$

a été, après les travaux de Lamé, l'objet des recherches de Heine. Mais jusqu'ici on s'était borné au cas des valeurs de h pour lesquelles l'équation différentielle était intégrable par les fonctions doublement périodiques. Hermite s'est proposé d'effectuer l'intégration pour des valeurs quelconques de h [*Sur quelques applications des fonctions elliptiques.* (*Comptes rendus,* 15 octobre, 1877 et suivants)]. L'auteur croit donc devoir revenir sur une classe d'équations différentielles linéaires du second ordre, qu'il a intégrées au moyen des fonctions abéliennes ou elliptiques (*Journal de Crelle,* t. 81, p. 116-118, n° 13) et dont l'équation de Lamé et aussi les équations différentielles auxquelles satisfont, d'après Heine, les fonctions de Lamé d'ordre supérieur (*Journal de Crelle,* t. 60, p. 252) ne sont que des cas particuliers.

Petersen (*Julius*). — Démonstration d'un théorème concernant l'intégration des expressions différentielles algébriques et des équations différentielles algébriques sous forme finie. (68-88).

Kiepert (*L.*). — Sur la résolution des équations du cinquième degré. (424-430).

Les recherches de Klein, de Brioschi et de Gordan :

Klein. — *Recherches complémentaires sur l'icosaèdre* (*Mathematische Annalen,* t. XII, p. 503-560);

Brioschi. — *Sur la résolution des équations du cinquième degré* (*Mathematische Annalen,* t. XIII, p. 109-160);

Gordan. — *Sur la résolution des équations du cinquième degré* (*Mathematische Annalen,* t. XIII, 375-404),

ont conduit l'auteur à s'occuper de cette question et, au lieu de prendre pour base de ses recherches les formules de Jerrard-Hermite, il arrive, en employant la fonction de Weierstrass $p(u)$, par une voie plus rapide, au résultat cherché.

Thomæ (*J.*). — Théorèmes de la théorie des fonctions. (466-468).

Dans le *Journal de Crelle* (t. 84), Cantor a montré dans une étude intéressante sur la théorie des ensembles comment on peut faire correspondre univoquement un ensemble continu et linéaire à n dimensions et un espace continu à m dimensions, à la condition que la correspondance ne soit pas continue. Cette condition est nécessaire. Lüroth a essayé de le démontrer (*Sitzb. der phys. medic. Societät zu Erlangen,* 8 juillet 1878). Thomæ présente une nouvelle démonstration en faisant appel à quelques considérations d'*Analysis Situs* dans un espace d'un nombre quelconque de dimensions.

Enneper (*A.*). — Sur une équation entre les fonctions Θ. (550-556).

Dans les *Comptes rendus* (t. LXXXV, p. 731, 1877), M. Hermite a donné une relation remarquable entre les fonctions Θ et l'a employée pour l'intégration d'une équation différentielle. L'auteur se propose de déduire cette relation importante du théorème de multiplication des fonctions Θ dû à Jacobi.

Année 1879.

Cantor (*Georg*). — Sur un théorème de la théorie des ensembles continus. (127-135).

La démonstration de Thomæ (*Gött. Nachr.*, p. 466-468, 1878; *voir* le *Bulletin*, même volume, p. 83) repose sur un théorème d'*Analysis Situs* du même ordre de difficulté que le théorème à démontrer. Depuis, Netto (*Journal de Crelle*, t. 83, p. 263), s'est occupé de la même question. Cantor applique à la question ou plutôt à une généralisation une méthode différente de celles auxquelles on a eu recours et reposant sur ce théorème :

« Une fonction réelle, univoque et continue $f(t)$ d'une variable réelle et continue t, qui pour $t = t_1$ a une valeur positive $f(t_1) > 0$, pour $t = t_2$ une valeur négative $f(t_2) < 0$, prend la valeur 0 au moins pour une valeur t_0 comprise entre t_1 et t_2, en sorte que $f(t_0) = 0$. La démonstration repose ensuite sur des considérations de Géométrie à n dimensions.

Kœnigsberger (*Leo*). — Sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques et hyperelliptiques. (185-189).

Dans le quatre-vingt-sixième Volume du *Journal de Crelle*, l'auteur s'est occupé de la relation qui existe entre la question de la réduction dans certaines intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques et la multiplication complexe des intégrales elliptiques. Il trouvait alors, entre autres résultats, que, pour qu'une intégrale abélienne de première espèce, de la forme $\int \psi(x)[\sqrt[n]{R(x)}]^r dx$, soit réductible à une intégrale elliptique, il faut que l'on se trouve dans l'un des cas $n = 2, 3, 4, 6$. Les intégrales elliptiques auxquelles peuvent se réduire les intégrales

$$\int \psi(x)[\sqrt[3]{R(x)}]^r dx, \quad r = 1, 2,$$
$$\int \psi(x)[\sqrt[6]{R(x)}]^r dx, \quad r = 1, 5,$$

ont pour module de multiplication complexe $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ou un module qui s'en déduit, tandis que, pour l'intégrale abélienne,

$$\int \psi(x)[\sqrt[4]{R(x)}]^r dx, \quad r = 1, 3,$$

les intégrales elliptiques auxquelles elle peut se réduire ont pour module de

multiplication complexe $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou un module qui s'en déduit. Königsberger s'occupe d'étendre ces propositions et d'établir les transformations qui donnent

$$\int \psi(x)\left[\sqrt[3]{R(x)}\right]^r dx = \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^3-1}}$$

ou

$$\int \psi(x)\left[\sqrt[3]{R(x)}\right]^r dx = \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^3-1}}.$$

Zeller (*Chr.*). — Détermination du caractère quadratique par la division en fraction continue. Recherche tendant à compléter la troisième et la cinquième démonstration du théorème fondamental de Gauss. (197-216).

Schering (*Ernst*). — Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité pour les restes quadratiques. (217-224).

Zeller (*Chr.*). — Sur des sommes de plus grands entiers dans les séries arithmétiques. (243-268).

En désignant par $[x]$ le plus grand entier contenu dans x, on a, en posant

$$A = \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{ax+d}{p}\right], \quad B = \sum_{x=1}^{x=h}\left[\frac{px+(d+1)}{a}\right],$$

où $h = \left[\frac{an+d}{p}\right]$,

$$A + B = hn.$$

De même

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{x^\alpha}{p}\right] + \sum_{x=1}^{x=q}\left[(xp)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = qn,$$

où

$$q = \left[\frac{n^\alpha}{p}\right].$$

Gierster (*J.*). — Nouvelles relations entre les nombres de classes des formes quadratiques à déterminant négatif.

Les formules de Kronecker (*Monatsberichte d. Kgl. Acad. d. W. zu Berlin*, 19 avril 1875, p. 235) entre les nombres de classes des formes quadratiques à déterminant négatif s'établissent en égalant les modules dans les équations modulaires qui relient $u = \sqrt[4]{k}$ et $v = \sqrt[4]{l}$ ou leurs mêmes puissances. Gierster applique la même méthode à l'équation modulaire de l'icosaèdre de Klein (*Math. Ann.*, t. XIV, p. 160).

Schering (*Ernst*). — Remarque sur une lettre de Gauss à Sophie Germain du 30 avril 1807.

Année 1880.

Cantor (*G.*). — Sur la théorie des fonctions numériques. (161-169).

A propos d'une Note publiée dans les *Comptes rendus*, t. LXXXIX, p. 948, 985, par Lipschitz, *Sur certaines fonctions numériques*, G. Cantor donne des théorèmes analogues auxquels l'a conduit l'étude du Mémoire de Riemann, *Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée.*

Fuchs (*L.*). — Sur une classe de fonctions de plusieurs variables qui résultent de l'inversion des intégrales des solutions des équations différentielles à coefficients rationnels. (170-176).

Voir le *Bulletin*, t. IV_2, p. 278-300, et les *Comptes rendus*, t. XC, p. 678-680, et 735-736.

Krankenhagen. — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires. (197-203).

Dans son Mémoire intitulé : *Hamilton-Jacobi'sche Theorie* ... (*Götting. Abh.*, t. XVIII). Schering s'est occupé des substitutions qui laissent invariables les équations

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n, \quad H = H(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Dans cette Note, Krankenhagen communique les résultats qui correspondent au cas plus général du système d'équations

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_k} - p_k \frac{\partial F}{\partial w}, \quad \frac{dw}{dt} = \sum_k p_k \frac{\partial F}{\partial q_k} - F,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n, \quad F = F(t, w, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n).$$

Kœnigsberger (*L.*). — Sur l'extension du théorème d'Abel aux intégrales des équations différentielles quelconques. (288-293).

Définition d'une équation différentielle irréductible.

Si l'équation différentielle

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0$$

est irréductible et a une intégrale en commun avec l'équation différentielle

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^v z}{dx^v}\right) = 0,$$

il en est de même de toutes ses intégrales.

Énoncé de théorèmes servant d'une part à reconnaître si une équation différentielle est irréductible, d'autre part à rechercher les relations algébriques qui relient les valeurs d'une même intégrale particulière pour des valeurs différentes de l'argument, c'est-à-dire à fournir une extension du théorème d'Abel.

Schubert (*H.*). — Sur le contact stationnaire des courbes. (369-385).

Théorèmes de Géométrie énumérative.

Hettner (*G.*). — Sur les équations algébriques entre deux variables qui ne changent pas par un faisceau de transformations rationnelles et à inversion univoque. (386-398).

Dans le *Journal de Crelle,* t. 87, p. 139, Schwarz a donné relativement à ces équations un théorème que l'on peut énoncer ainsi : « Toute équation algébrique entre deux variables qui ne change pas par un faisceau de transformations rationnelles et à inversion univoque a son *rang* égal à 0 ou à 1. »

La démonstration de Schwarz est basée sur la considération des surfaces de Riemann, sur les propriétés des intégrales des différentielles algébriques et sur le théorème d'addition des fonctions elliptiques.

Hettner donne de ce théorème une démonstration à l'aide seulement de la théorie des fonctions algébriques.

L'expression *rang*, employée dans le sens de genre (*Geschlecht*), terme généralement employé pour désigner le nombre p de Riemann, les notations et les théorèmes auxquels a recours l'auteur sont empruntés aux leçons de Weierstrass sur les fonctions abéliennes.

Fuchs (*L.*). — Sur les fonctions qui résultent de l'inversion des solutions des équations différentielles linéaires. (445-453).

Voir le *Bulletin,* t. IV_2, p. 328-336.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur les intégrales algébrologarithmiques des équations différentielles linéaires non homogènes. (453-455).

Himstedt (*F.*). — Quelques recherches sur l'induction dans les corps conducteurs. (491-511).

Voir aussi *Poggendorff's Annalen,* t. XI_2, p. 812-832.

L'auteur part des résultats fournis par Helmholtz (*Journal de Crelle*, t. LXXII, LXXV), des propositions établies dans sa thèse (*Sur les oscillations d'un aimant sous l'influence d'une sphère de cuivre.* Göttingen, 1875), ainsi que dans le Mémoire de Riecke [*Sur le mouvement de l'électricité dans les corps conducteurs* (*Abh. d. Ges. d. W. zu Göttingen.* 24 Bd., 1876)] pour étudier deux phénomènes particuliers :

1° Phénomènes d'induction développés dans un conducteur au repos par un aimant mobile ;

2° Phénomènes d'induction développés dans une sphère suspendue par un pendule bifilaire et qui se trouve dans un champ magnétique homogène.

Lipschitz (*R.*). — Communication à l'occasion de la publication de son Traité d'Analyse. (589-594).

Kœnigsberger (*L.*). — Relation entre les intégrales générales et les intégrales particulières des équations différentielles. (625-630).

Soit une équation différentielle irréductible

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0.$$

Si, entre $\mu + 1$ intégrales de l'équation différentielle, il existe une relation algébrique

$$y = F(x_1, y_1, y_2, \ldots, y_\mu, c_1, c_2, \ldots, c_m),$$

qui peut contenir la variable x et aussi les irrationnelles algébriques qui se présentent dans l'équation différentielle, cette relation algébrique subsistera par la substitution à une des intégrales d'une intégrale particulière quelconque, les μ autres intégrales étant alors remplacées par d'autres intégrales particulières déterminées.

Application aux équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$f(x, y)$ étant une fonction algébrique de x et de y.

Année 1881.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur un théorème relatif à la conservation de la relation algébrique entre les intégrales de différentes équations différentielles et leurs quotients différentiels. (6-10).

Soit z_1 une intégrale particulière de l'équation différentielle algébrique

$$F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^mz}{dx^m}\right) = 0,$$

et y une intégrale particulière de l'équation différentielle algébrique irréductible

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

si l'on a une relation de la forme

$$\left(y, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots, \frac{d^pz_1}{dx^p}, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^qy_1}{dx^q}\right) = 0,$$

cette relation subsiste quand on remplace y_1 par une autre intégrale y_2, z_1 étant alors remplacé par une intégrale z_2 convenablement choisie.

Heun (*Carl*). — Nouvelle représentation des fonctions sphériques et des fonctions du même genre par des déterminants. (104-119).

Kœnigsberger (*L.*). — Sur l'irréductibilité des équations différentielles. (222).

Une équation différentielle

$$y^{(m)k} + f_1[x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}]y^{(m)k-1} + \ldots$$
$$+ f_{k-1}[x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}]y^{(m)} + f_k(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) = 0$$

est irréductible, lorsque relativement à $y^{(m)}$ elle n'est pas réductible dans le sens algébrique, ou bien lorsqu'elle n'a aucune intégrale commune avec une équation différentielle algébrique d'ordre moindre.

Kronecker. — Extrait d'une lettre à E. Schering.

Cette lettre est relative à la Note de Carl Heun *Sur la représentation des fonctions sphériques et autres par des déterminants*. Il rappelle que les déterminants en question ont déjà été considérés par Jacobi : *De eliminatione variabilis e duabus æquationibus algebraicis* (*Journal de Crelle*, t. 15), puis dans un autre Mémoire *Sur la représentation d'une série de valeurs données par une fonction rationnelle* (*Journal de Crelle*, t. 30). Ces mêmes déterminants ont été rencontrés par Cayley (*Journal de Liouville*, t. XI, 1846), par Joachimsthal (*Journal de Crelle*, t. 48, 1854) et par Hankel dans son *Inaugural-Dissertation* (Göttingen, Dieterichsche Buchdruckerei). En outre, Kronecker rappelle ses propres travaux et ajoute quelques remarques sur ces déterminants.

Enneper (*A.*). — Sur la théorie des courbes à double courbure. (291-301).

L'auteur s'est déjà occupé de la généralisation des théorèmes de Puiseux et de Bertrand relatifs aux courbes à double courbure.

Dans les *Göttinger Nachrichten* de 1866, il a montré que l'équation

$$\frac{\rho}{r} = gs + h$$

représentait une ligne géodésique d'une surface conique. Pour les surfaces développables dont l'arête de rebroussement a en chaque point le même rayon de courbure, on a, pour définir les lignes géodésiques, l'équation

$$a^2\left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right] = \left[b\frac{\rho}{r} - s + c\right]^2.$$

Dans cette Note l'auteur examine le cas où le rayon de torsion de l'arête de

rebroussement est constant. Il considère en particulier la surface développable dont une hélice cylindrique est l'arête, et il trouve alors, pour définir les lignes géodésiques sur cette surface,

$$\left[\frac{\rho}{r}+\frac{\rho}{c}\,\frac{1}{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}\right]=b^2\left[1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right].$$

Enneper (*A.*). — Remarques sur quelques transformations de surfaces. (305-318).

Suite des recherches de l'auteur (*Gött. Nachrichten,* p. 369-396, 1877). Citons le théorème suivant :

« Une surface parallèle de la surface S_1 est la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une surface parallèle de la surface S relativement au point O. »

Pour la définition des surfaces S et S_1, voir plus haut.

Année 1882.

Enneper (*A.*). — Complément à la théorie des surfaces et en particulier des surfaces minima. (34).

En 1870, dans les *Gött. Nachrichten,* l'auteur avait donné une extension de la notion de surfaces parallèles. Cette extension est encore susceptible de généralisation et fournit alors des résultats assez remarquables. L'auteur avait énoncé, dans un Mémoire intitulé : *Recherches sur les surfaces à lignes de courbure planes et sphériques* (*Abhandl. d. K. G. d. W. Göttingen,* t. XXIII, 1878), le théorème suivant :

« Deux surfaces S et S_1 se correspondent, en sorte que les normales en deux points correspondants sont parallèles; si l'on veut qu'aux lignes de courbure de la surface S corresponde sur la surface S_1 un système orthogonal, il peut se présenter deux cas : 1° aux lignes de courbure de S correspondent également sur S_1 des lignes de courbure; 2° en chaque point de la surface S_1 la somme des rayons de courbure principaux est nulle, c'est-à-dire que S_1 est une surface minima.

Dans le présent travail, l'auteur donne une démonstration de ce théorème et il montre de plus que, si les surfaces S et S_1 sont deux surfaces minima, en général, à un système orthogonal sur l'une d'elles correspond un système orthogonal sur l'autre.

Edler (*F.*). — Complément à la démonstration élémentaire due à Steiner du théorème suivant : « De toutes les figures planes de même contour, la sphère a la plus grande surface. » (73-80 et une planche).

Fuchs (*L.*). — Sur les fonctions qui demeurent invariables par des substitutions linéaires. (81-84).

Réponse à la Note ajoutée par F. Klein, le 30 décembre 1881, au Mémoire de Poincaré du 17 décembre 1881, intitulé *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires,* paru dans les *Math. Annalen.*

Enneper (*A.*). — Compléments à la théorie des surfaces et en particulier des surfaces minima. (89-120).

Suite des recherches dont le but a été indiqué plus haut.

De Lagarde (*Paul*). — D'où provient l'x des mathématiciens? (409-413).

Kœnigsberger (*L.*). — Propriétés des intégrales algébrico-logarithmiques des équations différentielles linéaires non homogènes. (686-689).

Enoncé de théorèmes sans démonstration.

Année 1883.

Schwarz (*H.-A.*). — Détermination de la grandeur apparente d'un ellipsoïde vu d'un point quelconque de l'espace. (39-50).

Le problème considéré fournit un bon exemple de l'application des fonctions elliptiques à une question de Géométrie. L'auteur ne fait appel qu'à un petit nombre de théorèmes de Géométrie analytique et emploie dans sa solution les notations de Weierstrass.

Schwarz (*H.-A.*). — Sur l'application conforme de la surface du rectangle sur la surface d'une demi-sphère. (51-60).

Emploi des fonctions elliptiques et des notations de Weierstrass à la solution de ce problème.

Gundelfinger (*S.*). — Sur la théorie des formes binaires. (115-121).

Sylvester a appris à représenter les formes binaires de degré impair sous une somme de puissances d'expressions linéaires. Le cas où un certain covariant de la forme, appelé le *canonisant,* possède des racines égales ou disparaît identiquement était exclu.

En cherchant une représentation canonique de ce genre pour les formes binaires, qui s'applique à tous les cas, Gundelfinger est arrivé à une série de théorèmes intéressants.

Représentation d'une forme binaire de degré n par une somme de k puissances. Représentation d'une forme binaire par l'expression

$$f = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^{n-l+1} \Lambda + (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)^{n-m+1} M + \ldots,$$

où les fonctions Λ, M, ... sont des fonctions de degré $l-1$, $m-1$, ..., et où l'on a

$$n - 2(l + m + \ldots) + 2 > 0.$$

Kœnigsberger (*L.*). — Relation entre les intégrales fondamentales d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. (121-124).

Thomæ (*J.*). — La constante de la transformation linéaire des fonctions Θ. (194-198).

Dans l'étude de la transformation linéaire des fonctions Θ, la transformation en elle-même n'exige que les premières notions de la théorie des fonctions, tandis que, pour la détermination de la constante qui s'y présente, on a en général recours à l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre à laquelle satisfont les fonctions Θ et à l'intégration d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. Rausenberger (*Journal de Crelle,* t. 91, p. 335) a indiqué un procédé plus simple. Thomæ emploie ici une autre méthode qui le conduit rapidement au résultat.

Enneper (*A.*). — Remarques sur les fonctions Θ. (175-187 et 261-283).

1° Décomposition des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des produits de fonctions Θ en fractions simples.

2° Remarques sur quelques équations données par Herstowski dans les *Math. Annalen* (t. XI, p. 15).

3° Sur un théorème de Jacobi (*Fundamenta,* p. 160, *Werke,* t. I, p. 213).

4° Sur les quotients de fonctions Θ, qui se présentent dans le Mémoire de Jacobi, *Sur la rotation d'un corps,* etc.

5° Remarques sur les observations de Thomæ analysées précédemment.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur les transcendantes appartenant en propre à une équation différentielle du premier ordre. (219-226).

La question posée est la suivante :

Donner toutes les équations différentielles.

$$F\left(x, z, \frac{dx}{dz}\right) = 0,$$

pour lesquelles toutes les intégrales s'expriment algébriquement au moyen de n transcendantes non reliées algébriquement ou bien qui possèdent seulement n intégrales transcendantes indépendantes l'une de l'autre.

Hurwitz (*A.*). — Sur la théorie des équations modulaires. (350-363).

Étude des équations modulaires en prenant comme point de départ le Mémoire de Klein *Sur la théorie des fonctions modulaires elliptiques* (*Math. Ann.*, t. XVI).

Kœnigsberger (*L.*). — Sur l'irréductibilité des équations différentielles linéaires. (390-395).

Remarques à propos de la définition de l'irréductibilité définie par Frobenius, (*Journal de Crelle*, t. 74), et par l'auteur (*Journal de Crelle*, t. 90).

Énoncé de théorèmes qui doivent être démontrés dans un Mémoire postérieur.

G. B.

MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES DE TOULOUSE. VIIe Série (1).

Tome VIII; 1876.

Léauté (*H.*). — Note sur le degré et la classe d'une courbe parallèle à une courbe donnée. (59-62).

Si une courbe algébrique est d'ordre D et de classe C, une courbe parallèle sera en général de degré $2(C+D)$ et de classe $2C$. Il y a réduction pour ces deux nombres si la première courbe est tangente à la droite de l'infini, ou si elle passe par les points circulaires à l'infini.

Tisserand (*F.*). — Sur l'étoile double (705) Ophiuchus. (85-108).

Détermination des éléments de l'orbite à l'aide de deux cent treize observations sur l'angle de position, faites depuis W. Herschel (1779) jusqu'à M. Struve (1874).

Léauté (*H.*). — Étude géométrique sur quelques applications aux courbes du second degré du théorème d'Abel relatif aux fonctions elliptiques. (139-150).

On peut considérer la courbe du quatrième ordre $y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ et une conique C comme perspectives d'une même biquadratique gauche, faites de deux points de vue différents. Ce mode de correspondance permet de déduire de chaque propriété de l'une de ces courbes une propriété correspondante pour

---

(1) Voir *Bulletin*, I, 79-80.

l'autre. En appliquant à la courbe du quatrième degré le théorème d'Abel, sous la forme que lui a donnée Clebsch, M. Léauté retrouve les théorèmes de Poncelet, l'interprétation par les cercles de Jacobi et les formules données par M. Hermite (*Bulletin*, t. II, p. 21).

Molins (*H.*). — Sur l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^k y}{dx^k} = a x^m y.$$

(167-189).

Application de la méthode employée par Liouville pour l'équation de Riccati (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XIV). On obtient d'abord l'intégrale générale sous forme d'une somme de séries convergentes tant que m n'est pas un nombre entier négatif. Chacune de ces séries peut être représentée par une intégrale définie multiple si m est supérieur à -1.

Despeyrous. — Théorèmes généraux sur le potentiel. (221-242).

Démonstrations analytiques de ces théorèmes par une méthode uniforme que l'auteur attribue à Sturm. L'article renferme une étude très complète et très détaillée des propriétés des courbes auxiliaires construites sur les surfaces de niveau.

Léauté (*H.*). — Note sur le tracé des engrenages par arcs de cercle. Perfectionnement de la méthode de Willis. (353-370).

Tome IX; 1877.

Tisserand (*F.*). — Mémoire sur les déplacements séculaires du plan de l'orbite du huitième satellite de Saturne (Japhet). (1-61).

M. Tisserand montre que le pôle de l'orbite décrit une ellipse sphérique et étudie la loi du mouvement du pôle sur son ellipse. Le Mémoire se termine par la détermination de la position actuelle du plan de l'orbite d'après les observations faites à Washington en 1874.

Barthélemy (*A.*). — Étude théorique et expérimentale sur les plaques et membranes de forme elliptique. (175-240 9 planches).

D'après les recherches de M. Mathieu, le mouvement vibratoire des membranes et des plaques de forme elliptique donne lieu à des systèmes de lignes nodales composés d'ellipses et d'hyperboles homofocales. M. Barthélemy s'est proposé, dans la première partie de ce travail, d'étudier l'équation qui donne les lignes nodales hyperboliques et la distribution de ces lignes. Le reste du Mémoire est consacré à une étude expérimentale des phénomènes.

Forestier (*Charles*). — Exposition succincte de quelques méthodes d'élimination entre deux équations. (142-163).

Despeyrous. — Mouvement général d'un corps solide (401-402).

Détermination algébrique de tous les éléments du mouvement d'un corps solide, quand on connaît : 1° le mouvement d'un point, si le corps a un axe fixe; 2° le mouvement de deux points, si le corps a un point fixe; 3° le mouvement de trois points, si le corps solide est entièrement libre.

Brassinne (*E.*). — Quelques questions d'Hydraulique (448-452).

L'auteur se propose de déterminer la surface de l'eau qui s'écoule sur un toit incliné arrosé uniformément par la pluie, et quelques problèmes analogues.

Brassinne (*E.*). — Généralisation du théorème de Brianchon. (453-454).

Extension à un polygone de $2n$ côtés, circonscrit à une conique.

Tome X; 1878.

Endrès. — De la limite d'ouverture des ponts suspendus. (72-87).

D'après l'auteur, cette limite ne doit pas dépasser notablement 650^m. La plus grande travée suspendue qui existe n'est que de 492^m.

Gascheau. — Observation sur un passage du Traité de Mécanique de Poisson. (178-186).

Il s'agit du mouvement d'un point pesant sur une courbe. Si la tangente au point le plus élevé A de la trajectoire est horizontale, et si le mobile est animé d'une vitesse initiale dirigée vers le haut et égale à $\sqrt{2gh}$, h désignant la distance verticale du point A à la position initiale, le mobile se rapprochera indéfiniment du point A, mais ne l'atteindra qu'au bout d'un temps *infini*. M. Gascheau montre que le mobile atteindra le point A au bout d'un temps fini, si le rayon de courbure de la trajectoire est nul au point A, et il donne des exemples.

Despeyrous. — Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes. (374-396).

L'auteur s'est proposé d'obtenir directement sous forme d'intégrales simples les trois composantes de l'attraction exercée sur un point extérieur par une couche comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques. Il suppose pour cela que cette couche est homogène ou, plus généralement, qu'elle peut être décomposée en couches homogènes par des ellipsoïdes homothétiques et concentriques aux premiers. Après avoir démontré, en partie par le calcul, en partie par des considérations géométriques, que les surfaces de niveau d'une couche infiniment mince de cette espèce sont des ellipsoïdes homofocaux à la surface extérieure, il calcule directement, en s'appuyant sur les propriétés des couches auxiliaires qu'il a développées dans un autre travail (t. VIII, même série), les composantes de l'attraction d'une pareille couche sur un point extérieur, et les composantes de l'attraction totale se présentent immédiatement

sous forme d'intégrales simples, sans qu'on ait aucune transformation à effectuer. Si l'on suppose la densité constante, on a des intégrales elliptiques.

Forestier (*Charles*). — Sur la formule de l'Hospital donnant la vraie valeur des fonctions qui prennent la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, et nouvelle démonstration de cette formule. (482-489).

On trouve dans cet article des détails intéressants sur le marquis de l'Hospital.

VIIIe Série. — Tome I; 1er semestre 1879.

Molins (*H.*). — Mémoire sur un système triple de surfaces orthogonales et développables. (81-98).

Étude géométrique d'un système triple dont une série est formée par les plans tangents à une développable S et les deux autres séries par des développables ayant pour arêtes de rebroussement deux séries de lignes géodésiques orthogonales de S. L'auteur donne le moyen d'obtenir les équations de ces surfaces. On en déduit par l'inversion un autre système triple dont une série est formée de sphères et les deux autres séries d'enveloppes de sphères.

Forestier. — Note sur le nombre des équations d'une même courbe en coordonnées polaires par rapport au même axe. (250-254).

Une même courbe peut être représentée en général par plusieurs équations distinctes en apparence; l'auteur remarque avec raison que cela entraîne une complication dans la recherche des points communs à deux courbes.

Brassinne (*E.*). — Précis de Statique dans lequel les leviers de rotation sont substitués aux couples. (209-241).

M. Brassinne entend par levier de rotation l'ensemble d'une force et de la perpendiculaire abaissée d'un point regardé comme fixe sur cette force. Prenant alors pour point de départ de la Statique les conditions d'équilibre du levier droit et du levier coudé, il en déduit successivement la composition des forces parallèles, des forces concourantes, les conditions d'équilibre d'un nombre quelconque de forces appliquées à un corps solide, etc. Comme exercices, l'auteur signale quelques propriétés élégantes des centres de gravité des polygones circonscrits à une circonférence et des polyèdres circonscrits à une sphère.

Tome I; 2e semestre 1879.

Gascheau. — Étude sur un cas singulier du mouvement dû à une force centrale. (115-128).

Article réimprimé, avec quelques légers changements, dans le *Bulletin de la Société Mathématique*, t. X.

Tome II ; 2e semestre 1880.

Brassinne (*E.*). — Détermination des axes d'un corps solide sur lesquels les forces centrifuges exercent pendant la rotation un effet maximum (93-96).

Ces droites sont les bissectrices des angles formés par les axes principaux de rotation.

Gascheau. — Note sur les conditions de continuité et de discontinuité des fonctions algébriques. (122-127).

Despeyrous. — Note sur la Thermodynamique. (167-175).

Aperçu sur l'application des lois de la Mécanique générale aux phénomènes calorifiques, optiques, acoustiques, électriques, etc. Démonstration de la loi de Mariotte en supposant que l'action moléculaire varie en raison inverse de la distance.

Tome III ; 2e semestre 1881.

Despeyrous. — Équations différentielles du mouvement d'un corps solide libre ou gêné par des forces quelconques. (145-168).

Exposition très claire et très méthodique de cette partie du Cours de Mécanique.

Tome IV ; 1er semestre 1882.

David. — Notice sur les travaux de Cauchy. (178-201).

Tome IV ; 2e semestre 1882.

Brassinne (*E.*). — Questions de Mécanique rationnelle. (106-114).

La première Partie de cet article est relative au principe de la moindre action que l'auteur applique au mouvement d'un point pesant sur une courbe. La seconde Partie contient quelques indications sur la manière de traiter les problèmes relatifs à la distribution des axes d'inertie, et la description d'une balance d'oscillation pour le calcul des moments d'inertie.

Despeyrous. — Note sur les équations différentielles du mouvement d'un corps solide libre ou gêné, sollicité par des forces quelconques. (81-87).

Application de la méthode de Lagrange.

Gascheau. — Explication de deux paradoxes apparents observés dans les solutions de quelques problèmes de Mécanique rationnelle. (137-146).

Tome V; 1er semestre 1883.

David. — Sur le développement de l'exponentielle en puissances de sinus et de cosinus de l'arc. (148-169).

Application de l'équation linéaire du second ordre qui est vérifiée par la fonction $e^{m\alpha i}$ quand on regarde $\cos\alpha$ ou $\sin\alpha$ comme la variable indépendante, et emploi de la méthode des coefficients indéterminés.

Baillaud (*B.*). — Sur le calcul numérique des intégrales définies. (167-190).

Démonstration élémentaire de la méthode célèbre de Gauss. Dans le cas où l'on a une fonction admettant la période 2π, développée en une série de sinus et de cosinus des multiples de l'arc, l'auteur s'est proposé de rechercher une méthode de calcul analogue à celle de Gauss; il arrive à cette conclusion que les seules valeurs qu'il convienne d'employer sont les termes d'une progression arithmétique dont la raison est une partie aliquote de la circonférence.

Tome V, 2e semestre 1883.

Molins (*H.*). — De la détermination sous forme intégrable des équations des courbes gauches dont le rayon de courbure et le rayon de la sphère osculatrice sont liés par une relation donnée quelconque. (175-199).

On peut choisir la fonction arbitraire dont dépend le problème, de telle façon que les trois coordonnées d'un point de la courbe s'expriment par des quadratures. L'auteur fait quelques applications à des cas où la relation donnée est d'une forme simple; il retrouve ainsi un certain nombre de résultats connus de la théorie des courbes gauches.

MATHEMATISCHE ANNALEN (1).

Tome XX; 1882.

Dyck (*W.*). — Études sur la théorie des groupes. (1-44).

L'auteur explique comme il suit, dans l'introduction de son Mémoire, l'objet qu'il poursuit.

Les recherches qui suivent se rapportent à ce problème : « Définir un groupe d'opérations discrètes, appliquées à un certain objet, en faisant abstraction du mode spécial de représentation de ces opérations, mais en supposant au contraire que celles-ci satisfassent aux conditions qui résultent des propriétés imposées au groupe.

Pour la formation du groupe, nous partons de certaines opérations génératrices $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sur le caractère spécial desquelles nous ne faisons aucune hypothèse.

Alors on peut individualiser tout groupe formé par l'application réitérée et la combinaison de ces opérations par la connaissance de certaines relations qui se présentent dans la composition de ces opérations primitives.

Toute combinaison de nos opérations peut s'écrire, d'après la manière habituelle, par un produit symbolique

$$A_1^{\mu_1} A_2^{\mu_2} \ldots A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} \ldots, \tag{1}$$

et toutes les relations en question ont alors la forme

$$F_h(A_i) = 1, \tag{2}$$

où F_h désigne un produit spécial de la forme (1).

De cette façon tous les groupes holoédriques isomorphes sont contenus dans un seul groupe, et l'être du groupe s'exprime non plus par une forme spéciale de représentation des opérations qui y entrent, mais exclusivement par leurs relations mutuelles.

Dans la première Section on formule de la façon la plus générale le thème de ces recherches. On part du groupe G le plus général que l'on puisse imaginer; il est formé par une suite d'opérations génératrices $A_1, A_2, A_3, \ldots$, lorsqu'on ne suppose aucune relation entre ces opérations. Chaque groupe spécial $\overline{G}$ s'en sépare par l'introduction de certaines relations $F_h(A_i) = 0$, dont le rôle et la la position relativement aux groupes G et $\overline{G}$ sont précisés de la façon la plus simple.

Parallèlement à ces développements abstraits marche une exposition géométrique, qui tout d'abord peut être regardée comme une illustration de nos opérations analytiques, qui d'ailleurs sera nécessaire pour les développements de la seconde partie. Cette représentation géométrique d'un groupe consiste dans la division d'une région plane en domaines analogues, de telle sorte que, à chaque domaine, corresponde une substitution du groupe et que le passage d'une substitution à une autre soit traduit dans le langage de la Géométrie de situation, par le passage d'un domaine qui correspond à la première substitution au domaine qui correspond à la seconde.

---

(1) Voir *Bulletin*, VIII$_2$, 123.

Dans la seconde Section, on se limite à la représentation de groupes finis et l'on étudie spécialement leur figuration géométrique; on a ainsi affaire à la division régulière d'une surface fermée et nommément à la surface régulière de Riemann, au sens introduit par M. Klein. [La connexion entre la division en domaines d'une surface et les problèmes de la théorie des groupes a été mise en évidence par M. C. Jordan : *Recherches sur les polyèdres* (*Journal de Crelle*, t. 66 et 68), *Traité des substitutions et des équations algébriques*, p. 56]. Les relations $F_h = 1$ qui servent de base à la définition des groupes permettent de caractériser la ramification de la surface de Riemann et de déterminer sur cette surface un système de coupures de passage ne revenant point sur elles-mêmes. Cette interprétation géométrique fournit une limite supérieure du nombre de relations $F_h = 1$ nécessaires pour la définition d'un groupe fini.

Cette figuration géométrique permet ensuite de représenter certains groupes spéciaux, dans le sens que nous avons spécifié, par des relations $F_h = 1$ entre certaines substitutions génératrices. Ces exemples, en partie indiqués, en partie développés, forment la conclusion de ce travail. Ceux pour lesquels l'espèce de la surface de Riemann correspondante est nulle sont particulièrement simples.

Une dernière remarque concerne certaines hypothèses relatives à la théorie des groupes, hypothèses qui ont pour base la définition d'un système d'unités pour certains nombres complexes : elles comprennent comme cas particulier la définition des unités quaternions.

Rausenberger. — Note sur la théorie des fonctions modulaires. (45-46). — Sur la théorie des fonctions admettant plusieurs périodes non permutables. (47-48).

Soit $f(x)$ une fonction modulaire, c'est-à-dire une fonction uniforme qui vérifie les équations

$$f(x+1) = f(x), \quad f\left(-\frac{1}{x}\right) = f(x),$$

on peut, au moyen de telles fonctions, en construire d'autres pour lesquelles on ait

$$F(x+\sqrt{n}) = F(x) \quad \text{et} \quad F\left(-\frac{1}{x}\right) = F(x)$$

ou

$$F(x+1) = F(x) \quad \text{et} \quad F\left(-\frac{1}{nx}\right) = F(x).$$

Klein. — Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires. (49-51).

En partant d'un domaine donné sur la sphère des η, domaine qui est l'image d'une sphère de Riemann découpée, il s'agit, au moyen de substitutions linéaires en nombre infini appliquées à la variable η, de reproduire ce domaine de telle façon que, ou bien la sphère entière, ou bien une calotte sphérique limitée par un plan, soit entièrement et simplement recouverte par des reproductions. Suivant les cas, on dira pour le moment qu'on a affaire à des fonctions de η de première ou de seconde espèce. Pour $p > 1$ on a alors le théorème suivant : » Parmi toutes les fonctions sans embranchement qui existent sur une surface de

Riemann, il y a toujours une fonction de τ_1 de seconde espèce et une seule. Les autres fonctions sans embranchement sont des fonctions uniformes de τ_1. »

Poincaré. — Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires. (52-53).

Lettre adressée à M. Klein sur les noms que l'auteur a donnés à ses transcendantes.

Krause. — Sur les équations au multiplicateur des fonctions hyperelliptiques du premier ordre. (54-58).

Noether. — Note sur les courbes algébriques qui se reproduisent par un faisceau de transformations uniformes. (59-62).

Démonstration de ce théorème : « Il n'y a pas de courbes algébriques d'espèce $p > 1$ qui se reproduisent par une infinité de transformations uniformes. L'auteur a complété cette démonstration dans le t. XXI des *Annalen*.

Hankel. — Recherches sur les fonctions à infinité d'oscillations et les fonctions discontinues. (63-112).

Les résultats de ce travail, publié il y a quatorze ans, peuvent se résumer comme il suit :

I. *Méthode de la condensation des singularités.* Elle permet, en partant d'une fonction $\varphi(y)$ qui admet une singularité pour une valeur $y = 0$, de construire une fonction $f(x)$ qui présente la même singularité un nombre infini de fois dans un intervalle fini. Elle a été développée par M. Dini (*Fundamenti por la teoria delle funzioni*), par M. Weierstrass et par M. Cantor (*Math. Ann.*, t. XIX).

II. *Représentation de fonctions continues* qui admettent pour toutes les valeurs rationnelles de la variable des quotients différentiels infinis.

III. *Distinction entre les fonctions ponctuellement et les fonctions totalement discontinues.* La définition, pour être exacte, doit être modifiée comme il suit : une fonction est ponctuellement discontinue, si, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on le veut, on peut lui faire correspondre un nombre σ positif différent de zéro tel que la somme des intervalles où l'oscillation est plus grande que σ soit inférieure à ε. Toutes les autres fonctions sont totalement discontinues.

IV. *Représentation analytique d'une fonction d'une variable complexe régulière à l'intérieur et à l'extérieur d'un cercle, mais totalement discontinue sur le cercle.*

Cantor. — Sur les ensembles infinis linéaires de points. (113-121).

Voici le théorème fondamental établi dans ce travail : « Si, dans un espace

continu à n dimensions s'étendant indéfiniment dans tous les sens, on définit une infinité de régions qui soient entièrement séparées, ou qui se touchent tout au plus sur leurs limites, l'ensemble de ces régions est dénombrable; en d'autres termes, il a la première puissance.

Du Bois-Reymond. — Théorème général sur l'intégrabilité de fonctions de fonctions intégrables. (122-124).

Hurwitz. — Sur une suite de nouvelles fonctions qui constituent les invariants absolus de certains groupes de transformations linéaires à coefficients entiers. (125-134).

Hurwitz. — Démonstration d'un théorème relatif aux cubiques gauches. (135-137).

Si les huit sommets de deux tétraèdres sont situés sur une cubique gauche et si les huit faces sont des plans osculateurs d'une seconde cubique gauche, il y a une infinité de tétraèdres inscrits à la première cubique, circonscrits à la seconde; tout point de la première cubique est sommet d'un tel tétraèdre.

Hölder. — Démonstration de ce théorème : « Une fonction analytique uniforme peut prendre telle valeur que l'on veut dans le voisinage d'un point singulier essentiel ». (138-143).

Thieme. — Sur la construction du système polaire d'une surface du troisième ordre. (144-145).

Staude. — Sur la construction de l'ellipsoïde au moyen d'un fil. (147-181).

Le principal résultat de ces recherches, fondées sur les propriétés des intégrales hyperelliptiques d'espèce $p = 2$, consiste dans le théorème suivant :

« Si l'on considère un fil inextensible fermé, enroulé autour du corps formé par la combinaison d'un ellipsoïde λ_0 et d'un hyperboloïde homofocal à une nappe μ_0, tendu en un point P, et se mouvant de manière à toucher constamment les deux portions de l'hyperboloïde séparées par l'ellipsoïde, le point P décrira un ellipsoïde homofocal à l'ellipsoïde donné et la bissectrice des deux droites suivant lesquelles sont dirigées les portions du fil qui se réunissent en P est la normale de cet ellipsoïde. »

L'auteur étudie ensuite divers cas particuliers, il montre comment on peut construire un ellipsoïde au moyen de l'ellipsoïde donné et de son hyperbole focale, ou bien au moyen d'un hyperboloïde à une nappe et de son ellipse focale ou enfin au moyen de deux focales.

Staude. — Sur les arcs de courbes géodésiques d'un ellipsoïde

telles que la différence de leurs longueurs s'exprime algébriquement. (185-186).

Généralisation du théorème de Fagnano relatif aux coniques homofocales pour les arcs de lignes géodésiques d'un ellipsoïde.

Rausenberger. — Sur les fonctions uniformes avec plusieurs périodes non permutables. (187-212).

Les périodes linéaires se ramènent aux trois types suivants :

$$y = x + 1, \quad y = px \ (\text{mod } p < 1), \quad y = px \ (\text{mod } p = 1).$$

En déterminant les points de discontinuité essentielle des fonctions auxquelles on est conduit par ces substitutions, on parvient à une division des groupes de substitutions qui sont possibles, et l'on est conduit à une classification de ces fonctions qui comprennent comme cas particulier les fonctions modulaires et les fonctions modulaires généralisées, dans le sens de M. Poincaré et de M. Klein.

Lindemann. — Sur le nombre π. (213-225).

Démonstration de ce théorème : « Si z est une racine d'une équation algébrique irréductible

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

où les a sont des nombres entiers réels ou imaginaires, e^z ne peut être un nombre rationnel. Il en résulte que π ne peut pas être racine d'une équation algébrique irréductible et, généralement, que si z est un nombre rationnel, ou un nombre algébriquement irrationnel, e^z est un nombre transcendant.

Krause. — Les équations modulaires des fonctions hyperelliptiques du premier ordre pour la transformation du cinquième degré. (221-230).

Schrœter. — Sur les systèmes de quatre points circulairement projectifs dans deux espaces collinéaires. (230-253).

Si deux espaces collinéaires sont tels que quatre couples de points correspondants (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1), (d, d_1) jouissent de cette propriété que les points a et b_1, b et c_1, c et d_1, d et a_1 coïncident, il en est de même pour quatre couples de points correspondants quelconques. L'auteur développe diverses propriétés de tels espaces collinéaires.

Schur. — Sur une classe particulière de surfaces du quatrième ordre. (254-296).

On obtient la surface du quatrième ordre la plus générale qui soit engendrée par quatre systèmes collinéaires et telle que la transformation uniforme de

cette surface en elle-même qui correspond à ce mode de génération soit collinéaire en faisant passer une surface du quatrième ordre par les seize droites d'intersection des faces de deux tétraèdres qui soient dans une situation relative quadruplement hyperboloïdale. Les conditions qui sont exigées par cette situation relative se déduisent les unes des autres par des permutations circulaires. Cette surface contient seize autres droites qui sont encore les intersections des faces de deux tétraèdres situés de la même façon. Les surfaces de cette espèce constituent une multiplicité 19^{uple}. L'auteur étudie les cas particuliers où la surface considérée admet cinquante-deux ou bien soixante-quatre droites.

Kantor. — Recherches relatives au Mémoire de Sturm : *Sur la transformation réciproque* (*Mathematische Annalen*), t. XIX. (297-298).

Schotsky. — Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des transformations linéaires. (299-300).

Weber. — Démonstration de ce théorème : « Toute forme quadratique proprement primitive peut représenter une infinité de nombres premiers. » (301-329).

L'auteur complète et généralise le théorème établi pour la première fois par Dirichlet dans le cas particulier où le déterminant de la forme quadratique est un nombre premier négatif $-p$ qui, abstraction faite du signe, a la forme $4n+3$ et qui, en outre, est régulier.

Brill. — Sur les formes binaires et l'équation du sixième degré.

Si l'on considère p formes du $n^{\text{ième}}$ ordre,

$$f_1 = a_{10} + a_{11}x + \ldots + a_{1n}x^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_p = a_{p0} + a_{p1}x + \ldots + a_{pn}x^n,$$

et que l'on pose

$$X_p = x^p, \quad X_{p-1} = -\frac{p}{1}x^{p-1}, \quad X_{p-2} = \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}, \quad \ldots, \quad X_0 = (-1)^p,$$

le point de départ des recherches de l'auteur est le déterminant du

$$p(n-p+i)^{\text{ième}}$$

ordre

$$W(x) = \begin{vmatrix} a_{10} & \ldots & a_{p0} & X_p & 0 & \ldots & 0 \\ a_{11} & \ldots & a_{p1} & X_{p-1} & X_p & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1q} & \ldots & a_{pp} & X_0 & X_1 & \ldots & \ldots \\ a_{1\,p+1} & \ldots & a_{p,p+1} & 0 & X_0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{pn} & 0 & 0 & \ldots & X_0 \end{vmatrix}.$$

Cette forme binaire, pour laquelle le nombre des coefficients est égal au nombre des constantes qui figurent dans les combinants des f, peut être regardée comme la fonction génératrice des combinants du système, si tant est que l'on renonce à une représentation rationnelle. Son discriminant se décompose en deux facteurs, rationnels par rapport aux coefficients des f. Elle peut être aussi regardée comme la forme binaire la plus générale de son ordre, en adjoignant une fonction irrationnelle des coefficients. Cette fonction, pour la forme du sixième ordre, est racine d'une équation du cinquième degré dont les coefficients dépendent de certaines formules de transformation. On peut ainsi ramener la forme binaire du sixième ordre à deux formes canoniques, savoir

$$x^6 + 2px^5 + 3qx^4 + 4rx^3 + 3x^2 + 2px + q, \quad x^6 + ax^4 + bx^3 + x^2 + 1.$$

Lie. — Recherches sur les courbes géodésiques. (357-454).

On appelle *glissement* infinitésimal d'une surface sur elle-même l'opération par laquelle chaque point de cette surface est amené à occuper une position infiniment voisine sur cette surface.

L'auteur détermine : 1° la forme des éléments d'arcs d'une surface pour laquelle on peut effectuer un glissement infinitésimal tel que chaque ligne géodésique devienne une ligne géodésique infiniment voisine ; 2° les éléments d'arcs d'une surface qui admet plusieurs tels glissements infinitésimaux. Il détermine et classe toutes les surfaces qui peuvent ainsi être représentées géodésiquement sur elles-mêmes, d'une infinité de façons. Dans les Notes des trois Mémoires, M. Lie traite des questions suivantes :

I. Représentation géodésique la plus générale d'une surface réelle ou imaginaire.

II. Détermination des lignes géodésiques qui admettent une transformation infinitésimale.

III. Détermination de toutes les formes que peuvent avoir les groupes de transformations des lignes géodésiques d'une surface.

IV. Surfaces dont les lignes géodésiques satisfont à une équation d'une forme donnée.

V. Théorie des lignes géodésiques des surfaces minima.

Brunns. — Sur un problème de minimum. (455-460).

La question dont il s'agit, posée par Boscowich pour la comparaison des erreurs d'observation et développée par Laplace, est la suivante : Dans un système de p fonctions linéaires

$$L_\alpha = b_\alpha + a_{\alpha 1} x_1 + \ldots + a_{\alpha n} x_n,$$

à n variables $x (p < n)$, déterminer la dernière de façon que la somme des valeurs numériques des quantités L, abstraction faite du signe, soit au minimum.

Hers. — Sur le problème de la rotation (461-470).

Quand un corps solide posant est mobile autour d'un point fixe qui n'occupe

aucune position particulière et que l'axe du couple est au début dans le plan vertical qui passe par le centre de gravité et le centre de percussion, cet axe reste dans ce plan variable et le problème se résout par des quadratures. Si l'on suppose que le centre de gravité est sur un des axes principaux d'inertie relatifs au point fixe, le problème se simplifie. Les intégrales se réduisent en général à des intégrales hyperelliptiques du quatrième degré.

Hofmann. — Nouveau mode de démonstration pour un double théorème de la théorie des restes de puissances. Extension du concept de congruence. (471-486).

Gordan. — Nouvelles recherches sur la forme biquadratrique ternaire $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$. (487-514).

Gordan. — Sur les équations du septième degré qui ont un groupe de cent soixante-huit substitutions. (515-530).

Résolution explicite d'une telle équation. M. Kronecker avait annoncé, en 1858, qu'elles pouvaient être résolues par les équations modulaires elliptiques; elles ont été aussi l'objet de recherches de M. Hurwitz (*Comptes rendus*, 1863).

Brill. — Sur le *Polvierseit*. (531-534).

Hölder. — Valeurs limites de séries sur le cercle de convergence. (535-549).

Rausenberger. — Sur les fonctions périodiques de seconde espèce. (550-556).

Ces fonctions sont définies par cette condition qu'elles doivent vérifier une ou plusieurs équations de la forme

$$F[\varphi_1(x)] = \psi_1[F(x)],$$

où φ_1 et ψ_1 désignent des fonctions linéaires. L'auteur cherche à déterminer celles qui ne possèdent qu'un nombre fini de points singuliers essentiels et arrive à ce résultat que, sauf quelques exceptions non essentielles, toutes les fonctions de seconde espèce avec plusieurs périodes non permutables possèdent un nombre infini de points singuliers essentiels.

Braunmühl. — Des lignes géodésiques et de leurs enveloppes sur les surfaces du second degré à trois axes inégaux. (557-586).

I. Équations des lignes géodésiques sur l'ellipsoïde. II. Introduction des fonctions θ hyperelliptiques. III. Détermination des constantes. IV. Calcul nu-

mérique d'une ligne géodésique. V. Cas particuliers. VI. Équations pour l'enveloppe des lignes géodésiques et discussion de ces équations. VII. Établissement d'un théorème général sur la position du point de contact d'une ligne géodésique et de son enveloppe; forme de cette dernière. VIII. Limites au-dessous desquelles les sections principales d'un ellipsoïde sont des lignes de plus courte longueur. IX. Détermination de l'enveloppe au moyen de fonctions hyperelliptiques. X. Lignes géodésiques sur un hyperboloïde à deux nappes. XI. Courbes limites sur l'hyperboloïde pour le domaine des points pour lesquels il y a lieu de considérer les enveloppes.

Königsberger. — Sur une propriété des équations aux dérivées partielles. (587-593).

Lorsqu'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables a une intégrale commune avec une autre équation aux dérivées partielles du premier ordre, que, d'une part, l'une des deux équations aux dérivées partielles est, au sens algébrique, irréductible par rapport aux dérivées relatives à l'une des variables, que, d'autre part, l'intégrale commune ne satisfait pas à une équation différentielle ordinaire du premier ordre relative à l'autre variable indépendante, contenant algébriquement la première variable indépendante, toutes les intégrales de l'une des équations aux dérivées partielles sont communes à l'autre.

Il y a un théorème analogue pour deux équations aux dérivées partielles du $p^{\text{ième}}$ et du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Table des matières des tomes XI à XX. (574-606).

Tome XXI; 1883.

Gierster (*J.*). — Sur les relations entre les nombres de classes des formes quadratiques binaires à déterminants négatifs. (1-50).

La première Section du travail s'occupe des correspondances modulaires dues à Klein qui existent pour le système complet des modules de congruence essentiels pour le $q^{\text{ième}}$ échelon, q étant premier et supérieur à 2; on suppose toutefois que le degré de la transformation n n'est pas divisible par q. Dans la seconde Section l'auteur déduit de ces correspondances les seconds membres des relations donnant le nombre des classes pour le $q^{\text{ième}}$ échelon d'une façon générale relativement à un nombre m non divisible par q. Comme conclusion, on établit d'une façon complète les formules correspondant au cas de $q = 3$ et $q = 5$.

Cantor (*C.*). — Sur les ensembles infinis et linéaires de points. Quatrième article. (51-58).

Démonstration des théorèmes suivants :

« Tout ensemble de points isolé peut être dénombré, et appartient par conséquent à la première classe.

» Si le dérivé P′ d'un ensemble de points P peut être dénombré, P jouit aussi de la même propriété ....

» Un système de points linéaires P contenu dans un intervalle (a, b) étant constitué de telle sorte que son ensemble dérivé P′ soit susceptible d'être dénombré, on peut toujours renfermer P dans un nombre fini d'intervalles, la somme de ces intervalles étant aussi petite qu'on voudra. »

Rausenberger (*O.*). — Sur les fonctions univoques à plusieurs périodes non permutables. (59-70).

Dans la première Partie de ces recherches (*Math. Ann.*, vol. XX) l'auteur s'était occupé des groupes

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{a}{x+b},$$

pour $0 < a \leqq \frac{1}{4}$, b étant supposé différent de zéro. Ici les recherches complètent l'examen du cas de a positif et de b réel, et aussi s'étendent à la considération de certaines valeurs complexes de a et de b.

Lindemann (*F.*). — Sur les covariants hessiens d'une forme binaire algébrique du cinquième ordre. (71-108).

Dans les § 1-5 on répond à la question de la distinction du covariant H du sixième ordre et qui ne dépend que de cinq constantes des autres formes du même ordre. La question est résolue en comptant les covariants quadratiques et les invariants de H et en établissant les relations qui existent entre ces derniers. Géométriquement la chose est la suivante. Les six points de $H = 0$ constituent l'intersection d'une conique et d'une cubique dont l'invariant S est nul, et dont la hessien se décompose en trois droites; les sommets du triangle formé par ces droites se trouvent sur la conique.

Dans les § 6-9 se trouvent développées les représentations typiques de H au moyen de covariants quadratiques et aussi une représentation typique de la forme fondamentale au moyen de covariants linéaires (§ 10).

Après avoir examiné (§ 11-13) tous les cas où ces représentations typiques ne sont pas possibles, ou bien où elles se simplifient, l'auteur s'occupe dans le § 14 de la solution du problème suivant : « Trouver une forme du cinquième ordre dont le covariant hessien est donné. »

On trouve que ce problème n'admet jamais qu'une solution, le cas seul excepté où la forme donnée du sixième ordre est le cube parfait d'une forme quadratique. En même temps se trouve résolu le problème suivant : « Déterminer, lorsque cela est possible, les fonctions entières de x qui satisfont à une équation différentielle de la forme

$$y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4}{5}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = X,$$

où X désigne une fonction entière de x du sixième degré. »

Du Bois Reymond (*P.*). — Sur la région où la série de Taylor est applicable. (109-117 et 253-254).

La continuité d'une fonction et de toutes ses dérivées dans un intervalle réel ne suffit pas pour que la fonction soit développable en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable. Il suffit, pour le montrer, de considérer les exemples suivants :

1° La fonction

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{2p!} \frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2},$$

où les quantités a_p décroissent indéfiniment et ont pour limite zéro quand p augmente indéfiniment;

2° La fonction connue

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Appell (*P.*). — Développement en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle. (118-124).

Désignons par $\psi(x)$ une fonction uniforme de la variable imaginaire x ayant un point singulier essentiel à l'infini, un pôle du premier degré au point $x = 0$, et une infinité d'autres pôles tous du premier degré :

$$a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots \quad (\lim a_r = \infty \text{ pour } r = \infty),$$

et soient 1 le résidu du pôle $x = a$, R_r celui du pôle $x = a_r$. Considérons une aire S à contour simple limitée par n arcs de cercle $C_1, C_2, \ldots, C_n$, tournant tous leur convexité vers l'intérieur de l'aire et ayant pour centres respectifs les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Supposons en outre que, lorsque le point x est situé dans l'aire S, tous les points

$$x + a_1, x + a_2, \ldots, x + a_r, \ldots$$

soient situés à l'extérieur de l'aire S et à l'extérieur des cercles auxquels appartiennent les axes $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Cela posé, on a, comme répondant à l'énoncé donné dans le titre,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} A_\mu^{(k)} \psi^\mu(\alpha_k - x),$$

$$A_\mu^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\mu!} \int_{C_k} (z - \alpha_k)^\mu f(z)\, dz,$$

$$A_0^{(1)} + A_0^{(2)} + \ldots + A_0^{(n)} = 0.$$

A la fin du Mémoire se trouvent examinés des cas particuliers et aussi l'évaluation du reste.

Meyer (*F.*). — Sur l'apolarité et les courbes rationnelles. (125-137).

Noether (*M.*). — Supplément à la Note sur les courbes algébriques transformables en elles-mêmes par un faisceau de transformations univoques. (138-140).

Klein (*F.*). — Nouveaux compléments à la théorie des fonctions de Riemann. (141-218).

Suite des recherches que l'auteur a publiées à Leipzig en 1881 dans l'écrit intitulé : *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale.*

Dans la première Section, l'auteur discute la forme la plus générale de la surface de Riemann, variété fermée et à deux dimensions, avec une expression différentielle définie donnée; il donne la démonstration de l'existence sur ces surfaces d'une fonction potentielle.

La seconde Section s'occupe de l'explication du principe de la continuation analytique, principe qui permet d'étendre une fonction complexe du lieu, univoque à l'intérieur d'une variété de Riemann, à de nouvelles régions en général en nombre infini. Les formes particulières que revêt ce principe dans le cas des surfaces régulières et des surfaces symétriques sont étudiées.

Le problème de la détermination des fonctions univoques admettant des transformations linéaires se trouve posé dans la troisième Section. On examine tout d'abord les fonctions qui demeurent invariables par les répétitions d'une seule et même substitution linéaire; puis on revient à nouveau sur les divisions en régions déjà traitées et qui résultent de la considération des corps réguliers, des fonctions doublement périodiques et aussi de la reproduction symétrique d'un triangle dont les côtés sont des arcs de cercle.

Dans ce cas, l'auteur s'occupe plus spécialement de l'étude de la détermination des fonctions pour lesquelles un cercle réel est la limite naturelle. Après avoir découpé la surface de Riemann de genre p et à n points de ramification, l'auteur montre quels sont les domaines fondamentaux pour la fonction η correspondant à ce mode de division et il établit ce théorème que, pour des cercles fondamentaux donnés, un tel domaine dépend de $6p + 2n - 1$ constantes arbitraires. Il reconnaît ensuite qu'il n'y a en réalité que $6p + 2n - 6$ constantes indépendantes. L'emploi de la méthode des variations des constantes permet d'arriver à des résultats plus généraux.

Dans la quatrième Section est indiquée la démonstration du théorème fondamental suivant : « Sur toute surface de Riemann existe toujours une et une seule fonction normale de type quelconque donnés. »

Enfin, dans la dernière Section, l'auteur compare les nouvelles fonctions η avec les fonctions elliptiques et cette comparaison permet de comprendre sous une forme complètement générale l'étude des modules des surfaces de Riemann.

Staude (*O.*). — Sur les polygones géodésiques situés sur les surfaces du second degré. (219-252).

Dans un travail précédent intitulé : *Ueber Faden-Constructionen des Ellipsoïds*, l'auteur avait donné une belle application des intégrales hyperelliptiques aux systèmes de surfaces du second degré.

Il emploie ici les mêmes considérations à l'étude du problème de fermeture des polygones géodésiques situés sur les surfaces, problème analogue à celui traité par Poncelet, pour les coniques. Au moyen de l'équation différentielle de Jacobi, il arrive à établir, pour l'ellipsoïde tout d'abord, des théorèmes relatifs aux polygones fermés circonscrits à une ligne de courbure et inscrits dans une autre. Les différentes formes de polygones géodésiques se trouvent établis. Ces recherches s'étendent immédiatement à l'hyperboloïde à deux nappes; l'hyperboloïde à une nappe exige des considérations spéciales.

Du Bois-Reymond (*P.*). — Sur la multiplication de Despeyrous pour l'équation différentielle elliptique. (285-266).

Enneper (*A.*). — Remarques sur quelques transformations de surfaces. (267-298).

On peut considérer les transformations connues d'une surface en sa polaire réciproque, en sa podaire et inversement, la transformation par rayons vecteurs réciproques et aussi une transformation donnée par Catalan comme des cas particuliers du problème plus général suivant : « Les points correspondants P et P_1 de deux surfaces S et S_1 doivent relativement à un point fixe O se correspondre de telle sorte que le plan passant par O, P et P_1 contienne les normales aux points P et P_1 aux surfaces S et S_1. »

Après avoir établi les équations générales résultant de ces conditions, l'auteur discute complètement ses résultats et traite de plus ces deux problèmes particuliers :

» 1° Les angles que les rayons vecteurs OP et OP_1 font respectivement avec les normales doivent être, ou bien égaux, ou complémentaires.

» 2° Sous quelles conditions correspondent, par une telle transformation, à des courbes de courbure de la première surface des courbes de même espèce sur la seconde surface.

Kantor (*S.*). — Sur une configuration (3, 3), et sur les courbes unicursales du quatrième ordre. (299-303).

Meissel. — Sur la quantité des nombres premiers. (304).

Trois corrections au Mémoire de l'auteur contenu dans le troisième Volume des *Math. Annalen.*

Harnack (*Ax.*). — Application de la série de Fourier à la théorie des fonctions d'une variable complexe. (305-326).

Ce théorème fondamental que toute fonction régulière d'une variable complexe doit être représentable par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable, à l'intérieur de la région pour laquelle elle est définie, se trouve ici démontré de la façon directe suivante :

Soit une fonction $w = u + iv$ donnée, univoque et continue à l'intérieur d'une portion du plan ; on suppose que ses dérivées premières par rapport à x et à y sont aussi, dans la même région, univoques et continues, et qu'elles satisfont aux équations

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Si l'on imagine un système de cercles concentriques autour d'un certain point α, β et situés à l'intérieur de la région donnée, sur un quelconque de ces cercles les fonctions u et v seront représentables par une série de Fourier, puisque ces fonctions ne sont pas seulement continues, mais qu'il en est de même de leurs premières dérivées. On peut donc poser

$$u(r, \theta) = \mathfrak{B}_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (\mathfrak{A}_k \sin k\theta + \mathfrak{B}_k \cos k\theta),$$

$$v(r, \theta) = B_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k \sin k\theta + B_k \cos k\theta),$$

où les coefficients se présentent sous la forme connue d'intégrales de Fourier.

Des équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0,$$

on peut déduire des équations de la forme

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \sin k\theta \, d\theta - \frac{1}{r}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin k\theta \, d\theta = 0, \quad \ldots,$$

et l'on en déduit par de simples transformations le système

$$r\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial r} + kB_k = 0, \quad r\frac{\partial \mathfrak{B}_k}{\partial r} - kA_k = 0, \quad r\frac{\partial A_k}{\partial r} - k\mathfrak{B}_k = 0, \quad r\frac{\partial B_k}{\partial r} + k\mathfrak{A}_k = 0.$$

Il en résulte

$$\mathfrak{A}_k = -C'_k r^k + D'_k r^{-k}, \quad \mathfrak{B}_k = C_k r^k + D_k r^{-k},$$
$$A_k = C_k r^k - D_k r^{-k}, \quad B_k = C'_k r^k + D'_k r^{-k},$$

où C_k, C'_k, D_k, D'_k sont des constantes. Les dernières doivent être nulles si l'on a affaire pour $r = 0$ à une fonction finie ; on a donc

$$w = u + iv = C_0 + iC'_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (C_k + iC'_k) r^k e^{ik\theta}.$$

Dans son Mémoire l'auteur considère aussi le cas où existent des pôles ; il s'occupe de la détermination des conditions à imposer aux fonctions et enfin de la formation d'une fonction pour laquelle on a donné les valeurs le long d'une circonférence

Pringsheim (*A.*). — Sur la multiplication des séries non absolues. (327-378).

Nouvelles conditions sans lesquelles subsiste la règle de multiplication de Cauchy pour deux séries infinies, dans le cas où aucune des deux séries n'est absolument convergente.

Sturm (*R.*). — Un théorème analogue à celui de Gauss sur la courbure des surfaces. (379-384).

Prenons le point P de la surface pour centre d'une sphère qui détache sur la surface une courbe p, construisons la représentation sphérique p' de cette courbe obtenue sur une sphère de rayon égal à l'unité en menant par son centre les rayons parallèles aux normales à la surface le long de la courbe p; la limite du rapport des deux périmètres p' et p est égale précisément à la courbure moyenne de la surface

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Wiltheiss (*E.*). — Sur la multiplication complexe des fonctions hyperelliptiques de deux arguments. (385-398).

Noether (*M.*). — Sur une surface du sixième ordre de genre — 1. (399-410).

Lüroth (*J.*). — Sur un développement univoque des nombres en série infinie. (411-423).

König (*J.*). — Compléments à la théorie des équations algébriques. (424-433).

§ 1. Les résolvantes d'une équation donnée.

§ 3. Critériums généraux de solubilité algébrique.

§ 3. Sur les facteurs irréductibles dont le degré est puissance d'un nombre premier.

§ 4. Sur une classe spéciale d'équations solubles algébriquement.

Meyer (*Franz*). — Une nouvelle forme canonique des groupes de formes binaires. (434-430).

Meyer (*Franz*). — Un théorème sur les identités linéaires entre les carrés des formes binaires. (441-445).

En général $d+1$ formes binaires de degré d déterminent d'une façon univoque $2^d-(d+1)=\delta$ autres formes de même espèce, les δ formes ainsi obtenues étant telles que non seulement entre les 2^d formes ainsi établies, mais aussi entre leurs carrés, il existe δ identités linéaires.

Sturm (*R.*). — Sur le facteur intégrant de l'équation différentielle elliptique. (446-453).

Discussion du facteur intégrant pour la forme générale de l'équation différentielle et remarques hisioriques sur les travaux d'Euler, Lagrange, Despeyrous.

Koenigsberger (*L.*). — Remarque sur la forme des intégrales algébriques des équations différentielles linéaires. (454-456).

Sturm (*R.*). — Sur les courbes situées sur la surface générale du troisième ordre. (457-514).

Recherches détaillées sur les limites du genre des courbes de degré donné tracées sur une surface cubique, et aussi sur le nombre des espèces possibles.

Comme supplément à son Mémoire, l'auteur examine les courbes tracées sur deux surfaces particulières du quatrième ordre.

Schur (*F.*). — Sur un théorème relatif au système de deux surfaces du second ordre et sur un complexe du deuxième ordre qui se présente dans cette question. (515-527).

Meyer (*F.*). — Un nouveau principe de transport pour les formes binaires dont l'ordre n'est pas un nombre premier. (528-544).

Cantor (*G.*). — Sur les ensembles infinis et linéaires de points. Cinquième article. (544-591).

Dans ce travail l'auteur se propose de condenser et de généraliser les résultats qu'il avait jusque-là obtenus dans la théorie des ensembles.

Considérations de caractère un peu philosophique sur l'infini et la généralisation dont est susceptible l'infini.

Définition des classes de nombres, de leur puissance. Considération des systèmes bien définis et des systèmes bien ordonnés.

L'auteur s'occupe enfin des opérations arithmétiques effectuées sur les nombres infinis et montre que les puissances des différentes classes de nombre forment un système bien ordonné.

Ax. H.

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS.

Tome XIX; 1883 (1).

Cayley. — Sur les coordonnées curvilignes. (1-21).

---

(1) Voir *Bulletin*, VIII, 47.

Ce Mémoire se rapporte à un travail de M. Warren : *Exercises in curvilinear and normal coordinates*, inséré dans les *Transactions philosophiques* de Cambridge (t. XII, p. 453; 1877). M. Cayley, par une marche très simple, établit, dans le cas des coordonnées quelconques, six équations différentielles obtenues par M. Warren dans le cas des coordonnées orthogonales.

Soient x, y, z et p, q, r deux systèmes de coordonnées; désignons par les indices 1, 2, 3 attribués à une quantité quelconque les dérivées de cette quantité prises par rapport à p, q, r et soit

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (a, b, c, f, g, h)(dx, dy, dz)^2.$$

Les six combinaisons

$$\begin{aligned}
&b_{33} + c_{33} - 2 f_{23},\\
&c_{11} + a_{33} - 2 g_{31},\\
&a_{22} + b_{11} - 2 b_{12},\\
&g_{12} + h_{31} - a_{23} - f_{11},\\
&b_{23} + f_{12} - b_{31} - g_{22},\\
&f_{31} + g_{23} - c_{12} - b_{33}
\end{aligned}$$

s'expriment au moyen des premières dérivées des quantités a, b, c, f, g, h et de ces quantités elles-mêmes. Ce sont ces expressions qu'a établies M. Cayley. (*Cf.* Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, p. 76, etc.)

Glaisher. — Sur certaines formules de la théorie des fonctions elliptiques. (22-38).

On a rendu compte, dans la première Partie du Bulletin, de ce travail et de plusieurs autres insérés dans le *Quarterly Journal* sous des titres analogues.

Cayley. — Note sur les solutions normales d'un système d'équations linéaires. (38-40).

Legoux. — Sur une application d'un déterminant. (41-43).

Résolution des équations du troisième et du quatrième degré en partant de cette remarque, due à M. Glaisher, que le déterminant

$$\begin{vmatrix}
x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1}\\
a_{n-1} & x & a_1 & \dots & a_{n-2}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x
\end{vmatrix}$$

est le produit des facteurs linéaires

$$\begin{aligned}
&x + a_1\omega + a_2\omega^2 + \dots + a_{n-1}\omega^{n-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x + a_1\omega^n + a_2\omega^{2n} + \dots + a_{n-1}\omega^{n(n-1)},
\end{aligned}$$

où ω est une racine primitive de l'équation $x^n - 1 = 0$.

Jeffery. — Sur les cycloïdes et les trochoïdes sphériques. (44-66).

Calcul des rayons de courbure; rectification, quadrature, développées, etc., de ces courbes.

Lamb. — Sur les forces auxquelles est soumis un solide qui se meut dans un fluide indéfini. (66-70).

Expression des composantes suivant les axes coordonnés de la résultante et de l'axe du couple résultant des forces dues à la pression, déduite des formules fondamentales de l'Hydrodynamique.

Glaisher. — Expressions de arg. sn$x$ et de (arg. sn$x$)^2 au moyen d'intégrales définies. (71-74).

Cox. — Sur les systèmes de cercles et les quartiques bicirculaires. (74-124).

L'auteur définit l'addition et la multiplication de deux cercles dans le sens des idées émises par Grassmann dans son *Ausdehnungslehre*. Si S_1, S_2, S_3 sont les puissances d'un point quelconque par rapport aux trois cercles C_1, C_2, C_3 et si p, q sont des nombres, l'auteur écrit

$$(p+q)C_3 = pC_1 + qC_2;$$

si l'on a identiquement

$$(p+q)S_3 = pS_1 + qS_2,$$

le produit de deux cercles est la différence entre la somme des carrés des rayons et le carré de la distance des centres.

L'addition est une opération associative et commutative; la multiplication est commutative et distributive. L'auteur étend par ces considérations à la figure formée par trois cercles qui passent par un même point diverses propriétés relatives au triangle ordinaire. Il donne ensuite la réduction de l'équation générale d'une quartique bicirculaire et démontre les propriétés les plus connues de cette courbe.

Forsyth. — Note sur une équation différentielle due à Kummer. (125-131).

En partant de l'équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle satisfont les quantités K et K′ de la théorie des fonctions elliptiques et de l'équation différentielle du troisième ordre que vérifie ce rapport de deux solutions d'une équation linéaire du second ordre, l'auteur établit la relation connue

$$\frac{1}{q}\frac{dq}{dc} = \frac{\pi^2}{4k^2}\,\frac{1}{c(1-c)},$$

où $c = k^2$.

Cayley. — Sur les semi-invariants. (131-139).

Si l'on considère la suite indéfinie des formes binaires

$$(a, b, c)(x, y)^2 \quad (a, b, c, d)(x, y)^3, \quad \ldots,$$

un semi-invariant en une fonction des quantités $a, b, c, \ldots$, qui se réduit à zéro par l'opération,

$$\Delta = a\frac{\partial}{\partial b} + 2b\frac{\partial}{\partial c} + 3c\frac{\partial}{\partial d} + \ldots.$$

M. Cayley montre comment on peut déterminer le nombre des semi-invariants asyzygétiques de degré et de poids donnés.

Anglin. — Expression de l'aire d'un quadrilatère convexe dans lequel on donne la somme de deux angles opposés. (138-139).

Stearn. — Note sur l'énergie de déformation dans un solide isotrope. (140).

Glaisher. — Note sur le temps de descente d'un arc de parabole verticale. (141-145).

Ce temps s'exprime par des intégrales elliptiques; la réduction est effectuée par l'auteur d'une façon très simple.

Glaisher. — Sur un système d'intégrales contenant des fonctions elliptiques. (145-157).

Mac-Mahon. — Sur l'équation différentielle

$$X^{-\frac{2}{3}}dx + Y^{-\frac{2}{3}}dy + Z^{-\frac{2}{3}}dz = 0.$$

(158-182).

Si l'on pose

$$X = A + 3Bx + 3Cx^2 + Dx^3,$$
$$Y = A + 3By + 3Cy^2 + Dy^3,$$
$$Z = A + 3Bz + 3Cz^2 + Dz^3,$$

l'équation

$$XYZ = [A + B(x + y + z) + C(xy + yz + zx) + Dxyz]^3,$$

où l'on regarde z comme une constante arbitraire, est l'intégrale générale de l'équation

$$X^{-\frac{2}{3}}dx + Y^{-\frac{2}{3}}dy = 0.$$

Cayley. — Note sur le précédent Mémoire. (182-184).

M. Cayley montre que le résultat obtenu par M. le capitaine Mac-Mahon se déduit du théorème d'Abel en écrivant que trois points d'une cubique sont en ligne droite.

Johnson. — Note sur le triangle sphérique et les fonctions elliptiques. (185-188).

Quand on déduit le théorème d'addition des fonctions elliptiques de la formule fondamentale de Trigonométrie sphérique, on suppose habituellement le module k inférieur à 1 et l'un des angles du triangle sphérique obtus; M. Johnson montre comment on peut s'affranchir de cette restriction.

Note sur les *Acta Mathematica.* (189).

Basset. — Sur le mouvement d'un liquide à l'intérieur et à l'extérieur de cylindres dont les sections transverses sont les courbes inverses d'ellipses homofocales par rapport à leur centre. (190-212).

Glaisher. — Note sur la décomposition d'un nombre en une somme de deux ou de quatre carrés impairs. (212-215).

Sur les relations entre les décompositions des nombres 4N et 2N en une somme de quatre ou de deux carrés.

Glaisher. — Théorèmes relatifs à la somme des diviseurs impairs d'un nombre. (216-223).

L'auteur désigne par $\Delta(n)$ cette somme et indique diverses relations où figure cette fonction; par exemple, on a

$$\Delta(1)\Delta(n-1)+\Delta(3)\Delta(n-3)+\ldots+\Delta(n-1)\Delta(1)=2^{3r-3}\times S,$$

où n est un nombre pair divisible par 2^r et non divisible par 2^{r+1} et où S est la somme des cubes des diviseurs impairs de n.

L'une des formules de M. Glaisher est déduite de l'identité

$$\frac{\psi(1)q+3\psi(3)q^3+5\psi(5)q^5+\ldots}{\psi(1)q+\psi(3)q^3+\psi(5)q^5+\ldots}=\frac{1+qq^2+25q^6+4qq^{12}+\ldots}{1+q^3+q^6+q^{12}+\ldots}$$

qui provient elle-même de la relation bien connue

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=2q^{\frac{1}{4}}+2q^{\frac{9}{4}}+2q^{\frac{25}{4}}+\ldots.$$

Cayley. — Sur la formule de M. Anglin pour les puissances successives des racines d'une équation algébrique. (223-224).

M. Cayley établit cette formule sous la forme que voici :

$$\begin{aligned}
x^{m+\theta}=\;& h_{\theta+1}x^{m-1}\\
&+(h_\theta p_2-h_{\theta-1}p_2+\ldots)x^{m-2}\\
&+(h_\theta p_3-h_{\theta-1}p_3+\ldots)x^{m-3}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(-1)^{s-1}(h_\theta p_s-h_{\theta-1}p_{s+1}+\ldots)x^{m-s}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(-1)^{m-1}h_\theta p_m.
\end{aligned}$$

où $h_0 = 1$, où h_i $(i \leq m)$ est la somme des produits homogènes d'ordre i des racines de l'équation

$$x^m - p_1 x^{m-1} + \ldots + (-1)^m p_m = 0,$$

où enfin les sommes qui figurent comme coefficients des puissances de x sont continuées jusqu'aux termes qui conviennent p_m ou h_0.

Greenhill. — Revision des chapitres XXIV et XXVI du premier Volume des *Fonctions elliptiques* de Legendre. (125-242).

Ces Chapitres sont rédigés à nouveau, avec la notation moderne; ils sont ainsi grandement simplifiés.

Prost. — Sur certaines intégrales définies relatives aux fonctions sphériques. (242-256).

Ces intégrales sont obtenues en comparant deux formes d'un potentiel, par exemple le potentiel d'un ellipsoïde de révolution relatif à un point de l'axe de révolution, tel qu'on l'obtient par un calcul direct et l'expression de ce potentiel déduite de celle qui convient pour un ellipsoïde à trois axes inégaux.

Lodge. — Sur la solution de l'équation générale du quatrième degré (257-262).

La méthode de résolution repose sur le fait analytique dont M. Legoux était aussi parti.

Routh. — Méthode pour exprimer une constante arbitraire particulière au moyen des données initiales dans la solution d'une équation différentielle linéaire. (262-292).

L'équation est supposée à coefficients constants. L'auteur traite le cas où l'on connaît l'une des racines (simple ou multiple) de l'équation déterminante sans connaître les autres.

Forsyth. — Sur les équations différentielles linéaires, en particulier sur celle que vérifie la série

$$1 + \frac{\alpha\beta\theta}{\gamma\varepsilon} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\theta(\theta-1)}{1.2\,\gamma(\gamma+1)\varepsilon(\varepsilon+1)} x^2 + \ldots$$

(292-337).

Ce Mémoire contient une étude de la série ci-dessus, les relations entre de telles séries pour des valeurs contiguës des éléments α, β, θ, γ, ε, diverses for-

mules sommatoires analogues à celle que voici:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\sum_{\beta=1}^{\beta=\infty}\sum_{\gamma=1}^{\gamma=\infty} u^\alpha v^\beta z^\gamma F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$
$$= \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{p=1}^{p=\infty}\sum_{r=1}^{r=\infty} x^m v^p z^r \frac{p+m-1!\,r-1!}{r+m-1!\,p-1!}\,\frac{u}{(1-u)^{m+1}},$$

puis l'expression de la dernière solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n au moyen des $n-1$ autres, l'application à l'équation différentielle linéaire du troisième ordre que vérifie la série hypergéométrique du second ordre de la méthode employée par M. Kummer pour l'équation de Gauss, enfin la formation de l'équation différentielle à laquelle satisfait le quotient de deux solutions d'une équation différentielle linéaire du troisième ordre.

Mac-Mahon. — Sur la forme canonique due à M. Cayley. (337-341).

Expression au moyen des semi-invariants d'une forme binaire du $n^{\text{ième}}$ ordre des coefficients de l'équation correspondante où l'on a fait disparaître le terme du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre.

Tucker. — Sur le cercle de la raison triple. (342-348).

C'est un cercle qui intercepte sur les côtés d'un triangle des segments proportionnels aux cubes de ses côtés.

Basset. — Sur certains problèmes physiques relatifs aux surfaces inverses des ellipsoïdes de révolution. (349-374).

Rink. — Sur quelques intégrales abéliennes.

Examen des cas dans lesquels l'équation différentielle

$$\frac{dx_1}{\sqrt[n]{[R(x_1)]^k}} + \frac{dx_2}{\sqrt[n]{[R(x_2)]^k}} = 0,$$

où

$$[R(x)]^k = (x-a_1)^{\mu_1}(x-a_2)^{\mu_2}\ldots(x-a_n)^{\mu_n}$$

admet une intégrale algébrique.

Larmor. — Sur les lignes de striction. (381-384).

MONATSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

Année 1880 (¹).

Kronecker. — Sur l'irréductibilité des équations. (155-162).

L'auteur énonce au début la proposition que voici :

Soit $F(x)$ une fonction entière à coefficients entiers de la variable x, soit ν_p le nombre de racines (distinctes ou égales) de la congruence $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$, la somme

$$\sum \nu_p p^{-1-w},$$

étendue à tous les nombres premiers p, tend, lorsque le nombre positif w s'approche de zéro, à devenir proportionnelle à $\log \frac{1}{w}$ et, d'une façon plus précise, à devenir égale à $\log \frac{1}{w}$ multiplié par le nombre de facteurs irréductibles de $F(x)$.

M. Kronecker introduit ensuite, pour certains nombres premiers, la notion de densité : si p_k désigne chaque nombre premier pour lequel la congruence ci-dessus admette k racines, la densité D_k des nombres p_k sera la limite du rapport à $\log \frac{1}{w}$ de la somme

$$\Sigma p_k^{-1-w},$$

en sorte que, en vertu du théorème énoncé, les équations irréductibles $F(x) = 0$ sont caractérisées par l'équation

$$\sum_{k=1}^{k=n} k D_k = 1.$$

Il rattache la démonstration du théorème fondamental pour le cas des équations relatives à la division du cercle aux travaux de M. Kummer (*Journal de Liouville*, t. XVI, § VIII). Il donne enfin quelques indications relatives à ces équations $F(x) = 0$, à coefficients entiers, qu'il a étudiées dans une Communication déjà ancienne (*Monatsberichte*, juin 1862), auxquelles conduit la considération des modules singuliers des fonctions elliptiques; la théorie de ces équations se lie à la recherche du nombre de classes de formes quadratiques $ax^2 + bxy + cy^2$ qui admettent un même discriminant négatif $D = b^2 - 4ac$.

Oppolzer. — Sur les éclipses du Schu-King. (166-185).

Kronecker. — Sur les restes de puissances de certains nombres complexes. (404-407).

(¹) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 243.

L'auteur débute par quelques considérations historiques relatives à la loi de réciprocité; Euler l'a énoncée sous la forme élégante qu'on lui donne aujourd'hui en 1783, après avoir observé depuis longtemps que les diviseurs premiers d'une forme quadratique de discriminant D étaient contenus dans certaines formes linéaires $mD + n$; M. Kronecker insiste sur l'importance du premier point de vue auquel Euler s'était placé, importance qui s'est montrée nettement dans ses propres recherches sur la théorie arithmétique des modules singuliers et des restes de puissances des nombres complexes.

Les équations abéliennes auxquelles conduit la théorie des modules singuliers, permettant, absolument comme dans la théorie de la division du cercle, de déterminer de deux façons différentes les diviseurs premiers pour lesquels ces équations, considérées comme des congruences, admettent des racines. Ces deux modes de détermination, par l'identification des résultats, conduisent, pour les équations quadratiques à la loi de réciprocité et, dans le cas le plus général des équations de la théorie de la division du cercle, à des relations de réciprocité qui, au moins pour le cas des restes cubiques et biquadratiques, suffisent pour établir complètement la loi de réciprocité généralisée. De ce point de vue, on embrasse l'ensemble des développements donnés par Gauss dans sa sixième démonstration de la loi de réciprocité pour les restes quadratiques, et les preuves données par Jacobi, Eisenstein et quelques autres pour les restes de puissances plus élevées.

M. Kronecker développe le cas des restes quadratiques, puis termine en étudiant, comme exemple relatif à la théorie des modules singuliers, l'équation

$$F(x) = (x^3 - 10x)^2 + 31(x^2 - 1)^2 = 0,$$

dont les racines déterminent l'espèce des modules singuliers pour $\sqrt{-31}$.

Oppolzer. — Sur la détermination des grandes anomalies vraies dans le mouvement parabolique. (511-515).

Kirchhoff. — Sur la mesure des conductibilités électriques. (601-613).

Kronecker. — Sur la quatrième preuve donnée par Gauss de la loi de réciprocité pour les restes quadratiques. (686-698; 854-860).

Cette preuve est celle qui se trouve dans le célèbre Mémoire intitulé *Summatio quarumdam serierum singularium* (1808). La source des identités algébriques qui permettent la sommation des séries de Gauss restait ignorée.

En 1857 (*Journal de Crelle*, t. 17), Dirichlet est parvenu à cette sommation par la considération d'une intégrale définie. Peu de temps après (1840), Cauchy obtint de son côté (*Journal de Liouville*, t. V) la détermination complète des séries de Gauss; c'est dans la méthode de Cauchy que M. Kronecker trouve la véritable solution du problème : elle met en effet en évidence le lieu qui existe entre la transformation linéaire des séries θ et la détermination des séries de

Gauss; ce lieu est même plus étroit que Cauchy ne l'avait cru : on peut passer indifféremment de l'un des problèmes à l'autre. C'est ce que l'auteur développe dans la suite.

Après quelques développements relatifs au théorème fondamental qui concerne les intégrales prises entre des limites imaginaires, M. Kronecker applique la formule

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

à la fonction

$$F(z) = \sum u^{(\log z)^2},$$

où le module de u est supposé plus grand que 1 et où la sommation s'étend à toutes les valeurs de $\log z$; on est ainsi conduit au développement de $F(z)$ suivant les puissances entières positives et négatives de z et, après quelques transformations, on arrive à la formule suivante

$$\sum u^{(\log z)^2} = \sqrt{\log v} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} v^{-n^2\pi} z^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\,dx,$$

où l'on suppose

$$4\pi \log v \log u = 1$$

et où l'argument de la racine carrée doit être pris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; cette équation, si l'on y fait

$$x = u^{-4\pi}, \quad y = v^{-1},$$

donne

$$(1) \qquad \sqrt{\log\frac{1}{x}}\;\frac{\Sigma x^{-\frac{1}{4\pi}(\log z + 2n i\pi)^2}}{\Sigma y^{n^2\pi} z^n} = 1,$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs de n depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et où

$$\log x \log y = 1.$$

En supposant maintenant

$$-\log x = w^2 + \frac{\lambda i}{\mu},$$

λ et μ étant des nombres entiers, on obtient directement

$$\lim_{w=0} (\mu w)\,\Sigma x^{n^2\pi} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{-k^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\,dx,$$

où (μw) désigne la valeur absolue de μw; en d'autres termes, si l'on désigne par

$$2G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right)$$

la somme

$$\sum e^{-k^2 \frac{\lambda \pi i}{\mu}}$$

étendue à tous les éléments k d'un système complet de restes relatifs au module 2μ, on aura

$$\lim_{w=0} (\mu w) \Sigma x^{n^2 \pi} = G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right);$$

de même

$$\lim_{w=0} (\mu w) \Sigma y^{\pi^2 \pi} = G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right),$$

et l'application de la formule (1), pour $z = 1$, conduit à la formule

$$(2) \qquad \frac{G(\rho)}{G\left(\frac{1}{\rho}\right)} = 1,$$

valable pour toutes les valeurs de ρ rationnelles et purement imaginaires.

Les propriétés fondamentales des séries de Gauss permettent ensuite de déduire la loi de réciprocité de l'équation (2).

M. Kronecker montre inversement que de l'équation (2) on peut déduire l'équation que l'on déduit de l'équation (1) en y faisant $z = 1$, puis, de cette dernière équation, l'équation (1) elle-même. Finalement l'application répétée de cette même équation conduit à la formule la plus générale de transformation linéaire des séries θ, à savoir.

$$\vartheta\left(\frac{\zeta}{\gamma\tau + \delta}, \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) = C(\sqrt{\gamma\tau + \delta})\, e^{\frac{\gamma\zeta^2}{\gamma\tau + \delta}\pi i}\, \vartheta(\zeta, \tau),$$

où

$$\vartheta(\zeta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau^2 + (2n+1)\zeta - \left(n+\frac{1}{2}\right)\right]},$$

où les nombres entiers α, β, γ, δ vérifient l'équation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, où enfin

$$C = G\left(\frac{\beta i}{\delta}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\alpha i}{\gamma}\right),$$

selon que $\beta + \delta$ est impair ou pair. Une Communication ultérieure contient quelques développements sur le même sujet.

Weierstrass. — Sur un théorème de M. Mittag-Leffler concernant la théorie des fonctions. (707-717).

Cette Communication a été traduite dans le *Bulletin,* ainsi que la suivante.

Weierstrass. — Sur la théorie des fonctions. (719-743).

Kummer. — Sur les équations cubiques et biquadratiques, telles que les extractions de racines carrées et cubiques que nécessite leur résolution s'effectuent rationnellement. (930-936).

Les équations du troisième degré, à coefficients rationnels, qui ont une racine rationnelle que l'on peut obtenir par les formules de Cardan, en sorte que les extractions de racines s'effectuent rationnellement, ont leurs trois racines de la forme

$$\alpha, \quad \beta + \gamma\sqrt{-3}, \quad \beta - \gamma\sqrt{-3},$$

α, β, γ étant des nombres rationnels.

Les équations du quatrième degré à coefficients rationnels, qui ont une racine rationnelle que l'on peut obtenir par la méthode générale de résolution de l'équation du quatrième degré, en sorte que toutes les extractions de racines s'effectuent rationnellement, ont une seconde racine rationnelle et ont leur quatre racines de la forme

$$\alpha, \beta, \gamma + \delta\sqrt{-3}, \gamma - \delta\sqrt{-3},$$

α, β, γ, δ étant des nombres rationnels.

Kronecker. — Sur les fonctions symétriques. (936-948).

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_m$ les fonctions symétriques élémentaires des m quantités $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $g_1, g_2, \ldots, g_n$ les fonctions symétriques élémentaires des n quantités $y_1, y_2, \ldots, y_n$; on aura identiquement

$$(1) \quad \prod_{k=1}^{k=n} (1 + f_1 y_k + f_2 y_k^2 + \ldots + f_m y_k^m) = \prod_{i=1}^{i=m} (1 + g_1 x_i + g_2 x_i^2 + \ldots + g_n x_i^n).$$

Dans cette identité le premier membre se présente comme une fonction entière des fonctions f et le coefficient de

$$f_a^\alpha f_b^\beta f_c^\gamma \ldots$$

est une fonction symétrique des quantités $y_1, y_2, \ldots, y_n$ que l'on peut représenter par

$$\sum \begin{pmatrix} a, b, c, \ldots, \\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \end{pmatrix};$$

toutes les fonctions symétriques entières de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ s'obtiennent en ajoutant de telles fonctions; le second membre doit, comme le premier, être une fonction entière des quantités f; si donc on admet, d'une part, que les quantités g sont indépendantes entre elles, que, d'autre part, les différents produits formés avec les puissances de fonctions symétriques élémentaires sont linéairement indépendants, au sens des congruences, par rapport à un module entier quelconque, la simple considération de l'identité (1) montre que les fonc-

tions symétriques des x qui figurent comme coefficients des termes, tels que

$$g_r^\rho g_s^\sigma g_t^\tau \cdots$$

sont des fonctions entières à coefficients entiers des quantités f.

Quant aux propositions admises, elles se démontrent simultanément, soit par induction, soit par cette simple et importante remarque que, par la substitution

$$x_i = v g^{i-1},$$

l'expression

$$f_a^\alpha f_b^\beta f_c^\gamma \cdots$$

devient une fonction entière à coefficients entiers de v dans laquelle le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1, et dans laquelle, pourvu que g soit assez grand, le degré change dès que l'on change l'un quelconque des nombres $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Il suffit, pour s'en assurer, de se rappeler qu'on ne peut écrire un nombre entier, dans une basse donnée g, que d'une seule manière. Ce que l'on vient de dire du terme du plus haut degré s'applique d'ailleurs au terme de degré moindre ; le degré minimum est égal à

$$\frac{1}{g-1}(\alpha g^a + \beta g^b + \gamma g^c + \ldots - \alpha - \beta - \gamma - \ldots);$$

sa considération permet de ranger par ordre les quantités

$$\sum \begin{pmatrix} a, & b, & c, & \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots \end{pmatrix};$$

une quelconque de ces quantités précédera une autre, lorsque le degré minimum correspondant à la première sera inférieur au degré minimum correspondant à la seconde. Si maintenant on considère le développement du produit

$$(2) \qquad \Pi(1 + g_1 v^{g^{i-1}} + g_2 v^{2g^{i-1}} + \ldots + g_n v^{ng^{i-1}}) \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

on aperçoit de suite que le coefficient

$$S \begin{pmatrix} a, & b, & c, & \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots \end{pmatrix}$$

du terme en v dont le degré est

$$\frac{1}{g-1}(\alpha g^a + \beta_g^b + \gamma g^c + \ldots - \alpha - \beta - \gamma - \ldots)$$

est une fonction linéaire à coefficients entiers de la fonction

$$\sum \begin{pmatrix} a, & b, & c, & \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots \end{pmatrix}$$

et de celles qui la précèdent, le coefficient de $\sum \begin{pmatrix} a, & b, & c, & \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots \end{pmatrix}$ étant égal à l'unité, en sorte que chaque fonction symétrique à coefficients entiers des quantités $y_1, y_2, \ldots, y_n$ est une fonction entière à coefficients entiers des fonctions S et

par conséquent des quantités g. Ainsi l'expression (2) peut être regardée comme une fonction *génératrice* des fonctions symétriques de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Dans le reste de sa Communication, M. Kronecker donne quelques détails sur le développement du produit (2); il insiste sur l'importance du procédé expliqué précédemment pour *ranger* les fonctions symétriques; il montre enfin comment ce procédé peut se généraliser.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome XCIX; 1884 (1).

N° 1; 7 juillet.

De Saint-Venant. — Remarques relatives à la Note de M. Berthot sur les actions mutuelles entre les molécules des corps. (5-7).

L'auteur signale l'analogie de la formule de M. Berthot (*Comptes rendus*, 30 juin 1884, p. 1570) avec celle qu'il a donnée dans une note de son Mémoire *Sur la constitution des atomes* (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1877-78, p. 453)

$$f(r) = 4p\left(\frac{r_0^2}{r^2} - \frac{r_0^4}{r^4}\right);$$

r désigne la distance de deux molécules, $f(r)$ leur action mutuelle, p sa plus grande valeur positive, qui correspond à $r = r_0\sqrt{2}$.

Sylvester. — Sur les équations monothétiques. (13-15).

Il s'agit des équations dont tous les coefficients sont fonctions d'une même matrice m. On peut résoudre une telle équation en regardant x comme fonction de m : en désignant par n le degré de l'équation, par ω l'ordre de la matrice, on trouvera n^ω racines parfaitement déterminées. Mais il peut exister d'autres racines, qui ne sont pas fonctions de m, et que M. Sylvester nomme *aberrantes*.

Ainsi l'équation en matrices binaires

$$x^2 - px = 0$$

admet d'abord les solutions normales

$$x = 0, \quad x = p, \quad x = r\frac{p-s}{r-s}, \quad x = s\frac{p-r}{s-r},$$

où r, s sont les racines latentes de p.

(1) Voir *Bulletin*, p. 51 du présent Volume.

Si l'on pose

$$p = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix},$$

elle admet en outre la solution aberrante

$$x = \left\{ \begin{matrix} -\lambda(d-r) & \lambda b \\ \mu c & -\mu(a-r) \end{matrix} \right\},$$

où figure une indéterminée et une seule, puisque λ et μ sont liés par la relation

$$\lambda(d-r) + \mu(a-r) + r = 0.$$

Quand on prend $\lambda = \mu$, on retombe sur les deux valeurs normales

$$x = r\frac{p-s}{r-s}, \quad x = s\frac{p-r}{s-r}.$$

Si l'on a simultanément $b = 0$, $c = 0$, $a - d = 0$, l'indétermination reparaît : on a même un couple de racines contenant chacune deux constantes arbitraires au lieu d'une seule.

Callandreau. — Sur les développements qui se rapportent à la distance de deux points et sur quelques propriétés des fonctions sphériques. (23-26).

L'auteur se propose de généraliser la formule de Laplace

$$Z_n = X_n X'_n + \frac{2}{n(n+1)} \frac{dX_n}{dx} \cdot \frac{dX'_n}{dx'} \sin\theta \sin\theta' \cos(\pi' - \pi)$$
$$+ \frac{2}{(n-1)n(n+1)} \frac{d^2X_n}{dx^2} \frac{d^2X'_n}{dx'^2} \sin^2\theta \sin^2\theta' \cos 2(\pi' - \pi) + \ldots,$$

où Z_n désigne ce que devient le polynôme de Legendre $X_n(\cos\theta)$ quand on remplace $\cos\theta$ (ou x) par

$$\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\pi' - \pi).$$

Il construit des développements

$$Y = A_0 XX' + A_1 \frac{dX}{dx} \frac{dX'}{dx'} \sin\theta \sin\theta' P_1 + A_2 \frac{d^2X}{dx^2} \frac{d^2X'}{dx'^2} \sin^2\theta \sin^2\theta' P_2 + \ldots,$$

où les cosinus des multiples de $\pi' - \pi$, qui figurent dans la série de Laplace, sont remplacés par des polynômes $P_n[\cos(\pi' - \pi)]$ vérifiant la relation récurrente

$$\cos(\pi' - \pi) P_n = b_n P_{n-1} + c_n P_{n+1}.$$

Le problème consiste à déterminer les fonctions X et X' associées aux quantités P, et les coefficients numériques A. L'auteur résout complètement ce problème : il trouve que X vérifie une équation linéaire du second ordre

$$(x^2 - 1) \frac{d^2X}{dx^2} + gx \frac{dX}{dx} + hX = 0.$$

Cesaro. — Sur les fonctions holomorphes de genre quelconque. (26-27).

Soit une fonction holomorphe, de genre ω, à facteur exponentiel constant et n'admettant que des racines réelles $a_1, a_2, a_3, \ldots$, différentes de zéro.

M. Cesaro montre que cette *fonction et sa dérivée sont de même genre.* Il déduit ce beau théorème de l'équation

$$z^{\omega} \sum_n \frac{1}{a_n^{\omega}(z - a_n)} = 0,$$

qui donne les racines de la dérivée, en la mettant sous la forme

$$c + \sum_n \frac{x}{a_n^{\mu+1}(x - a_n)} = 0,$$

où c désigne une constante réelle, et $2\mu + 1$ celui des nombres ω, $\omega + 1$ qui est impair. On voit alors immédiatement que la dérivée a toutes ses racines réelles, et qu'entre deux racines consécutives de la fonction il existe toujours une racine de la dérivée et une seule, d'où résulte la proposition énoncée.

M. Hermite donne du théorème de M. Cesaro une démonstration fondée sur la remarque suivante : L'équation $\sum \frac{A_n}{x - a_n} = 0$, où les quantités a_n sont réelles et rangées par ordre de grandeur, a toutes ses racines réelles et comprises entre a_n et a_{n+1}, lorsque tous les produits $A_n a_n$ ont le même signe.

N° 2; 15 juillet.

De Jonquières. — Sur la règle de Newton pour trouver le nombre des racines imaginaires des équations algébriques numériques. (62-67).

Dans quatre Communications successives (15, 21, 28 juillet, 11 août), M. de Jonquières fait l'historique et la critique de la méthode de Newton, pour trouver une limite inférieure du nombre des racines imaginaires.

Tombée dans l'oubli pendant près d'un siècle, cette règle, que Newton s'était contenté d'énoncer, n'a été démontrée complètement qu'en 1865 par M. Sylvester, qui a donné, à cette occasion, deux théorèmes plus généraux.

Il reste toutefois deux points à éclaircir :

1° Lorsqu'une ou plusieurs des fonctions quadratiques qui interviennent dans l'opération sont identiquement nulles, quel signe convient-il de donner à ces fonctions ambiguës pour obtenir la plus grande précision possible? M. de Jonquières montre que c'est le signe +.

2° Peut-il arriver que la limite inférieure indiquée par la règle de Descartes pour le nombre des racines imaginaires soit plus élevée que la limite indiquée par la règle de Newton? La réponse à cette question est négative.

Voici l'énoncé de la règle de Newton, simplifié par M. de Jonquières.

« Etant donnée l'équation algébrique numérique

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_r x^{m-r} + \ldots + A_m = 0,$$

on calculera les valeurs numériques de la fonction quadratique

$$\frac{r(m-r)}{r(m-r)+m+1} \overline{A}_r^2 - A_{r-1} A_{r+1}, \quad (r = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

et l'on écrira sous le terme $A_r x^r$ le signe $+$ si la valeur de la fonction est positive ou nulle, le signe $-$ si elle est négative, et le signe $+$ sous les termes $A_0 x^m$ et A_m. Autant cette suite de signes présentera de variations, autant, *au moins*, l'équation aura de racines imaginaires.

Sylvester. — Sur l'équation en matrices $px = xq$. (67-71).

Soient p et q deux matrices de l'ordre ω. Pour que l'équation $px = xq$ soit résoluble, les éléments de p et de q doivent être liés par une équation et une seule.

Mais on reconnaît aisément que *l'équation identique* est la même en p et en q; par suite, les ω racines de q sont identiques aux ω racines de p; on aura donc, en apparence, ω équations, au lieu d'une seule, entre les éléments de p et de q.

M. Sylvester fait disparaître cette contradiction en montrant que x est alors en général une matrice vide. Le raisonnement semblerait montrer que x est vide dans tous les cas sans exception où l'équation $px = xp$ est résoluble; cette conclusion est démentie par des exemples particuliers bien connus. C'est là un nouveau paradoxe, dont M. Sylvester donne l'explication.

Poincaré. — Sur un théorème de M. Fuchs. (75-77).

Dans un travail présenté récemment à l'Académie de Berlin, M. Fuchs a étudié les conditions pour que les intégrales d'une équation différentielle algébrique du premier ordre n'aient qu'un nombre fini de points singuliers qui soient les mêmes pour toutes les intégrales. Il a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour que le nombre des points singuliers des intégrales soit fini.

Si l'on regarde la variable indépendante comme une constante, la relation algébrique entre la fonction et sa dérivée aura un certain genre p. M. Fuchs a examiné le cas de $p = 0$ et de $p = 1$. Si $p = 0$, l'équation se ramène à celle de Riccati, et par conséquent aux équations linéaires.

M. Poincaré reprend, pour les simplifier, les résultats de M. Fuchs, relatifs au cas de $p = 1$: l'équation est alors intégrable par quadratures.

Poursuivant la discussion, il montre que si, pour $p > 1$, les conditions énoncées par M. Fuchs sont réalisées, l'intégrale de l'équation différentielle est algébrique.

Chervet. — Distribution du potentiel électrique dans une plaque rectangulaire, les électrodes occupant des positions quelconques.

Soient $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ les équations des quatre côtés de la plaque, α, β les coordonnées de l'électrode négative, α', β' celles de l'électrode

positive. On aura, pour expression du potentiel au point x, y,

$$V = F\begin{pmatrix} x+\alpha \\ x+\alpha' \end{pmatrix}, y+\beta\Big) + F\begin{pmatrix} x-\alpha \\ x-\alpha' \end{pmatrix}, y+\beta\Big) + F_1\begin{pmatrix} y+\beta \\ y+\beta' \end{pmatrix}, x+\alpha'\Big) + F_1\begin{pmatrix} y-\beta \\ y-\beta' \end{pmatrix}, x+\alpha'\Big)$$
$$+ F\begin{pmatrix} x+\alpha \\ x+\alpha' \end{pmatrix}, y-\beta\Big) + F\begin{pmatrix} x-\alpha \\ x-\alpha' \end{pmatrix}, y-\beta\Big) + F_1\begin{pmatrix} y+\beta \\ y+\beta' \end{pmatrix}, x-\alpha'\Big) + F_1\begin{pmatrix} y-\beta \\ y-\beta' \end{pmatrix}, x-\alpha'\Big),$$

en posant

$$F\begin{pmatrix} x+\alpha \\ x+\alpha' \end{pmatrix}, y+\beta\Big) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \log \frac{e^{\pi\frac{y+\beta+2nb}{a}} + e^{-\pi\frac{y+\beta+2nb}{a}} - 2\cos\pi\frac{x+\alpha}{a}}{e^{\pi\frac{y+\beta+2nb}{a}} + e^{-\pi\frac{y+\beta+2nb}{a}} - 2\cos\pi\frac{x+\alpha'}{a}},$$

$$F_1\begin{pmatrix} y+\beta \\ y+\beta' \end{pmatrix}, x+\alpha'\Big) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \log \frac{e^{\pi\frac{x+\alpha'+2na}{b}} + e^{-\pi\frac{x+\alpha'+2na}{b}} - 2\cos\pi\frac{y+\beta}{b}}{e^{\pi\frac{x+\alpha'+2na}{b}} + e^{-\pi\frac{x+\alpha'+2na}{b}} - 2\cos\pi\frac{y+\beta'}{b}}.$$

N° 3; 21 juillet.

Fresnel. — Comparaison de la supposition des courants autour de l'axe d'un aimant, avec celle des courants autour de chaque molécule. (97-100).

Fresnel. — Deuxième Note sur l'hypothèse des courants particulaires. (101-104).

Ces deux Notes inédites ont été trouvées au milieu des papiers d'Ampère, offerts à l'Institut par ses héritiers. L'hypothèse des courants particulaires avait été suggérée à Ampère par Fresnel, comme il résulte d'un fragment, écrit de la main d'Ampère, et qui fait partie des papiers appartenant à l'Académie.

Tresca. — Étude sur les déformations géométriques, déterminées par l'écrasement d'un cylindre entre deux plans. (104-110).

De Jonquières. — Sur deux théorèmes de M. Sylvester et sur la Règle de Newton. (111-115).

Voir plus haut.

Sylvester. — Sur l'équation en matrices $px = xq$. (115-116).

Voir l'analyse de la Note du 7 juillet.

Sylvester. — Sur la solution du cas le plus général des équations linéaires en quantités binaires, c'est-à-dire en quaternions ou en matrices du second ordre. (117-119).

Soient p, q deux matrices d'ordre ω, et $p(q)$ l'opérateur, qui, appliqué à une autre matrice x du même ordre, donne pxq.

Si l'on pose

$$p_1(\quad)q_1 + p_2(\quad)q_2 + \ldots + p_n(\quad)q_n = \varphi,$$

φ sera une matrice de l'ordre ω^2, assujettie, par conséquent, à vérifier une équation identique d'ordre ω^2, que M. Sylvester enseigne à former dans le cas où $\omega = 2$.

Connaissant cette équation identique

$$\varphi^4 + B\varphi^3 + C\varphi^2 + D\varphi + E = 0,$$

on résout immédiatement l'équation

$$\Sigma p x q = T,$$

par la formule

$$x = \varphi^{-1}T = -\frac{D + C\varphi + B\varphi^2 + \varphi^3}{E}T.$$

28 juillet.

De Jonquières. — Règle de Newton-Sylvester. (165-170).

Menabrea. — Sur la machine analytique de Charles Babbage. (179-182).

Cette machine, dont la construction est restée inachevée par suite de la mort de l'inventeur, a une bien plus grande portée que les machines à calculer : elle a pour but d'effectuer les opérations analytiques et arithmétiques dont les lois lui sont tracées et d'en imprimer les résultats.

André (*D.*). — Nombre exact des variations gagnées ou perdues dans la multiplication du polynôme $f(x)$ par le binôme $x^h \pm \alpha$. (182-184).

« Soit $f(x)$ le polynôme à multiplier par $x^h + \alpha$. J'écris l'un sous l'autre, comme si je multipliais, les deux produits partiels de la multiplication de $f(x)$ par $x^h + 1$; puis, je compte le nombre des variations que gagnerait le premier produit partiel, si j'élevais jusqu'à lui les termes du second qui n'ont rien au-dessus d'eux : je trouve ainsi le nombre des *variations inévitables*.

» Quant à l'ensemble des deux produits partiels, abstraction faite des puissances de x, il nous offre, de gauche à droite, une suite de *couples*, constitués chacun par deux coefficients superposés, et qui ne peuvent présenter que les huit formes

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c||c|c} +A & -A & 0 & 0 & +A & -A & +A & -A \\ 0 & 0 & +B & -B & +B & -B & -B & +B \end{array}.$$

» Les couples des six premières formes ne contiennent chacun qu'un seul des signes + ou — : ce sont les couples de la *première espèce*. Les couples des deux dernières formes contiennent chacun ces deux signes : ce sont les couples de la *seconde espèce*.

» Pour construire le *contour* représentatif du polygone $f(x)$, je trace sur un

2ue Part.

papier : d'abord, une suite d'ordonnées verticales équidistantes, correspondant aux différents couples; ensuite, tout au bas, une horizontale qui servira d'axe des abscisses; enfin, tout au haut, une nouvelle horizontale qui sera la *droite de l'infini*. Sur chaque ordonnée correspondant à un couple de la première espèce, et au point de vue où cette ordonnée coupe la droite de l'infini, je marque le signe unique de ce couple. Sur chaque ordonnée correspondant à un couple de la seconde espèce, et avec une échelle suffisamment petite, je porte, à partir de l'axe des abscisses, une longueur égale au rapport positif $\frac{A}{B}$; et, à l'extrémité supérieure de cette longueur, je marque le signe qui précède A. J'obtiens ainsi un nombre total de points égal au nombre total de couples et marqués chacun d'un signe + ou —. Ces points sont les sommets du contour; pour en avoir les côtés, il suffit de joindre le point placé sur chaque ordonnée au point placé sur l'ordonnée suivante. Ces côtés sont de deux sortes : ceux qui joignent deux signes pareils; ceux qui joignent deux signes différents. Pour les distinguer, je trace les premiers en *trait plein*, les seconds en *pointillé* ...

« Je tire l'*horizontale* α, c'est-à-dire l'horizontale située à la hauteur α au-dessus de l'axe des abscisses. Cette horizontale coupe, en général, plusieurs côtés du contour, les uns pleins, les autres pointillés, et notre nouveau théorème peut s'énoncer ainsi :

» Lorsqu'on multiplie le polynôme $f(x)$ par le binôme $x^h + \alpha$, où α est positif, le nombre des variations que l'on gagne est juste égal au nombre des variations inévitables, plus le nombre des côtés pleins coupés par l'horizontale α, moins le nombre des côtés pointillés coupés par cette même horizontale.

» Si, au lieu de multiplier par $x^h + \alpha$, on multipliait par $x^h - \alpha$, il faudrait, pour construire le contour, se servir des produits partiels de la multiplication par $x^h - 1$. L'énoncé précédent subsisterait alors sans aucune modification. »

N° 5; 4 août.

Gyldén. — Sur le changement des excentricités des orbites planétaires, dû à la concentration de la matière dans l'espace. (219-223).

Dans sa Note du 2 juin, M. Gyldén a montré que le problème cosmologique proposé par M. Faye dépend des équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{A}{r^3} + \mu_2 - \frac{A}{R^3}\right)x = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{A}{r^3} + \mu_2 - \frac{A}{R^3}\right)y = 0,$$

où x, y désignent les coordonnées d'une planète, r sa distance au centre de la nébuleuse primordiale de rayon R, A une fonction du temps, très lentement croissante, qu'il est naturel de représenter par la formule exponentielle

$$A = \mu_2 R^3 (1 - e^{-\lambda t}).$$

L'intégration de ce système conduit à des conséquences intéressantes. Si l'on désigne par a et par e le demi grand axe et l'excentricité de l'ellipse primitive

correspondant à $A = 0$, par α et par η les mêmes éléments de l'ellipse finale correspondant à $A = \mu_2 R^3$, on aura

$$\eta = \frac{e^2}{\sqrt{8}} \left(\frac{a}{R}\right)^3.$$

L'excentricité de l'orbite doit être très petite, puisqu'à l'origine le mouvement s'effectuait dans l'intérieur de la sphère de rayon R. Cette expression de η, rapprochée de la formule

$$\alpha R^3 (1 - \eta^2) = a^4 (1 - e^2),$$

que M. Gyldén a donnée dans sa dernière Communication, montre que les plus grandes excentricités actuelles doivent correspondre aux valeurs peu considérables de α.

N° 6; 11 août.

Lalanne. — Observations à propos d'une Communication récente de M. le général L.-F. Menabrea, sur la machine de Charles Babbage. (267-268).

De Jonquières. — Examen de deux points de doctrine relatifs à la Règle de Newton. (269-272).

N° 7; 18 août.

Lalanne. — Note sur un nouveau mode de représentation de la marche des trains sur une voie de communication. (307-313).

N° 8; 25 août.

De Jonquières. — Sur les équations algébriques. (345-351).

Le travail de M. de Jonquières prend son point de départ dans quelques considérations très simples de Géométrie; son objet principal n'est pas la résolution graphique des équations, mais l'exposé de vues d'ensemble sur leurs propriétés générales et sur les *affections* auxquelles elles sont sujettes.

Cette méthode de discussion intuitive, fondée sur l'emploi des courbes paraboliques, met en évidence l'influence de chaque terme nouveau, introduit dans l'équation, sur les déformations que subit la courbe initiale. En particulier, elle conduit immédiatement aux conditions algébriques auxquelles les coefficients d'une équation trinôme doivent satisfaire pour que l'équation ait le nombre maximum de racines réelles.

N° 9; 1er septembre.

Sylvester. — Sur la résolution générale de l'équation linéaire en matrices d'un ordre quelconque. (409-412).

N° 10; 8 septembre.

Sylvester. — Sur la résolution générale de l'équation linéaire en matrices d'un ordre quelconque. (432-436).

N° 11; 15 septembre.

Lalanne. — Sur les équations algébriques; observations au sujet d'une Communication de M. de Jonquières. (463-469).

L'auteur rappelle en quelques mots la méthode graphique de résolution des équations numériques de degré quelconque, qu'il a exposée dans trois Communications faites à l'Académie en 1875 et 1876. Il montre que cette méthode conduit, pour les équations trinômes, aux mêmes résultats que la méthode géométrique de M. de Jonquières.

De Jonquières. — Sur les équations algébriques. (469-473).

Deux équations algébriques seront dites de même *espèce,* lorsqu'elles ont le même nombre de termes, que les exposants des termes de même rang sont de même parité et que les coefficients de même rang sont de même signe.

Toutes les équations algébriques de même espèce, quel que soit leur degré, ont le même nombre maximum de racines réelles.

Sylvester. — Sur les deux méthodes, celle de Hamilton et celle de l'auteur, pour résoudre l'équation linéaire en quaternions. (473-476).

N° 12; 22 septembre.

De Jonquières. — Sur les équations algébriques. (483-488).

L'auteur applique sa méthode géométrique à l'étude des équations algébriques où figurent des termes à exposants fractionnaires. Deux pareilles équations sont de *même espèce* lorsqu'elles ont le même nombre total de termes, que les termes de même rang sont de même signe, que les exposants des termes de même rang sont de même parité s'ils sont entiers, ou ont des dénominateurs de même parité s'ils sont fractionnaires.

Toutes les équations algébriques, rationnelles ou irrationnelles, appartenant à une espèce, ont le même nombre maximum de racines réelles.

Sylvester. — Sur l'achèvement de la nouvelle méthode pour résoudre l'équation linéaire la plus générale en quaternions. (502-505).

Stieltjes. — Sur un développement en fractions continues. (508-509).

L'évaluation approchée de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx$ par la méthode de Gauss est liée à la résolution de l'équation obtenue en égalant à zéro le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue

$$\Omega = \cfrac{2}{z - \cfrac{\frac{1.1}{1.3}}{z - \cfrac{\frac{3.3}{3.7}}{z - \cfrac{\frac{4.4}{7.9}}{z - \ddots}}}}$$

M. Stieltjes donne une démonstration simple des propriétés connues de cette fraction : elle converge dans tout le plan, sauf sur la coupure rectiligne $-1, +1$; elle converge uniformément dans le voisinage de toute valeur particulière appartenant à la région de convergence.

La démonstration de M. Stieltjes est encore applicable à la fraction continue qui correspond à l'intégrale $\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx$.

N° 13; 29 septembre.

Sylvester. — Sur l'équation linéaire trinôme en matrices d'un ordre quelconque. (527-529).

Le Paige. — Sur les groupes de points en involution marqués sur une surface. (537-538).

N° 14; 6 octobre.

Sylvester. — Sur la solution explicite de l'équation quadratique de Hamilton en quaternions ou en matrices du second ordre. (555-558).

N° 16; 20 octobre.

Sylvester. — Sur les conditions de l'existence des racines égales dans l'équation du second degré de Hamilton et sur une méthode générale pour résoudre une équation unilatérale de n'importe quel degré en matrices d'un ordre quelconque (621-631).

Autonne. — Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe semi-cubique Cremona. (646-649).

Une substitution Cremona S d'ordre n et son inverse S^{-1} sont définies par les symboles

$$S = |z_i, \varphi_i(z_1, z_2, z_3)|, \quad S^{-1} = |z_i, \theta_i(z_1, z_2, z_3)| \quad (i = 1, 2, 3),$$

où φ et θ désignent des polynômes homogènes en z_i d'ordre n, entre lesquels existent les relations

$$\varphi_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = M z_i, \quad \theta_i(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = N z_i.$$

M. Autonne donne du produit de deux substitutions Cremona une définition qui permet de déterminer d'une manière précise un *groupe* Cremona, exactement comme toute autre nature de substitution. L'*ordre* d'un *groupe* Cremona est l'ordre *maximum* des substitutions du groupe. Un groupe *semi-cubique* est un groupe cubique tel que le produit de deux substitutions cubiques du groupe soit d'ordre deux au plus.

L'auteur fait connaître les divers types auxquels les groupes semi-cubiques peuvent se ramener par un choix convenable de coordonnées.

N° 17; 27 octobre.

Lipschitz. — Sur une représentation de la fonction exponentielle par un produit infini. (701-703).

Si l'on désigne par z une variable complexe dont le module est moindre que l'unité, par $\varphi(n)$ le nombre des entiers premiers avec n et non supérieurs à n, on a

$$e^{\frac{z}{1-z}} = (1-z)(1-z^2)^{\frac{\varphi(2)}{2}}(1-z^3)^{-\frac{\varphi(3)}{3}}\ldots$$

$$e^{\frac{z}{1-z}} = (1-z)^{-1}(1-z^2)^{-\frac{\varphi(2)}{2}}(1-z^3)^{-\frac{\varphi(3)}{3}}\ldots$$

Dans la première formule, la partie réelle de $\frac{z}{1-z}$ doit être comprise entre $\frac{1}{2}$ et $-\infty$; dans la seconde, la partie réelle de $\frac{z}{1-z}$ entre $-\frac{1}{2}$ à $+\infty$; la partie imaginaire peut prendre une valeur quelconque.

La fonction exponentielle est donc susceptible d'une représentation par un

produit infini dans l'intervalle de $-\infty$ à $-\frac{1}{2}$, de deux dans l'intervalle de $-\frac{1}{2}$ à $+\frac{1}{2}$, d'une seule dans l'intervalle de $+\frac{1}{2}$ à $+\infty$.

Barbier. — Sur l'équilibre d'un segment homogène de paraboloïde de révolution flottant sur un liquide. (703-704).

Archimède a défini les conditions de pesanteur spécifique et de forme du segment, qui rendent possible une position d'équilibre inclinée où la base du segment est tout entière hors du liquide.

Cet équilibre est instable. Il existe une position d'équilibre stable, où la base du segment est en partie dans le liquide.

N° 18; 3 novembre.

Poincaré. — Sur les nombres complexes. (740-742).

Le problème des nombres complexes se ramène au suivant:

Trouver tous les groupes continus de substitutions linéaires à n variables dont les coefficients sont des fonctions linéaires de n paramètres arbitraires.

Si un pareil groupe se réduit à un faisceau, les nombres complexes correspondants seront à multiplication commutative, et réciproquement. M. Poincaré fait connaître les types auxquels se ramènent les faisceaux par un choix convenable des variables.

Il considère ensuite les groupes qui donnent naissance à des nombres complexes à multiplication non commutative. Les substitutions d'un pareil groupe ne sont pas toutes paraboliques. Si les variables ont été choisies de telle sorte qu'une substitution S non parabolique soit ramenée à la forme canonique

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n),$$

les λ ne seront pas tous distincts. S'il y a p valeurs distinctes $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ des λ, on divisera les n variables en p systèmes

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{12}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2p}, \ldots, x_{p1}, x_{p2}, \ldots, x_{px} \quad (\alpha + \beta + x = n),$$

et l'on supposera que la substitution S s'écrive sous la forme

$$(x_{ik}, \lambda_i x_{ik}),$$

le multiplicateur étant le même pour toutes les variables d'un même système. Cela posé :

1° La substitution $(x_{ik}, \mu_i x_{ik})$ fera partie du groupe, quelles que soient les valeurs des p multiplicateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$.

2° Si l'on choisit convenablement les n paramètres arbitraires en fonction desquels tous les coefficients du groupe s'expriment linéairement, deux cas se présenteront : ou bien on pourra partager les coefficients d'une substitution quelconque en p^2 systèmes, de telle manière qu'un de ces systèmes ait tous ses coefficients nuls; ou bien aucune des substitutions du groupe n'aura plus de $\sqrt{n}$ multiplicateurs distincts : tel est le cas des quaternions.

Vaneček (*J.-S. et M.-N.*). — Sur l'involution des dimensions supérieures. (742-744).

D'Ocagne. — Sur quelques propriétés générales des surfaces algébriques de degré quelconque. (744-745).

Berloty. — Sur les équations algébriques. (745-747).

Soit

$$f(z) = z^{\lambda} \Pi\left(1 - \frac{z}{a}\right) = 0,$$

une équation algébrique ou plus généralement holomorphe du genre 0, et soit R l'une des deux régions du plan des z limitée par une droite de ce plan; les divers points de la droite sont regardés comme appartenant à la région R.

Si l'équation $f(z) = 0$ a toutes ses racines dans la région R, *il en est de même de l'équation dérivée $f'(z) = 0$.*

On en conclut que, si $f(z)$ a toutes ses racines à l'intérieur d'un contour ouvert et convexe, il en est de même de $f'(z)$.

Lorsque $f(z)$ est algébrique, il existe un polygone convexe dont les sommets sont des points-racines et qui contient à son intérieur ou sur son contour toutes les autres racines de $f(z)$. Les racines de $f'(z)$ seront toutes à l'intérieur ou sur le contour de ce polygone.

Lippmann. — Conditions d'équilibre d'une lame liquide soumise à des actions électromagnétiques. (747-749).

Soit une lame d'un liquide conducteur infiniment mince, horizontale, parcourue par des courants électriques que lui amènent des électrodes disposées d'une manière quelconque, et placée dans un champ magnétique vertical d'intensité uniforme.

Il faut et il suffit, pour l'équilibre, que cet espace soit limité par des cloisons disposées comme des coupures qui rendraient uniforme la fonction conjuguée du potentiel électrique. Les pressions développées le long du contour ont des valeurs conjuguées de celles de ce potentiel.

Hauvel. — Conditions d'un élément hélicoïdal pour l'effet utile maximum d'un propulseur. (750-752).

N° 19; 10 novembre.

Kronecker. — Additions au Mémoire sur les unités complexes. (765-772).

Dans cette Communication l'auteur se propose de généraliser et de simplifier les résultats contenus dans la première partie du Mémoire qu'il a adressé à l'Académie en janvier 1883.

Goursat. — Sur une équation analogue à l'équation de Kummer. (777-779).

Étant données deux équations linéaires du second ordre à coefficients rationnels et à intégrales régulières

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

$$(2) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + P\frac{dz}{dt} + Qz = 0,$$

où p et q sont des fonctions de x, P et Q fonctions de t, on sait qu'on peut toujours passer de l'une à l'autre en posant $y = wz$, $x = \varphi(t)$, w et $\varphi(t)$ étant des fonctions convenables de t. En particulier, la fonction $x = \varphi(t)$ est déterminée par l'équation différentielle du troisième ordre

$$(3) \qquad \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 + \left(2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}\right)x'^2 = 2Q - \frac{1}{2}P^2 - \frac{dP}{dt^2}.$$

Cette équation comprend celle de Kummer comme cas particulier. Les cas où elle admet pour intégrale une fonction rationnelle de t présentent un intérêt particulier, parce qu'alors l'intégration de l'équation (2) se ramène à l'intégration de l'équation (1), ou inversement.

La recherche de ces intégrales rationnelles revient au problème suivant:

Étant donnée une équation à p points singuliers non apparents, trouver toutes les fonctions rationnelles $\varphi(t)$, telles que, en faisant le changement de variable, $x = \varphi(t)$ dans cette équation et, en multipliant les intégrales par une fonction convenable de t, la nouvelle équation ait seulement q points singuliers non apparents.

La solution que M. Goursat donne de ce problème l'amène à distinguer divers *types* de fonctions rationnelles $\varphi(t)$, caractérisées par un certain nombre entier Δ, positif ou nul, qui dépend du nombre des points singuliers apparents. Les fonctions d'un même type contiennent $\Delta + 3$ paramètres arbitraires. En général, les fonctions rationnelles conduisant d'une équation à p points singuliers non apparents à une équation ayant q points singuliers non apparents *appartiennent à un nombre limité de types différents.*

M. Klein a montré que toutes les équations linéaires du second ordre peuvent se déduire, par une substitution rationnelle, d'une des quatre équations de la série hypergéométrique, auxquelles on a donné le nom des quatre types de corps réguliers; on peut tirer parti des recherches de M. Goursat pour reconnaître auquel de ces quatre types peut se ramener une équation donnée.

Maurice d'Ocagne. — Sur les courbes algébriques de degré quelconque. (779-780).

N° 20; 17 novembre.

Stieltjes. — Sur une généralisation de la théorie des quadratures mécaniques. (850-851).

Picard (*E.*). — Sur les fonctions hyperfuchsiennes qui proviennent des séries hypergéométriques de deux variables. (852-853).

Soit

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{b_3-1}(u-y)^{\lambda-1}du$$

une fonction hypergéométrique de deux variables, où b_1, b_2, b_3, λ ont les valeurs respectives

$$1-\frac{1}{n'}-\frac{1}{q}, \quad 1-\frac{1}{m'}-\frac{1}{q},$$

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{m'}+\frac{1}{n'}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q'}\right), \quad \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right),$$

m, n, p, q, m', n', q' étant sept entiers positifs, supérieurs à 2, liés par les relations

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3m}+\frac{1}{3p}-\frac{2}{3n}-\frac{2}{3q}=\frac{1}{m'},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3p}-\frac{2}{3m}-\frac{2}{3q}=\frac{1}{n'},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3q}+\frac{1}{3p}-\frac{2}{3m}-\frac{2}{3n}=\frac{1}{q'}.$$

Les limites g et h désignent deux des quantités $0, 1, x, y$ et ∞.

Si l'on forme le système de trois équations linéaires aux dérivées partielles auquel satisfait la fonction hypergéométrique, et qu'on représente par $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ trois solutions linéairement indépendantes, les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=u, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1}=v,$$

donneront pour x et y des fonctions hyperfuchsiennes de u et v. On peut choisir $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ de telle sorte que le domaine dans lequel elles sont déterminées soit l'intérieur de l'hypersphère

$$u'^2+u''^2+v''^2=1,$$

si l'on pose

$$u=u'+iu'', \quad v=v'+iv''.$$

Poincaré. — Sur la réduction des intégrales abéliennes. (853-855).

Si un système d'intégrales abéliennes de première espèce et de genre n contient plus de n intégrales réductibles aux integrales elliptiques, il en contient une infinité.

M. Poincaré déduit ce théorème, que faisaient prévoir les recherches de M. Picard, d'un lemme, qu'il énonce dans le cas de $n=3$, pour fixer les idées :

Soient y_1, y_2, y_3 trois intégrales abéliennes, dont la première est réductible aux intégrales elliptiques : si l'intégrale $\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3$ est réductible, il en sera de même de $\nu\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3$, ν étant un nombre commensurable quelconque.

L'auteur termine par la remarque suivante. Pour qu'un système d'intégrales du

second genre, aux périodes normales

$$\begin{matrix} 1 & 0 & G & H \\ 0 & 1 & H & G', \end{matrix}$$

contienne des intégrales réductibles, il faut et il suffit qu'il existe entre les périodes G, H, G' une relation de la forme

$$(GG' - H^2) - \lambda G' - \mu' G + (\lambda' + \mu) H + \lambda \mu' - \lambda' \mu = 0,$$

les coefficients λ, μ, λ', μ' étant commensurables.

Il en résulte qu'un système *quelconque* d'intégrales abéliennes diffère toujours *infiniment* peu d'un système réductible.

Vaneček (*J.-S. et M.-N.*). — Sur l'involution des dimensions supérieures. (856-857).

Goursat. — Sur une équation analogue à l'équation de Kummer. (858-859).

Voir plus haut.

Weill (*M.*). — Sur un théorème de Jacobi relatif à la décomposition d'un nombre en quatre carrés. (859-861).

Démonstration directe d'un théorème d'Arithmétique que Jacobi a établi au moyen des fonctions elliptiques.

Le nombre des décompositions en une somme de carrés, tous impairs, du quadruple d'un nombre impair, est double du nombre des décompositions de ce même nombre en quatre carrés.

N° 21; 24 novembre.

Brioschi. — Les relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques d'ordre n. (889-892).

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$, $2n+1$ quantités réelles, et

$$f(x) = \prod_{0}^{2n}{}_r (x - a_r)^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on pose

$$u_1 = \sum_{r=1}^{r=n} \int_{a_{2r-1}}^{x_r} \frac{f_1(x)\,dx}{f(x)},$$

$$u_2 = \sum_{r=1}^{r=n} \int_{a_{2r-1}}^{x_r} \frac{f_2(x)\,dx}{f(x)}, \quad \ldots, \quad u_n = \sum_{r=1}^{r=n} \int_{a_{2r-1}}^{x_r} \frac{f_n(x)\,dx}{f(x)},$$

$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ étant des polynômes de degrés non supérieurs à $n-1$,

les fonctions

$$p_r(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sqrt{\varphi(a_r)}, \quad p_{rs} = p_r p_s \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{(x_i - a_r)(x_i - a_s)\varphi'(x_i)},$$

$$p_{rst} = p_r p_s p_t \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{(x_i - a_r)(x_i - a_s)(x_i - a_t)\varphi'(x_i)},$$

et ainsi de suite, dans lesquelles

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

sont, comme on sait, des fonctions hyperelliptiques d'ordre n, dont le nombre est $4^n - 1$.

M. Brioschi divise en trois groupes les $2n+1$ quantités $a_0, a_1, \ldots, a_{2n+1}$; il désigne n d'entre elles par $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_n}$, $n-1$ autres par $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_{n-1}}$, et les deux dernières par a_s, a_t. Cela posé :

Les carrés des deux fonctions à un seul indice p_s, p_t et les carrés des $2n-1$ fonctions à deux indices p_{st}, p_{ms}, p_{mt}, $(m = m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})$ peuvent s'exprimer en fonction linéaire des carrés de $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_n}, y_{r_1}, y_{r_2}, \ldots, y_{r_n}$.

Les carrés des $2n-1$ autres fonctions à un seul indice, et les carrés des $(n-1)(2n-1)$ autres fonctions à deux indices multipliées par p_{st}^2 ne jouissent pas de cette propriété, mais sont des fonctions biquadratiques homogènes de $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, y_{r_1}, y_{r_2}, \ldots$.

Il y a exception pour $n = 2$; mais le théorème suivant est absolument général :

Les carrés de $\frac{n(3n+5)}{2}$ *fonctions hyperelliptiques d'ordre n, à un et à deux indices, sont exprimables en fonctions linéaires des carrés des*

$$\tfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

autres; en d'autres termes, les carrés de $\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)$ *fonctions* θ, *à un et à deux indices, sont exprimables linéairement par les carrés des*

$$\tfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

autres.

De Sparre. — Sur l'herpolhodie de Poinsot. (906-909).

De l'étude de l'équation de Lamé l'auteur déduit que les points stationnaires ne sont jamais réels. Ce résultat peut d'ailleurs s'établir directement.

L'herpolhodie, au lieu d'être ondulée, comme l'avait cru Poinsot, rappelle par sa forme la courbe que décrit la projection horizontale du pendule conique.

Vaneček (*J.-S.* et *M.-N.*). — Sur l'involution des dimensions supérieures. (909-911).

N° 22; 1er décembre.

Brioschi. — Les relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques d'ordre n. (951-953).

Voir plus haut.

Picard (*E.*). — Sur les intégrales des différentielles totales algébriques (961-964).

Étant donnée une relation algébrique entre trois variables, on effectue sur ces variables une substitution homographique arbitraire. Soit

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

la nouvelle relation obtenue, f étant un polynôme de degré m. On suppose que la surface (1) ne présente que des singularités ordinaires, c'est-à-dire des points doubles dont le cône des tangentes ne se réduit pas à deux plans, et des courbes doubles telles que les deux plans tangents en chacun de leurs points soient distincts. L'équation (1) définit z comme fonction de x et de y.

M. Picard considère l'intégrale de différentielle totale

$$\int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y} \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy,$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x et de y satisfaisant à la condition d'intégrabilité. Il cherche si, parmi de telles intégrales, en nombre illimité, il en existe qui restent *finies* pour toute valeur finie ou infinie de x et de y (intégrales de *première espèce*).

L'intégrale doit alors être de la forme

$$\int_{(x_0,\, y_0,\, z_0)}^{(x,\, y,\, z)} \frac{\mathrm{B}\,dx - \mathrm{A}\,dy}{f'_z(x, y, z)},$$

A désignant un polynôme de degré $(m-2)$ en x, y, z et de degré $(m-3)$ en x, z; B un polynôme de degré $m-2$ en x, y, z, et de degré $m-3$ en y, z. On doit en outre pouvoir trouver un troisième polynôme C d'ordre $m-2$ en x, y, z et d'ordre $m-3$ en y, z, satisfaisant à l'identité

$$\mathrm{A}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{B}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathrm{C}\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z}\right) f(x, y, z).$$

Enfin, s'il y a une courbe double, les surfaces $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = 0$, $\mathrm{C} = 0$ doivent passer par cette courbe.

Dans ces conditions, l'intégrale aura une valeur *finie* et *déterminée* pour tout point simple de la surface situé à distance finie, une valeur *indéterminée* mais *finie* pour un point double isolé, et pour tous les points à l'infini.

Les résultats qui précèdent permettent de reconnaître, étant donnée une surface algébrique, si l'on peut exprimer x, y et z par des fonctions abéliennes de deux paramètres, de manière qu'à un point quelconque de la surface ne

corresponde qu'un seul système de valeurs de u et v (abstraction faite de multiples des périodes). La surface possède alors deux intégrales *indépendantes* de première espèce, et deux seulement.

Fouret. — Sur deux formules trigonométriques d'interpolation, applicables l'une aux fonctions paires, l'autre aux fonctions impaires. (964-966).

Soient $\varphi(x)$ une fonction paire et $\psi(x)$ une fonction impaire qui, pour $n+1$ valeurs $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ données à x, prennent n valeurs données correspondantes. L'auteur établit les formules

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{i=0}^{i=n} \varphi(\alpha_i) \prod \frac{\sin\frac{1}{2}(x+\alpha_j)\,\sin\frac{1}{2}(x-\alpha_i)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha_i+\alpha_j)\,\sin\frac{1}{2}(\alpha_i-\alpha_j)}\\ \psi(x) &= \sin x \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\psi(\alpha_i)}{\sin\alpha_i} \prod \frac{\sin\frac{1}{2}(x+\alpha_j)\,\sin\frac{1}{2}(x-\alpha_j)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha_i+\alpha_j)\,\sin\frac{1}{2}(\alpha_j-\alpha_j)}\end{aligned}\right\}(j=0,1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n).$$

N° 23; 8 décembre.

Appell. — Sur l'inversion des intégrales abéliennes. (1010-1011).

Soient x et y deux variables imaginaires, liées par une relation algébrique de genre 0 ou 1, et $\varphi_1(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de x et y; il existe toujours un certain nombre $(n-1)$ d'autres fonctions rationnelles de x et y,

$$\varphi_2(x, y),\ \varphi_3(x, y),\ \ldots,\ \varphi_n(x, y),$$

possédant la propriété suivante : le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x_1, y_1)\,dx_1 + \varphi_1(x_2, y_2)\,dx_2 + \ldots + \varphi_1(x_n, y_n)\,dx_n = du_1,\\ &\varphi_2(x_1, y_1)\,dx_1 + \varphi_2(x_2, y_2)\,dx_2 + \ldots + \varphi_2(x_n, y_n)\,dx_n = du_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_n(x_1, y_1)\,dx_1 + \varphi_n(x_2, y_2)\,dx_2 + \ldots + \varphi_n(x_n, y_n)\,dx_n = du_n\end{aligned}$$

définit les n points analytiques

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n),$$

en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, de telle façon que les n valeurs

$$R(x_1, y_1),\ R(x_2, y_2),\ \ldots,\ R(x_n, y_n),$$

que prend une fonction rationnelle quelconque $R(x, y)$ en ces n points, sont racines d'une équation algébrique à coefficients uniformes en $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Fouret. — Sur une formule trigonométrique d'interpolation pour des valeurs de la variable indépendante deux à deux équidifférentes de l'une d'elles. (1011-1014).

Trouver une fonction linéaire des sinus et cosinus d'un arc x et de ses $n-1$ premiers multiples, qui, pour $2n+1$ valeurs données de cet arc, dont l'une est nulle, et les autres sont deux à deux égales et de signes contraires, prenne $2n+1$ valeurs données correspondantes.

Soient $0, \pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \ldots, \pm\alpha_n$ les $2n+1$ valeurs données de x, les arcs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n'étant assujetties qu'aux restrictions suivantes : 1° aucun d'eux n'est ni nul ni égal à un multiple de π; 2° la somme ou la différence de deux quelconques d'entre eux n'est ni nulle ni égale à un multiple de 2π. On aura

$$f(x) = (-1)^n f(0) \prod_{i=1}^{i=n} \frac{\sin\frac{1}{2}(x+\alpha_i)\sin\frac{1}{2}(x-\alpha_i)}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha_i}$$
$$+ \sin\frac{x}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(\alpha_i)\sin\frac{1}{2}(x+\alpha_i) + f(-\alpha_i)\sin\frac{1}{2}(x-\alpha_i)}{\sin\frac{1}{2}\alpha_i \sin\alpha_i} \prod \frac{\sin\frac{1}{2}(x+\alpha_i)\sin\frac{1}{2}(x-\alpha_i)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha_i+\alpha_j)\sin\frac{1}{2}(\alpha_i-\alpha_j)},$$

le dernier signe de multiplication Π s'appliquant aux indices

$$j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n.$$

Poincaré. — Sur une généralisation des fonctions continues. (1014-1016).

L'auteur rappelle d'abord l'interprétation géométrique des fractions continues qu'il a donnée dans le XLVIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et qu'il va généraliser de la manière suivante.

Il s'agit d'approcher simultanément de deux quantités positives α et β. On construira la droite $y = \alpha x$, $z = \beta x$, et l'on formera l'assemblage à la Bravais dont tous les sommets ont pour coordonnées des nombres entiers. Le problème consiste à trouver sur ce réseau des points qui se rapprochent beaucoup de la droite $y = \alpha x$, $z = \beta x$.

Le réseau peut être engendré par une infinité de parallélépipèdes de volume 1, qui peuvent lui servir de mailles. Soient A, B, C trois sommets du réseau, tels que le tétraèdre OABC ait pour volume $\frac{1}{6}$. On suppose la droite $y = \alpha x$, $z = \beta x$ à l'intérieur de ce trièdre. On complétera le parallélépipède dont les triangles OAB, OBC, OCA constituent trois demi-faces, et on le divisera en six trièdres, en joignant le point O à ses divers sommets. On conservera celui de ces trièdres qui contient la droite $y = \alpha x$, $z = \beta x$, et l'on opérera sur lui comme sur le trièdre OABC. On sera ainsi conduit à une série indéfinie de trièdres de plus en plus petits et contenant tous la droite $y = \alpha x$, $z = \beta x$.

Voici la traduction analytique de cette suite de constructions géométriques. Soient m, n, p; m', n', p'; m'', n'', p'' les coordonnées des points A, B, C. Les trois déterminants

$$A = \begin{vmatrix} 1 & m' & m'' \\ \alpha & n' & n'' \\ \beta & p' & p'' \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} m & 1 & m'' \\ n & \alpha & n'' \\ p & \beta & p'' \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} m & m' & 1 \\ n & n' & \alpha \\ p & p' & \beta \end{vmatrix},$$

sont positifs. On les rangera par ordre de grandeur décroissante; on retranchera le second du premier et le troisième du deuxième; puis on opérera de même sur les trois nouveaux déterminants obtenus (A — B, B — C, C), et ainsi de suite.

Cette règle s'étend à l'approximation simultanée de n quantités.

Kœnigs. — Sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles. (1016-1067).

Si $\varphi_p(z)$ représente l'opération $\varphi(z)$ effectuée p fois, et x un point limite, le rapport $\frac{\varphi_p(z) - x}{[\varphi'(x)]^p}$ a pour limite une fonction $B(z)$, holomorphe dans tout l'intérieur d'un cercle c_x de centre x.

La fonction $B(z)$ est une solution de l'équation de M. Schrœder

$$f[\varphi(z)] = \varphi'(x) f(z).$$

Les solutions de cette équation fonctionnelle, qui sont holomorphes ou méromorphes au point x, coïncident dans le cercle c_x avec une puissance entière de $B(z)$, à un facteur constant près.

L'équation d'Abel

$$f[\varphi(z)] = 1 + f(z).$$

admet une intégrale $b(z) = \frac{\log B(z)}{\log \varphi'(z)}$ qui présente en x une singularité logarithmique : toutes les intégrales de cette nature ne diffèrent de la précédente que par une constante additive; cette équation n'a pas de solution holomorphe ou méromorphe au point x.

La fonction $b(z)$ permet de former, à l'aide d'une fonction périodique arbitraire, la solution générale des équations d'Abel et de M. Schrœder.

La méthode suivie par M. Kœnigs lui permet d'intégrer les équations

$$f[\varphi(z)] = \chi(z) f(z), \quad f[\varphi(z)] = \omega(z) + f(z),$$

où φ, χ, ω sont des fonctions données.

L'auteur envisage, en terminant, des groupes de points limites à convergence périodique : il ramène ce cas à celui des points limites ordinaires.

N° 24; 15 décembre.

Brioschi. — Sur les relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques d'ordre n. (1050-1053).

Voir plus haut.

Fouret. — Sur une formule trigonométrique d'interpolation, applicable à des valeurs quelconques de la variable indépendante. (1062-1063).

Laguerre. — Sur les coupures des fonctions. (1065-1067).

Soient $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$ deux fonctions réelles, quel que soit z, finies et déterminées dans une aire A à contour simple. On considère l'intégrale double

$$F(z) = \iint \frac{f(x, y, z)}{g(x, y) - z} dx\, dy,$$

étendue à toute l'aire A. Si pour certaines valeurs de z la courbe $g(x, y) = z$ traverse le champ d'intégration, l'intégrale devient infinie, et la fonction $F(z)$, en général finie et déterminée, admet pour coupure une portion K de l'axe des x. Si l'on appelle ΔF la différence des valeurs de la fonction aux deux bords de la coupure, on trouve

$$\Delta F = 2\pi i \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(x, y, z)}{g'_y(x, y)} dx.$$

Dans cette expression, y doit être remplacé par sa valeur tirée de l'équation $g(x, y) = z$; le facteur $\frac{dx}{g'_y(x, y)}$ doit être pris positivement; l'intégrale s'étend tout le long de la portion de la courbe comprise dans le champ d'intégration.

Comme application, M. Laguerre envisage la fonction

$$G(\alpha, \beta, a, b, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{ab} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{a(a+1)b(b+1)} z^2 + \ldots,$$

qui, pour $b = 1$, se réduit à la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, a, x)$ sous les conditions $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > \alpha$, $b > \beta$; la fonction G est définie pour tous les points du plan, sauf sur la coupure $1, +\infty$.

On trouve

$$\Delta G = \frac{2i\pi\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times z^{1-a}(z-1)^{a+b-\alpha-\beta-1} F(b-\alpha, b-\beta, a+b-\alpha-\beta, 1-z).$$

L'étude de la fonction G, lorsqu'on la prolonge d'une manière continue, se ramène donc à l'étude du prolongement des fonctions z^μ, $(1-z)^\mu$ et de la fonction hypergéométrique.

N° 25; 22 décembre.

D'Ocagne. — Sur l'équation indéterminée $x^2 - Ky^2 = z^n$. (1112).

Si l'on pose

$$\varphi(\alpha, \beta, n) = \sum_{i=0}^{i = E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{(n-i-1)(n-i-2)\ldots(n-2i)}{1.2\ldots i} \alpha^{n-(2i+1)}\beta^i,$$

les formules qui résolvent en nombres entiers et positifs l'équation

$$x^2 - Ky^2 = z^n,$$

où K et n sont des entiers et positifs, sont les suivantes :

$$x = a\varphi(2a, K - a^2, n) + (K - a^2)\varphi(2a, K - a^2, n-1),$$
$$y = \varphi(2a, K - a^2, n),$$
$$z = |a^2 - K|,$$

a étant un nombre entier et positif quelconque, assujetti, dans le cas de n impair, à être plus grand que $\sqrt{K}$.

2nd Part.

N° 26 ; 29 décembre.

De Jonquières. — Théorème concernant les polynômes algébriques complets. Application à la règle des signes de Descartes. (1143-1144).

Lorsqu'on se donne l'*espèce* d'une équation algébrique complète, c'est-à-dire les signes des coefficients, on peut toujours déterminer une infinité de systèmes de valeurs numériques des coefficients, tels que, pour chacun de ces systèmes, l'équation possède juste autant de racines réelles positives que de variations et autant de racines réelles négatives que de permanences.

Poincaré. — Sur les intégrales des différentielles totales. (1145-1147).

M. Poincaré signale un certain nombre de résultats relatifs aux intégrales de première espèce des différentielles totales, au sujet desquelles M. Picard a démontré récemment une proposition fondamentale.

Il fait connaître les surfaces du quatrième ordre qui possèdent des intégrales de première espèce.

Toutes les surfaces réglées et toutes les surfaces de révolution, non unicursales, admettent des intégrales de première espèce.

Une surface sur laquelle on peut tracer deux séries de courbes unicursales n'a pas d'intégrale de première espèce. Une surface non unicursale, sur laquelle on peut tracer une série de courbes unicursales, de telle façon que par chaque point de la surface passe, en général, une seule de ces courbes, a des intégrales de première espèce.

Il en est de même pour une surface engendrée par l'élimination de deux paramètres a et b entre les trois équations

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\varphi_1(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\psi(a, b) = 0,$$

si les trois polynômes φ, φ_1, ψ sont les plus généraux de leurs degrés.

Enfin, le théorème d'Abel s'applique aux intégrales de différentielles totales.

Picard (*E.*). — Sur les intégrales de différentielles totales et sur une classe de surfaces algébriques. (1147-1148).

L'auteur considère une surface d'ordre m,

$$f(x, y, z) = 0,$$

n'ayant que les singularités ordinaires définies dans sa Communication du 2 décembre. A quelles conditions les coordonnées d'un point pourront-elles s'exprimer par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres? Ces conditions, nécessaires et suffisantes, sont les suivantes :

La surface proposée a une courbe double d'ordre $\frac{m(m-4)}{2}$, *elle possède deux intégrales de différentielles totales de première espèce*

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} \text{ et } \int \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z},$$

pour lesquelles le déterminant $AB_1 - A_1B$ *n'est pas identiquement nul.*

De là résulte que la surface est d'ordre pair, de genre un, et n'a pas de points doubles *isolés*.

Les deux équations aux différentielles totales

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = du,$$

$$\frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = dv$$

donneront pour x et y des fonctions uniformes, quadruplement périodiques, de u et de v.

Amigues. — Sur une série analogue à celle de Lagrange. (1149-1151).

Soient

$f(z)$ et $\varphi(z)$ deux fonctions uniformes et continues à l'intérieur d'un contour K ;

x un point intérieur à ce contour ;

α une constante assez petite pour que la condition

$$\text{mod}\,\frac{\alpha f(z)}{z-x} < 1$$

soit satisfaite en tous les points du contour K. L'équation

$$(1) \qquad z = x + \alpha f(z)$$

admet, comme on sait, une racine unique dans l'intérieur du contour. Si la fonction $f(z)$ et la dérivée $1 - \alpha f'(z)$ de l'équation (1) ne sont nulles ni l'une ni l'autre à l'intérieur de K ; on a

$$\frac{\varphi(a)}{1-\alpha f'(a)} = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n}{dx^n}\,[f(x)^n\varphi(x)].$$

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

3e série, t. Ier, 1884 (1).

Picard. — Mémoire sur les formes quadratiques binaires indéfinies à indéterminées conjuguées. (9-54).

Nous citons presque en entier la lumineuse introduction du Mémoire de M. Picard.

« J'ai montré, dans un travail précédent (*Acta Math.*, I), comment les formes quadratiques indéfinies à indéterminées conjuguées et à coefficients entiers pouvaient conduire à une classe étendue de groupes discontinus de substitutions linéaires, et ces groupes sont isomorphes aux groupes de substitutions qui transforment ces formes en elles-mêmes. En se bornant aux formes quadratiques binaires, la question se posait alors de chercher les substitutions fondamentales d'un tel groupe pour une forme quadratique indéfinie donnée. C'est là un problème qui est intimement lié à la théorie arithmétique de ces formes, théorie qui n'a pas encore été développée et dont je me propose d'indiquer dans ce Mémoire quelques points fondamentaux, qui donneront d'ailleurs immédiatement la solution du problème proposé.

» On connaît la méthode célèbre par laquelle M. Hermite ramène l'étude arithmétique d'une forme quadratique réelle indéfinie à la réduction continuelle d'une forme définie dépendant de certains paramètres arbitraires... La méthode de M. Hermite peut s'étendre aux formes quadratiques à indéterminées conjuguées, et cette extension est le point de départ de mon étude sur les formes binaires *indéfinies*. Quant aux conditions de la réduction d'une forme binaire *définie* à indéterminées conjuguées, elles ont été données par M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 47), et elles sont très convenables pour notre objet, car nous établirons qu'en général à une forme définie ne correspondent que deux réduites, et celles-ci diffèrent seulement par le signe des coefficients moyens; j'ajoute que, dans toute cette théorie, nous n'employons que des substitutions dont le déterminant est égal à l'unité. La forme définie, que nous sommes conduits à associer à la forme indéfinie donnée, ne renferme qu'un paramètre arbitraire z, et il suffit de donner à ce paramètre toutes les valeurs complexes de module inférieur à l'unité. Les conditions de réduction de cette forme sont susceptibles d'une interprétation géométrique remarquable, qui permet d'effectuer sans peine la réduction continuelle : elles expriment que le point dont l'affixe est z doit être à l'intérieur d'un polygone, limité par des arcs de cercle orthogonaux au cercle de rayon 1.

» Ce travail est divisé en cinq Chapitres. Dans le premier, je construis la forme définie associée Φ et arrive à la notion de réduite pour les formes indéfinies; j'établis ensuite que le nombre des réduites est limité, mais en supposant que le déterminant de la forme n'est pas une somme de deux carrés. Le

(1) Voir *Bulletin*, VIII_2, p. 59.

second Chapitre est principalement consacré aux représentations géométriques dont j'ai parlé plus haut; je puis alors étendre facilement le théorème sur le nombre limité des réduites aux cas qui avaient été écartés. Dans la troisième Partie, j'examine d'abord les diverses circonstances qui peuvent se présenter dans la réduction d'une forme définie; je montre ensuite comment peut s'effectuer la réduction continuelle de la forme Φ, et comment cette réduction donnera les substitutions fondamentales du groupe de substitutions semblables. Dans le quatrième Chapitre, je cherche explicitement les substitutions qui réduisent de nouveau la forme Φ, quand celle-ci, pour une variation infiniment petite du paramètre, cesse d'être réduite, et cela dans tous les cas qui peuvent se présenter; je fais ensuite une application numérique complète. Dans la dernière Partie, je reviens sur le groupe dont il a été question au début pour montrer directement qu'il est discontinu. »

Lindstedt. — Sur la détermination des distances mutuelles dans le problème des trois corps. (85-102).

La partie principale du problème des trois corps consiste à déterminer les distances mutuelles en fonction du temps; on sait que dans les expressions de ces distances mutuelles entrent neuf constantes d'intégration indépendantes.

Lagrange a donné les équations différentielles, symétriques par rapport aux trois masses M, m, m', qui lient les distances r, r', Δ de M à m, de M à m' et de m à m'. M. Lindstedt se propose d'intégrer ces équations, dans un cas remarquable, en conservant la symétrie qui doit exister entre les trois corps.

Il suppose, comme on le fait dans la théorie des perturbations : 1° que les excentricités des orbites des petites masses m et m' autour de la grande masse M sont assez petites; 2° que le rapport $\frac{r}{r'}$ est constamment inférieur ou constamment supérieur à l'unité.

On satisfait à ces conditions en posant

$$r^2 = a^2(1+\rho), \quad r'^2 = a'^2(1+\rho'), \quad \Delta^2 = d^2(1+\delta).$$

a^2, a'^2, d^2 étant des constantes, et ρ, ρ', δ'' des fonctions plus petites que l'unité en valeur absolue.

Les équations que M. Lindstedt substitue à celles de Lagrange sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2q}{dt^2} + (\alpha_0-\lambda_0)u + (\beta_0-\mu_0)u' + (\gamma_0-\nu_0)v - \tau_0 q \\
&\qquad = (U_0-\lambda_0)u + (U'_0-\mu_0)u' + (V_0-\nu_0)v - \tau_0 q, \\
&\frac{d^2u}{dt^2} + (\alpha_1-\lambda_1)u + (\beta_1-\mu_1)u' + (\gamma_1-\nu_1)v + (\varepsilon_1-\tau_1)q \\
&\qquad = (U_1-\lambda_1)u + (U'_1-\mu_1)u' + (V_1-\nu_1)v + (Q_1-\tau_1)q, \\
&\frac{d^2u'}{dt^2} + (\alpha_2-\lambda_2)u + (\beta_2-\mu_2)u' + (\gamma_2-\nu_2)v + (\varepsilon_2-\tau_2)q \\
&\qquad = (U_2-\lambda_2)u + (U'_2-\mu_2)u' + (V_2-\nu_2)v + (Q_2-\tau_2)q, \\
&\frac{d^2v}{dt^2} + (\alpha_3-\lambda_3)u + (\beta_3-\mu_3)u' + (\gamma_3-\nu_3)v + (\varepsilon_3-\tau_3)q \\
&\qquad = (U_3-\lambda_3)u + (U'_3-\mu_3)u' + (V_3-\nu_3)v + (Q_3-\tau_3)q.
\end{aligned}\right.$$

u, u', v sont les dérivées $\frac{d(r^2)}{dt}$, $\frac{d(r'^2)}{dt}$, $\frac{d(\Delta^2)}{dt}$; les λ, μ, ν, τ sont des constantes provisoirement indéterminées, dont l'introduction sera justifiée par la suite; les U, U', V, Q sont des séries, sans termes constants, ordonnées suivant les puissances croissantes de ρ, ρ', δ; les α, β, γ, ε désignent les termes constants des développements correspondants. Ainsi, $U_1 + \alpha_1$ est le développement de l'expression

$$-\left[\frac{M+m}{a^3}(1+\rho)^{-\frac{3}{2}} + \frac{2m'}{a'^3}(1+\rho')^{-\frac{3}{2}} + \frac{2m'}{d^3}(1+\delta)^{-\frac{3}{2}}\right],$$

et ainsi de suite.

Les intégrales du système (1) s'obtiennent par approximations successives. La première approximation s'obtient en faisant

$$\rho = \rho' = \delta = 0.$$

Pour conserver la symétrie entre les trois masses, M. Lindstedt développe ces intégrales suivant les puissances de quatre quantités η, η', k, k' qui s'introduisent comme constantes d'intégration dans le problème des trois corps, de la même manière que l'excentricité dans le problème des deux corps, et dont les valeurs numériques doivent faire converger les séries obtenues pour toute valeur de t. On reconnaît alors que les fonctions

$$u,\ u',\ v,\ q;\quad \rho,\ \rho',\ \delta;\quad r^2,\ r'^2,\ \Delta^2$$

sont en général des séries purement trigonométriques contenant quatre arguments distincts

$$nt + \varpi,\quad n't + \varpi',\quad \nu t + \omega,\quad \nu' t + \omega'.$$

Chaque terme dont l'argument est

$$i(nt+\varpi) \pm i'(n't+\varpi') \pm j(\nu t+\omega) \pm j'(\nu' t+\omega'),$$

admettant pour multiplicateur le produit $\eta^i \eta'^{i'} k^j k'^{j'}$, sera dit de *l'ordre*

$$i + i' + j + j'.$$

La $n^{\text{ième}}$ approximation fournira les termes du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Les constantes d'intégration sont les onze quantités

$$a^2,\ a'^2,\ d^2,\ \eta,\ \eta',\ k,\ k',\ \varpi,\ \varpi',\ \omega,\ \omega';$$

mais il existe deux relations entre ces constantes arbitraires et les masses.

Lorsqu'on aura trouvé un système de valeurs approchées de u, u', v, q, on calculera les seconds membres des équations (1) en y substituant ces valeurs. On obtiendra de cette manière un système d'équations linéaires à coefficients constants, dont les seconds membres sont des fonctions explicites du temps ne contenant que des termes périodiques. L'intégration de ce système par les méthodes connues fournira une nouvelle approximation. On pourra toujours disposer des indéterminées λ, μ, ν, τ, de manière à faire disparaître les termes séculaires dans les intégrales.

André (*D.*). — Étude sur les maxima, minima et séquences des permutations. (121-134).

Considérons toutes les permutations sans répétition qu'on peut former avec n nombres inégaux. Dans l'une quelconque d'entre elles, un nombre placé entre deux autres est un *maximum* s'il les dépasse tous deux, un *minimum* s'il leur est inférieur; un nombre placé au commencement ou à la fin de la permutation est un maximum s'il dépasse le nombre voisin, un minimum s'il ne le dépasse pas. On appelle *séquence* une suite de nombres juxtaposés, dont le premier est un maximum et le dernier est un minimum ou réciproquement, mais dont aucun intermédiaire n'est ni un maximum ni un minimum.

M. André nomme permutations (n, s) les permutations de n éléments qui présentent s séquences, permutations $[n, \mu, \mu']$ les permutations de n éléments qui présentent μ maxima et μ' minima; il désigne par $P_{n,s}$ le nombre des premières, par $M_{n,\mu,\mu'}$ celui des secondes, et il se propose de trouver une méthode simple pour calculer les nombres $P_{n,s}$ et $M_{n,\mu,\mu'}$.

Le nombre s des séquences est toujours égal à $\mu + \mu' - 1$. La différence $\mu - \mu'$ ne peut avoir que l'une des trois valeurs $+1$, 0, -1. Il suit de là qu'il existe trois sortes de permutations $[n, \mu, \mu']$, savoir les permutations $[n, \sigma+1, \sigma]$, les permutations $[n, \sigma, \sigma]$ et les permutations $[n, \sigma, \sigma+1]$. Les trois relations

$$M_{n,\sigma,\sigma} = P_{n,2\sigma-1}, \quad M_{n,\sigma+1,\sigma} = M_{n,\sigma,\sigma+1} = \frac{1}{2} P_{n,2\sigma}$$

ramènent le calcul des nombres M à celui des nombres P.

Relativement à ces derniers, l'auteur démontre une formule fondamentale, qui résout le problème, en donnant un moyen régulier et simple de calculer de proche en proche les nombres $P_{n,s}$:

$$P_{n,s} = s P_{n-1,s} + 2 P_{n-1,s-1} + (n-s) P_{n-1,s-2}.$$

Grâce à cette formule, on peut former une Table des nombres $P_{n,s}$ par un procédé analogue à celui qui donne le triangle de Pascal.

L'inspection du triangle des nombres $P_{n,s}$ permet à M. André de constater cette propriété remarquable des permutations :

Parmi les permutations de n éléments, il y a autant de permutations ayant un nombre pair de séquences que de permutations en ayant un nombre impair.

En terminant, l'auteur calcule le nombre total des séquences qui est égal à $\frac{2n-1}{3} n!$, et le nombre moyen des séquences qui est égal à $\frac{2n-1}{3}$.

Appell. — Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce. (135-175).

L'objet principal du Mémoire de M. Appell est la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce.

Une pareille fonction est définie par les deux relations

$$(1) \qquad f(z+2K) = f(z), \quad f(z+2iK') = e^{Az+B} f(z),$$

où A est nécessairement de la forme $-\frac{m\pi i}{K}$, m désignant un entier positif ou négatif.

Si $f(z)$ est méromorphe, elle possède dans le parallélogramme des périodes $2K$ et $2iK'$ plus de zéros que de pôles lorsque m est positif, plus de pôles que de zéros lorsque m est négatif; dans ce dernier cas, il ne peut exister de fonctions entières vérifiant les équations (1).

Par le changement de z en $z + \frac{BK}{m\pi i}$, les équations (1) deviennent

$$(2) \qquad F(z+2K) = F(z), \quad F(z+2iK') = e^{-\frac{m\pi z i}{K}} F(z).$$

M. Appell se propose de décomposer $F(z)$ en une somme d'éléments simples n'ayant chacun qu'un pôle dans le parallélogramme des périodes et une partie entière, s'il y a lieu. Les circonstances de la décomposition sont entièrement différentes, suivant que m est positif ou négatif

I. $m > 0$.

Il existe entre les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et les zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+p}$ de la fonction méromorphe $F(z)$ la relation

$$\Sigma\beta - \Sigma\alpha + mK = 2nK + 2n'iK'.$$

$F(z)$ peut être une fonction entière : c'est alors une fonction linéaire et homogène à coefficients constants des m fonctions particulières

$$g_\nu^{(m)}(z) = e^{\frac{\nu\pi z i}{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi z i}{K}} q^{mn(n-1)+2n\nu}, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

où q désigne la quantité $e^{\frac{-\pi K'}{K}}$.

Si $F(z)$ est une fonction méromorphe à pôles *simples*, on peut prendre pour élément de décomposition la fonction

$$\psi_m(z, \alpha) = e^{\frac{m\pi(z-\alpha)i}{2K}} \frac{H'(0)}{H'(z-\alpha)} \frac{H(z-a_1)H(z-a_2)\ldots H(z-a_{m+1})}{H(\alpha-a_1)H(\alpha-a_2)\ldots H(\alpha-a_{m+1})},$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_m$ désignent des constantes arbitraires, a_{m+1} étant déterminé par la relation

$$a_{m+1} = \alpha + mK - a_1 - a_2 - \ldots - a_m.$$

Cette fonction $\psi_m(z, \alpha)$ admet pour pôle simple le point α avec le résidu $+1$; elle vérifie les deux équations

$$\psi_m(z+2K, \alpha) = \psi_m(z, \alpha), \quad \psi_m(z+2iK', \alpha) = e^{\frac{-m\pi z i}{K}} \psi(z, \alpha).$$

Soient maintenant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les p pôles simples de $F(z)$, $R_1, R_2, \ldots, R_p$ les résidus correspondants, la formule de décomposition cherchée est

$$F(z) = R_1\psi_m(z, \alpha_1) + R_2\psi_m(z, \alpha_2) + \ldots + R_p\psi_m(z, \alpha_p) + G(z),$$

où $G(z)$ est une fonction *entière* satisfaisant aux équations (2), et qui s'exprime linéairement au moyen de m fonctions entières connues.

Lorsque le pôle α est d'un degré $r > 1$, on devra, dans la formule de décomposition, remplacer le terme $R_1\psi_m(z, \alpha)$ par la somme

$$R_1\psi_m(z, \alpha) + R_1'\psi_m'(z, \alpha) + \ldots + \frac{R_1^{(r-1)}}{1.2\ldots(r-1)} \psi_m^{(r-1)}(z, \alpha).$$

où $\psi_m^{(i)}(z, \alpha)$ représente la dérivée d'ordre i de $\psi_m(z, \alpha)$ par rapport à α, et où $R_1, R_1, \ldots, R_1^{(r-1)}$ sont les numérateurs des fractions élémentaires dont la somme constitue la partie principale de $F(z)$ dans le voisinage du pôle multiple $z = \alpha$.

Enfin, si α est un point essentiel *isolé*, il suffit de faire $r = \infty$.

II. $m < 0$.

Faisons $m = -\mu$. Il conviendra de prendre pour élément de décomposition la fonction

$$\chi_\mu(z, \alpha) = \frac{\pi i}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n \pi \alpha i}{K}} q^{\mu n(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(z-\alpha)i}{K}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(z-\alpha)i}{K}} - q^{2n}}.$$

Cette fonction admet pour pôles simples le point α et ses homologues avec le résidu $+1$ (un seul pôle dans chaque parallélogramme). Elle vérifie les deux relations

$$\chi_\mu(z + 2K, \alpha) = \chi_\mu(z, \alpha),$$

$$\chi_\mu(z + 2iK', \alpha) = e^{\frac{\mu\pi z i}{K}} \chi_\mu(z, \alpha) - \frac{\pi i}{2K}\left(1 + e^{\frac{\mu\pi z i}{K}}\right) g_0^{(\mu)}(\alpha) - \frac{\pi i}{K} e^{\frac{(\mu-1)\pi z i}{K}} g_1^{(\mu)}(\alpha)$$
$$- \frac{\pi i}{K} e^{\frac{(\mu-2)\pi z i}{K}} g_2^{(\mu)}(\alpha) - \ldots - \frac{\pi i}{K} e^{\frac{\pi z i}{K}} g_{\mu-1}^{(\mu)}(\alpha),$$

où les μ fonctions g sont celles qui ont été définies précédemment.

La formule de décomposition est alors

$$F(z) = R_1 \chi_\mu(z, \alpha_1) + R_2 \chi_\mu(z, \alpha_2) + \ldots + R_p \chi_\mu(z, \alpha_p).$$

Mais, tandis que, dans la première formule de décomposition, les résidus étaient indépendants des pôles correspondants, il existe actuellement μ relations entre les résidus $R_1, R_2, \ldots, R_p$ et les pôles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, savoir

$$R_1 g_\nu^{(\mu)}(\alpha_1) + R_2 g_\nu^{(\mu)}(\alpha_2) + \ldots + R_p g_\nu^{(\mu)}(\alpha_p) = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1).$$

Si $F(z)$ admet un point singulier α unique, mais d'ordre supérieur au premier, en sorte que sa partie principale aux environs de ce point soit

$$\frac{R_1}{z - \alpha} + \frac{R_2}{(z - \alpha)^2} + \ldots,$$

on a, pour expression de $F(z)$,

$$F(z) = \sum_n \frac{R_n}{1.2\ldots(n-1)} \frac{\partial^{n-1} \chi^{(n-1)}(z, \alpha)}{\partial \alpha^{n-1}},$$

les coefficients $R_1, R_2, \ldots$ vérifiant les μ relations

$$\sum_n \frac{R_n}{1.2\ldots(n-1)} \frac{d^n g_\nu^{(\mu)}(\alpha)}{d\alpha^n} = 0, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1).$$

On passe facilement de ce cas à celui où les singularités de $F(z)$ sont en nombre quelconque.

Les résultats précédents peuvent être étendus à certaines fonctions d'un point analytique.

Soient $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique de genre $p \geq 1$;

$$u^{(1)}(x, y),\ u^{(2)}(x, y),\ \ldots,\ u^{(p)}(x, y)$$

les intégrales abéliennes de première espèce correspondantes;

$$\begin{array}{llll} \Omega_1^{(i)} = 0, & \Omega_3^{(i)} = 0, & \ldots, & \Omega_{2i-1}^{(i)} = 2\pi\sqrt{-1}, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p-1}^{(i)} = 0, \\ \Omega_2^{(i)} = 0, & \Omega_4^{(i)} = 0, & \ldots, & \Omega_{2i}^{(i)} = 2\alpha_{ii}, \qquad \ldots, \quad \Omega_{2p}^{(i)} = 2\alpha_{ip} \end{array}$$

les $2p$ périodes normales de l'intégrale abélienne $u^{(i)}(x, y)$; $\Theta(u_i)$ la fonction Θ de p variables formée avec les périodes normales.

Il s'agit de décomposer en éléments simples les fonctions $\Phi(x, y)$ du point analytique (x, y), qui satisfont aux $2p$ relations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [\Phi(x, y)]_{2i-1} = \Phi(x, y) \\ [\Phi(x, y)]_{2i} = e^{-mu^{(i)}(x, y)}\Phi(x, y), \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où $[\Phi(x, y)]_k$ désigne ce que devient $\Phi(x, y)$ quand le point (x, y) décrit le cycle correspondant au groupe de périodes

$$\Omega_k^{(1)},\ \Omega_k^{(2)},\ \ldots,\ \Omega_k^{(p)}.$$

Supposons m positif, et considérons la fonction

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ \alpha, & \beta \end{pmatrix} = \frac{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(a, b) + h_i]}{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\alpha, \beta) + h_i]},$$

où

$$h_i = C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k)$$

(pour la signification de la constante C_i, *voir* Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*). Cette fonction du point (x, y) a un seul zéro (a, b) et un seul pôle (α, β). L'élément de la décomposition sera alors

$$\Psi(x, y \mid \alpha, \beta) = C\begin{pmatrix} a, & b \\ \alpha, & \beta \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{k=m} \Theta_1[u^{(i)}(x, y) - h_i^{(k)}],$$

où C est une constante indépendante de (x, y) et où les constantes $h_i^{(k)}$ satisfont aux p relations

$$u^{(i)}(a, b) - u^{(i)}(\alpha, \beta) + h_i^{(1)} + h_i^{(2)} + \ldots + h_i^{(m)} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Cette fonction n'a qu'un infini (α, β) et vérifie les relations (3) : on achèvera de la déterminer en choisissant la constante C de telle façon que son résidu relatif au pôle (α, β) soit égal à l'unité.

Si alors la fonction $\Phi(x, y)$ à décomposer admet q pôles simples (α_1, β_1), (α_2, β_2), $\ldots$, (α_q, β_q) de résidus respectifs R_1, R_2, $\ldots$, R_q, on aura

$$\Phi(x, y) = R_1\Psi(x, y \mid \alpha_1, \beta_1) + \ldots + R_q\Psi(x, y \mid \alpha_q, \beta_q) + G(x, y).$$

$G(x, y)$ désignant une fonction entière. Cette formule s'étend facilement au cas où il y a des pôles multiples.

M. Appell ne donne pas la formule de décomposition correspondant au cas de $m < 0$.

Méray. — Observations sur la légitimité de l'interpolation. (165-176).

L'interpolation d'une fonction $f(z)$ dans une aire donnée S paraît impossible, si $f(z)$ ne réalise pas les conditions suivantes : $f(z)$ doit non seulement être holomorphe dans l'aire S, mais encore y posséder en chaque point un rayon de convergence au moins égal à la distance maxima de ce point aux divers points de l'aire en question.

M. Méray démontre une proposition qui confirme pleinement cette induction pour les aires circulaires.

Méray. — Sur l'existence effective des deux périodes des fonctions elliptiques. (177-180).

La fonction u de x définie par l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{g(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}$$

possède deux périodes $\Omega = \Omega' + i\Omega''$, $\Pi = \Pi' + i\Pi''$. Cette propriété est incomplètement démontrée, si l'on ne fait pas voir que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \Omega' & \Omega'' \\ \Pi' & \Pi'' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

M. Méray fournit la preuve directe de cette dernière proposition.

Floquet. — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. (180-238).

Soit

$$P(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0$$

une équation différentielle linéaire, à coefficients uniformes et doublement périodiques, des périodes ω et ω', et dont l'intégrale générale est supposée uniforme. M. Floquet se propose de trouver comment cette double périodicité des coefficients se traduit dans les intégrales.

Si, faisant abstraction de la période ω', on ne considère que la période ω, l'intégration dépend d'une certaine équation algébrique $\Delta = 0$, du degré m par rapport à l'inconnue ε, et que l'auteur a nommée l'*équation fondamentale relative à la période* ω (voir *Annales de l'École Normale*, p. 49; 1883).

Chaque racine ε_i a deux caractéristiques, son degré de multiplicité μ_i et l'ordre λ_i à partir duquel les déterminants mineurs de Δ cessent d'être tous nuls pour $\varepsilon = \varepsilon_i$. La seconde λ_i représente le nombre maximum des solutions distinctes $S(x)$, périodiques de seconde espèce, avec la période ω et le multi-

plicateur ε. La première μ_i représente le nombre maximum des solutions distinctes de la forme

$$\mathfrak{P}(x) = \varphi_0(x) + x\varphi_1(x) + \ldots + x^i\varphi_i(x),$$

où $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_i(x)$ sont des fonctions de seconde espèce de période ω et de multiplicateur ε_i. Si l'on désigne par n le nombre des racines distinctes de Δ et que l'on pose

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \nu,$$

$P = 0$ admet comme intégrales distinctes ν fonctions $S(x)$, et ν seulement $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_\nu(x)$.

Mêmes conclusions, si l'on envisage la seule période ω'. On trouvera une autre équation fondamentale $\Delta' = 0$, admettant n' racines distinctes. Chacune d'elles ε'_i est caractérisée par les nombres μ'_i, λ'_i; $P = 0$ admettra ν' solutions $S'_1(x)$, $S'_2(x)$, ..., $S'_{\nu'}(x)$ de seconde espèce et de période ω'.

Ces préliminaires posés, l'auteur cherche les intégrales doublement périodiques et de seconde espèce de l'équation $P = 0$. Si, parmi les ν intégrales $S(x)$ ou les ν' intégrales $S'(x)$, une fonction se trouve seule de son multiplicateur, elle est doublement périodique de seconde espèce. Si donc l'une des deux équations fondamentales n'a que des racines simples (ce qui est le cas général), l'équation $P = 0$ admet comme intégrales distinctes m fonctions doublement périodiques de seconde espèce : c'est le théorème de M. Picard. Le nombre maximum N de ces intégrales ne peut surpasser ni ν ni ν', mais il ne peut tomber au-dessous de n et de n'. Il en résulte que $P = 0$ admet toujours une intégrale doublement périodique de seconde espèce, comme l'ont démontré MM. Picard et Mittag-Leffler. Pour que N soit égal à m, il faut et il suffit que toute racine de chaque équation fondamentale annule tous les mineurs du premier membre jusqu'à l'ordre marqué par son degré de multiplicité exclusivement. M. Floquet démontre divers théorèmes sur les limites ν, ν' et n, n' du nombre N.

Il passe ensuite aux intégrales qui ne seraient pas des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Il les obtient en cherchant les solutions susceptibles des deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$. Finalement, il parvient au résultat suivant :

L'équation $P = 0$ admet m solutions distinctes, affectant la forme de polynômes aux deux variables x et $Z(x)$, les coefficients de chaque polynôme étant des fonctions doublement périodiques de seconde espèce de mêmes multiplicateurs, aux périodes ω et ω'; $Z(x)$ désigne une fonction uniforme qui augmente de quantités constantes quand on y remplace x par $x + \omega$ ou par $x + \omega'$,

$$Z(x+\omega) = Z(x) + q, \quad Z(x+\omega') = Z(x) + q',$$

et telle que la différence $\omega q' - q\omega'$ ne soit pas nulle. Si dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ le coefficient de i est positif, on prendra

$$Z(x) = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)},$$

$\theta(x)$ étant une des quatre fonctions θ, et dans ce cas on aura

$$q = 0, \quad q' = -\frac{2\pi i}{\omega}, \quad \omega q' - q\omega' = -2\pi i.$$

Si le coefficient de i est négatif, on prendra

$$Z(x) = \frac{\mathfrak{S}'(x)}{\mathfrak{S}(x)},$$

$\mathfrak{S}(x)$ étant l'une des fonctions $\mathfrak{S}$, avec

$$q = \frac{2\pi i}{\omega'}, \quad q' = 0, \quad \omega q' - q\omega' = -2\pi i.$$

Comme les polynômes en x et $Z(x)$ se réduisent généralement à leurs termes constants, il existe en général un système fondamental d'intégrales doublement périodiques de seconde espèce.

Stéphanos. — Mémoire sur la théorie des formes binaires et sur l'élimination. (329-388).

Ce travail a été analysé dans la première Partie du *Bulletin*.

Lefébure. — Mémoire sur la composition de polynômes entiers qui n'admettent que des diviseurs premiers d'une forme déterminée. (389-404).

L'auteur se propose de déterminer des polynômes entiers qui n'admettent que des facteurs premiers de la forme $HT + 1$, T désignant un entier arbitraire.

I. Soit $T = n^t$, n étant premier. Considérons le polynôme

$$F_n(A, B) = A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1} = \frac{A^n - B^n}{A - B},$$

dans lequel A et B sont des entiers quelconques premiers entre eux.

Si A et B sont des puissances $n^{\text{ièmes}}$, $A = C^n$, $B = D^n$, les diviseurs premiers de $F_n(A, B)$ sont de la forme $Hn^2 + 1$.

Plus généralement, si A et B sont des puissances égales de puissances $n^{\text{ièmes}}$, $A = C^{nt-1}$, $B = D^{nt-1}$, les diviseurs premiers de $F_n(A, B)$ sont de la forme $Hn^t + 1$.

II. Soit $T = n^t m^h$, n et m étant premiers. Considérons la fonction $F_n(u^m, v^m)$, où $u = C^{mh-1nt-1}$, $v = D^{mh-1nt-1}$. Le quotient

$$\Pi_{mn} = \frac{F_n(u^m, v^m)}{F_n(u, v)}$$

est un polynôme entier dont les diviseurs premiers sont de la forme

$$Hm^h n^t + 1.$$

On peut l'écrire encore

$$\Pi_{mn} = \frac{F_m(u^n, v^n)}{F_m(u, v)} = \frac{(u^{mn} - v^{mn})(u - v)}{(u^n - v^n)(u^m - v^m)}.$$

III. Soit $T = n^t m^h s^k$. Le quotient

$$\Pi_{mns} = \frac{F_n(u^{ms}, v^{ms})\, F_n(u, v)}{F_n(u^m, v^m)\, F_n(u_s, v_s)} = \frac{(u^{msn} - v^{msn})(u^m - v^m)(u^s - v^s)(u^n - v^n)}{(u^{ms} - v^{ms})(u^{mn} - v^{mn})(u^{sn} - v^{sn})(u - v)},$$

dans lequel

$$u = C^{nt-1mh-1sk-1}, \quad v = D^{nt-1mh-1sk-1},$$

est un polynôme entier dont les diviseurs premiers sont de la forme

$$H n^t m^h s^k + 1.$$

Floquet. — Addition à un Mémoire sur les équations différentielles linéaires. (405-408).

Dans le voisinage d'un point essentiel *isolé,* supposé situé à l'origine, $f(x)$ et ses dérivées sont développables en une double série convergente, procédant suivant les puissances entières positives et négatives de x. Il n'en est pas toujours de même de la dérivée logarithmique $\frac{f'(x)}{f(x)}$, et plus généralement des quotients $\frac{f^{(i)}(x)}{f(x)}$. Lorsque $f(x)$ a une infinité de zéros dans le domaine de l'origine, $\frac{f^{(i)}(x)}{f(x)}$ n'est plus développable à la manière de $f(x)$.

Cette remarque, dont M. Floquet n'avait pas tenu compte dans un Mémoire antérieur (*Annales de l'École Normale,* t. VIII, Supplément, 1879) nécessite des rectifications à certains énoncés contenus dans ce travail.

Stieltjes. — Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques. (409-426).

Il s'agit des formules d'approximation qui servent à calculer la valeur d'une intégrale définie, et où les abscisses sont déterminées de manière à atteindre le plus haut degré de précision. M. Stieltjes examine si ces formules permettent d'atteindre une approximation indéfinie. On suppose habituellement que la fonction est développable en série suivant les puissances croissantes de la variable; mais les formules en question sont applicables dans des cas beaucoup plus étendus.

Soit $f(x)$ une fonction *donnée,* qui ne devient pas négative, quand x prend les valeurs finies a, b et toutes les valeurs intermédiaires. On suppose $f(x)$ intégrable dans cet intervalle, en sorte que $\int_a^b f(x)\,dx$ ait un sens déterminé; il n'est pas nécessaire que $f(x)$ reste toujours finie.

On peut déterminer un polynôme $P_n(x)$ d'un degré *donné* n par les conditions

$$\int_a^b f(x) P_n(x) x^k\,dx = 0, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ce polynôme $P_n(x)$ a, comme on sait, toutes ses racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ réelles, inégales et comprises entre a et b, en excluant les limites.

Soit maintenant $\mathcal{G}(x)$ un polynôme entier en x du degré $2n-1$ au plus. On aura la formule

$$\int_a^b f(x)\mathcal{G}(x)\,dx = A_1\mathcal{G}(x_1) + A_2\mathcal{G}(x_2) + \ldots + A_n\mathcal{G}(x_n),$$

où les constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$, données par les relations

$$A_k = \int_a^b f(x) \frac{P_n(x)}{(x - x_k) P'_n(x_k)} dz,$$

ne dépendent pas de la fonction $\mathcal{G}(x)$.

Ces constantes A_k sont toutes positives; elles jouissent de propriétés importantes, caractérisées par les inégalités

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k > \int_a^{x_k} f(x)\, dx, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n),$$

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k < \int_a^{x_{k+1}} f(x)\, dx, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

Pour appliquer ces résultats à la quadrature de Gauss, il faut faire

$$f(x) = 1, \quad a = -1, \quad b = +1.$$

Les inégalités précédentes montrent alors que $x_1, x_2, x_3, \ldots$ tombent dans les intervalles

$$(-1, -1 + A_1), \quad (-1 + A_1, -1 + A_1 + A_2),$$
$$(-1 + A_1 + A_2, -1 + A_1 + A_2 + A_3), \quad \ldots.$$

Si l'on applique la quadrature à une fonction $\mathcal{F}(x)$, intégrable de -1 à $+1$, et toujours comprise entre deux limites finies, l'expression

$$(1) \qquad A_1 \mathcal{F}(x_1) + A_2 \mathcal{F}(x_2) + \ldots + A_n \mathcal{F}_n(x_n)$$

rentre par suite dans celle-ci, qui sert de définition à l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \mathcal{F}(x)\, dx$,

$$\lim [\delta_1 \mathcal{F}(\xi_1) + \delta_2 \mathcal{F}(\xi_2) + \ldots + \delta_n \mathcal{F}(x_n)],$$

et, comme les différences $x_1 + 1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots$ deviennent infiniment petites avec $\frac{1}{n}$, la formule (1) donne une approximation indéfinie.

Dans le cas particulier de la quadrature de Gauss, le polynôme P_n se confond avec le polynôme X_n de Legendre; et l'on sait qu'alors les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont distribuées de manière que les différences

$$x_1 + 1, \; x_2 - x_1, \; \ldots, \; x_n - x_{n-1}, \; 1 - x_n$$

deviennent infiniment petites avec $\frac{1}{n}$. Voici l'analogue de cette proposition dans le cas général:

Lorsque n augmente indéfiniment, les intégrales

$$\int_a^{x_1} f(x)\, dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx, \quad \ldots, \quad \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx, \quad \int_{x_n}^{b} f(x)\, dx$$

convergent toutes vers zéro, sans qu'on puisse affirmer la même chose des différences

$$x_1 - a, \; x_2 - x_1, \; \ldots, \; x_n - x_{n-1}, \; b - x_n;$$

les constantes A_k tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

M. Stieltjes indique, en terminant, un cas très étendu où la quadrature mécanique donne une approximation indéfinie.

Guichard. — Sur les fonctions entières. (427-432).

Étant données deux fonctions entières (holomorphes), $G(z)$ et $G_1(z)$, premières entre elles, c'est-à-dire n'ayant aucun zéro commun, on peut déterminer deux fonctions entières λ et μ satisfaisant à la relation

$$e^{-\mu(z)} G(z) + e^{-\mu(z)} \lambda(z) G_1(z) = 1.$$

Cette proposition est l'analogue du théorème d'Euler pour les polynômes.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une suite ayant le seul point limite $z = \infty$, il existe une fonction entière $G(z)$, prenant en ces points des valeurs données $b_1, b_2, \ldots, b_n$, et dont la dérivée $G'(z)$ prend, aux mêmes points, des valeurs $c_1, c_2, \ldots, c_n$ données à l'avance.

Une fonction entière, n'ayant pas de zéros doubles, satisfait à une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2y}{dz^2} = P\frac{dy}{dz} + Qy,$$

P et Q étant des fonctions entières.

Deux fonctions entières G et G_1, n'ayant pas de zéros doubles, satisfont à une même équation différentielle linéaire du troisième ordre, à coefficients entiers.

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON.

Vol. 173; 1882.

Darwin. — Sur la compression causée dans l'intérieur de la Terre par le poids des continents et des montagnes. (187-230).

Thomson (J.). — Sur la vibration d'un vortex annulaire et sur l'action réciproque de deux vortex dans un fluide parfait. (483-522).

Ce Mémoire est consacré à l'étude des vibrations de l'axe intérieur d'un vortex annulaire de section très petite par rapport à l'ouverture quand cet axe est un peu dévié de la forme circulaire et à l'étude de l'action de deux vortex annulaires qui s'approchent l'un de l'autre, leur distance mutuelle restant toutefois très grande par rapport à leurs diamètres.

Malet. — Sur une classe d'invariants. (751-776).

Étant donnée une équation différentielle linéaire d'ordre m sans second membre, on peut faire disparaître le second terme soit en multipliant toutes

les intégrales par une certaine fonction, soit en faisant un changement convenable de la variable indépendante.

Dans le premier cas, si l'on multiplie d'abord toutes les intégrales par une fonction arbitraire, puis que l'on fasse disparaître le second terme, on tombera évidemment sur la même équation que si l'on avait fait disparaître tout d'abord le second terme de l'équation proposée. On peut dire encore que les intégrales et par suite les coefficients de l'équation sans second terme ne dépendent que des rapports des intégrales de l'équation proposée. On déduit de là une suite de $m-1$ identités qui mettent en évidence l'existence de certains invariants, en ce sens que les fonctions considérées se reproduisent quand on substitue à l'équation proposée l'équation que l'on obtient en multipliant toutes les intégrales par une fonction arbitraire.

M. Malet donne explicitement ces fonctions pour les équations d'ordre 2, 3, 4 et applique ces résultats à la formation de l'équation différentielle du troisième ou du cinquième ordre qui admet pour intégrale le rapport de deux intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre ou du troisième ordre.

Dans le second cas, si l'on fait d'abord un changement quelconque de la variable indépendante, puis que, par un nouveau changement de cette variable, on fasse disparaître le second terme, on tombera manifestement sur la même équation qu'en faisant, par un changement de la variable indépendante, disparaître le second terme de la proposée; d'où une nouvelle classe de $m-1$ invariants; M. Malet donne encore ces invariants pour les équations d'ordre 2, 3, 4 et pour le second ordre il applique les résultats trouvés aux problèmes suivants : trouver la condition pour que deux intégrales y_1, y_2 soient liées par l'une des relations $y_1 y_2 = 1$, $y_1 = y_2^n$; intégrer alors l'équation proposée; il traite, pour le troisième et le quatrième ordre, des problèmes analogues.

Forsyth. — Mémoire sur les fonctions θ, en particulier sur les fonctions de deux variables. (788-862).

Ce Mémoire est divisé en quatre Sections. La première se rapporte à la théorie de Rosenhain; en suivant la voie indiquée par J.-S. Smith dans son Mémoire sur les fonctions θ d'une seule variable (*Proceedings of London Mathematical Society*, t. I), j'y établis un théorème général sur le produit de quatre doubles fonctions θ avec des variables et des caractéristiques différentes; elles sont définies comme il suit :

$$\Phi\left[\begin{pmatrix}\lambda\rho\\ \mu\nu\end{pmatrix} x, y\right]$$

s'obtient en donnant à m et à n toutes les valeurs entières positives ou négatives dans l'expression suivante :

$$(-1)^{m\lambda+n\rho} p^{\frac{1}{4}(2m+\mu)^2} q^{\frac{1}{4}(2n+\nu)^2} r^{\frac{1}{2}(2m+\mu)(2n+\nu)} e^{(2m+\mu)\frac{i\pi x}{2K}+(2n+\nu)\frac{i\pi y}{2\Lambda}}.$$

Le produit est égal à la somme de seize produits pareils et l'équation générale ainsi obtenue embrasse quatre mille quatre-vingt-seize cas particuliers. On établit les relations quadratiques entre les fonctions θ et l'on exprime les quinze quotients obtenus en divisant ces fonctions par l'une d'elles au moyen de deux nouvelles variables x_1, x_2, liées aux variables primitives x, y par les

formules

$$x = \int_0^{x_1} \frac{A + Bz}{\sqrt{Z}}\, dz + \int_0^{x_2} \frac{A + Bz}{\sqrt{Z}}\, dz,$$

$$y = \int_0^{x_1} \frac{A' + B'z}{\sqrt{Z}}\, dz + \int_0^{x_2} \frac{A' + B'z}{\sqrt{Z}}\, dz,$$

où

$$Z = z(1 - z)(1 - \varkappa_1^2 z)(1 - \varkappa_2^2 z)(1 - \varkappa_3^2 z),$$

et où A, B, C, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ sont des constantes parfaitement déterminées. La quadruple périodicité de ces fonctions est étudiée au début de la section; on y donne l'expression des périodes sous forme d'intégrales définies.

Dans la deuxième Section on donne les développements de toutes les fonctions 1° en séries trigonométriques, 2° en séries qui procèdent suivant les puissances ascendantes de x et de y; pour ces dernières on se sert du théorème qu'exprime la formule symbolique qui suit :

$$\Theta\left[\begin{pmatrix}\lambda\rho\\ \mu\nu\end{pmatrix} x, y\right] = e^{-\frac{2KA\log r}{\pi^2}\frac{d^2}{dx\,dy}}\theta_{\mu,\lambda}(x)\,\theta_{\nu,\rho}(y),$$

où $\theta_{\mu,\lambda}(x)$, $\theta_{\nu,\rho}(y)$ sont des fonctions θ simples; on déduit de ce théorème l'expression des quatre périodes et aussi une nouvelle preuve du théorème relatif aux produits de fonctions θ établi dans la première Section; on montre encore que la fonction Φ satisfait à deux équations différentielles de la forme

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} - 2x\left(\varkappa'^2 - \frac{E}{K}\right)\frac{d\Phi}{dx} + 2\varkappa\varkappa'\frac{d\Phi}{d\varkappa} = 0$$

[où $\varkappa$, $\varkappa'$, E ont le sens habituel relatif à la fonction $\theta_{\mu,\lambda}(x)$] et à une équation de la forme

$$r\frac{d\Phi}{dr} + \frac{2KA}{\pi^2}\frac{d^2\Phi}{dx\,dy} = 0.$$

Dans la Section III on développe le théorème d'addition; à proprement parler, il n'y a pas de théorème d'addition pour les fonctions θ, c'est-à-dire que $\Phi(x+\xi, y+\eta)$ ne s'exprime pas au moyen de fonctions de x et de y, de ξ et de η; mais on a de telles expressions pour le produit

$$\Phi(x+\xi, y+\eta)\,\Phi'(x-\xi, y-\eta),$$

où Φ et Φ' peuvent désigner soit la même fonction, soit des fonctions différentes; une fonction quelconque des sommes devant être combinée avec une fonction quelconque des différences, on a besoin de deux cent cinquante-six équations; toutes ces équations sont écrites, classées en seize systèmes de seize équations.

Dans la Section IV, on étend aux fonctions r^{uples} diverses propriétés précédemment établies pour les fonctions doubles, à savoir : 1° la périodicité, comme dans la Section I; 2° le théorème du produit, qui donne l'expression du produit de quatre fonctions au moyen de la somme de 4^r produits de quatre fonctions et d'où se déduisent divers relations; 3° le théorème analogue à celui de la Section II, exprimé par l'égalité symbolique

$$\Theta\left[\begin{pmatrix}\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\\ \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r\end{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_r\right] = e^{-\frac{2}{\pi^2}\sum_{s=1}^{s=r}\sum_{t=1}^{t=r} K_s K_t \log p_{s,t}\frac{d^2}{dx_s\,dx_t}} \prod_{t=1}^{t=r}\theta_{\mu_t,\lambda_t}(x_t),$$

4° les r équations différentielles de la forme

$$\frac{d^2\Phi}{dx_r^2} - 2x_r\left(\varkappa'^2 - \frac{E_r}{K_r}\right)\frac{d\Phi}{dx_r} + 2\varkappa_r\varkappa_r'^2\frac{d\Phi}{d\varkappa_r},$$

et les $\frac{r(r-1)}{2}$ équations de la forme

$$p_{s,t}\frac{d\Phi}{dp_{s,t}} + \frac{2K_sK_t}{\pi^2}\frac{d^2\Phi}{dx_s dx_t} = 0,$$

auxquelles satisfont les fonctions Φ.

J. T.

JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS, publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira, professor de Mathematica na Universidade de Coimbra, Socio correspondente da Academia real das Sciencias de Lisboa e da Sociedade de Scienciase physicas naturaes de Bordeaux.

Tome V; 1883-1884.

Martins da Silva (*J.-A.*). — Note sur l'indépendance des zéros dans la fonction jacobienne des intégrales abéliennes normales de première espèce. (3-8).

H.-B. — Note sur un problème de Mécanique rationnelle. (9-16).

Le problème dont il s'agit ici se trouve proposé à la page 158 du II° Volume des *Problèmes de Mécanique rationnelle*, du P. Jullien; il fut étudié et résolu par Daniel Bernoulli, Euler et Clairaut. Le mathématicien portugais H.-B. fait voir dans sa Note que la Mécanique moderne peut résoudre ce problème par une simple application de ses équations générales; il en donne deux solutions.

Rocha Peixoto (*A.-F.*), professeur à l'Université de Coïmbre. — Sur les trièdres homologues. (17-20).

Duarte Leite Pereira da Silva. — Sur quelques intégrales définies. (21-23).

Gomes Teixeira. — Bibliographie. (24-26).

Le savant directeur du journal donne une analyse des Ouvrages suivants :

Essais de Géométrie supérieure du troisième ordre, Bruxelles, 1882, par Constantin Le Paige, professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Liège.

Introduction à la théorie mathématique de l'électricité, Madrid, 1883, par D.-G. Vicuna, professeur de Physique mathématique à l'Université de Madrid.

Sur un groupe de théorèmes et formules de la Géométrie énumérative, par H.-G. Zeuthen, professeur de Mathématiques à l'Université de Copenhague.

La question du méridien universel. Lisbonne, 1883.

Le Paige (*Constantin*). — Homographies et involutions des ordres supérieurs. (27-49 et 77-119)

La théorie des homographies et involutions, si féconde en applications, est l'objet de cette importante étude écrite en français.

Marrecas Ferreira (*L.-F.*), professeur à l'École militaire de Lisbonne. — Sur les équations trinômes. (50-70).

Gomes Teixeira. — Bibliographie. (71-74).

Compte rendu du discours lu à l'Académie royale des Sciences de Madrid, en 1883, par D.-G. Vicuna, à l'occasion de sa réception à l'Académie, et du discours fait en réponse à celui du récipiendaire, par Echegaray. Dans son discours, l'éminent géomètre, poète, auteur dramatique, orateur et homme d'État, José Echegaray ramène tous les problèmes cosmiques à des problèmes de Mécanique rationnelle.

Opuscule sur les systèmes d'Hamilton et de Jacobi, par J.-A. Martins da Silva. Lisbonne, 1883.

Souvenirs de l'Université de Coïmbre, par D.-M. Benitez y Parodi. Madrid, 1883.

Ce petit Livre fait ressortir l'importance prédominante des Mathématiques pour les Sciences militaires dans le temps actuel, et rappelle les noms et les œuvres des mathématiciens qui ont illustré le Portugal pendant le XIXe siècle.

Études sur les méthodes d'enseignement dans les Mathématiques, par Jules Houël, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Paris, 1883.

Sur les surfaces du troisième ordre, par Constantin Le Paige. Stockholm, 1883.

Martins da Silva (*J.-A.*). — Sur une formule relative à la théorie des fonctions elliptiques. (Extrait d'une Lettre à Gomes Teixeira.) (75-76).

Gomes Teixeira. — Bibliographie. (120-124).

A.-F. da Costa Lima. — *Étude sur la théorie mathématique de l'élasticite.* Lisbonne, 1883.

F.-A. de Brito Limpo. — *Instructions sur les nivellements géométriques de précision.* Lisbonne, 1883.

G. Paxton Young, professeur à Toronto (Canada). — *Principes de la solution des équations de degrés supérieurs. — Résolution des équations solubles du cinquième degré.* Baltimore, 1883.

Aristide Marre. — *Huit lettres mathématiques inédites du P. Claude Jaquemet, de l'Oratoire, avec Notice sur les travaux des PP. Reyneau et Prestet, mathématiciens distingués du* XVIIe *siècle.*

Enrico Narducci. — *Sur un manuscrit du Vatican.*

Dans ce Mémoire adressé sous forme de Lettre à M. Aristide Marre, le savant conservateur de la Bibliothèque de l'Université de Rome nous fait connaître un manuscrit du Vatican, fort intéressant pour l'histoire des Mathématiques au moyen âge, intitulé : *Introductorius Liber qui et pulveris dicitur in Mathematicam disciplinam.*

J.-A. Serrasqueiro, professeur au lycée de Coïmbre. — *Traité élémentaire d'Arithmétique.* Coïmbre, 1882, 2e édition. — *Traité de Géométrie élémentaire.* Coïmbre, 1882, 2e édition. — *Traité d'Algèbre élémentaire.* Coïmbre, 1883, 2e édition. — *Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne.* Coïmbre, 1882, 5e édition.

Tous ces Traités de Mathématiques élémentaires sont classiques dans les lycées et collèges du Portugal.

José Lucas. — *Observations faites à l'Observatoire astronomique de l'Université de Coïmbre.* Coïmbre, 1882.

H. Barros. — *Esquisse de la théorie thermodynamique.* Lisbonne, 1883.

A. d'Arzilla Fonseca. — *Principes élémentaires du calcul des quaternions.* Coïmbre, 1884.

Cette dissertation inaugurale est le premier Mémoire qui ait été écrit par un Portugais sur le *Calcul des quaternions.*

J. Bruno de Cabedo. — *Intégration des équations canoniques du mouvement.* Coïmbre, 1884.

H. Teixeira Bastos. — *Unités électriques.* Coïmbre, 1884.

Guilherme Carlos Lopes Banhos, capitaine d'artillerie. — Détermination géométrique des moments d'inertie des solides de révolution. (125-142).

Schiappa Monteiro, professeur à l'École Polytechnique de Lisbonne. — Recherches relatives au cercle variable qui coupe deux cercles donnés sous des angles donnés. (143-184).

Ce Mémoire fait suite à celui qui se trouve inséré dans le tome II (1879), pages 50, 150 et 174, du *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas.*

Il n'est pas terminé dans le présent Tome V, et la suite paraîtra dans le Tome VI.

Gomes Teixeira. — Solution de la question proposée n° 23, c'est-à-dire sommation de la série

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{2^i x}{e^k x + 1},$$

dans laquelle $k = 2^i$. (185-186).

Gomes Teixeira. — Bibliographie. (187-191).

M. D'OCAGNE. — *Sur un algorithme algébrique* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. II) et *Théorie élémentaire des séries récurrentes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. III).

LUCIANO CORDEIRO. — *Comment naviguaient les Portugais au commencement du* XVIe *siècle* (*Bulletin de la Société de Géographie de Lisbonne*, vol. IV, 1883).

Dans cette étude curieuse, amenée par la découverte dans la Bibliothèque d'Evora d'un *Traité de la sphère du monde*, imprimé vers 1519, l'éminent secrétaire général de la *Société de Géographie de Lisbonne* nous fait connaître plusieurs documents importants pour l'histoire des sciences nautiques et démontre que les navigateurs portugais du commencement du XVIe siècle, avant les découvertes de Pedro Nunes, n'eurent pas besoin de la Science étrangère pour se diriger sur les mers.

L. WOODHOUSE, professeur à l'École Polytechnique de Porto. — *De l'intégration des équations différentielles de la dynamique.* Porto, 1883.

ROBERTO MENDES. — *Résistance des arcs métalliques.*

Cette étude est une dissertation présentée au concours pour l'obtention d'une chaire à l'École Polytechnique de Porto.

J.-M. RODRIGUES. — *Mémoire sur la théorie de la balistique.* (Extrait des *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Lisbonne*, 1884.)

J.-A. ALBUQUERQUE. — *Premiers principes de la théorie des déterminants.* Paris, 1884.

M.-A. GONÇALVES. — *Équilibre électrique dans les conducteurs.* Porto, 1884.

Cette dissertation a été écrite pour le concours à une chaire vacante à l'École Polytechnique de Porto.

L.-F. MARRECAS FERREIRA, ingénieur. — *Note sur une question d'Hydraulique.*

Cette Note a été publiée dans le tome XV, année 1884, de la *Revue des Travaux publics.*

A. MARRE.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI. In-4°, 3e Série (1).

Transunti, t. VIII; 1883-1884.

Violi (*A.*). — Les vitesses moléculaires des aériformes. Note I (22-25), Note II. (62-64).

Tacchini. — Sur la découverte d'une nouvelle petite planète par l'astronome Palisa. (43).

---

(1) Voir *Bulletin*, VIII_2, p. 41.

Tacchini. — Sur la comète de Pons. (43).

Tacchini. — Distribution des taches, éruptions, facules et protubérances à la surface du Soleil, d'après les observations faites à l'observatoire royal du Collège romain en 1882. (66-68).

Millosevich (*E.*). — Quelques observations du huitième satellite de Saturne. (82).

Tacchini. — Sur les observations des taches et facules solaires faites à l'observatoire royal du Collège romain en 1883. (99-100).

Millosevich. — Sur l'orbite parabolique de la comète 1879 (*e*) Hartwig. (158-159).

Brioschi. — Sur une classe de courbes du quatrième ordre. (164-168).

Une forme ternaire f de l'ordre n a un covariant S de l'ordre $4(n-3)$. L'auteur trouve une forme du quatrième ordre qui est reproduite, à un facteur constant près, par son covariant S. Cette forme est celle déjà étudiée par Gordan

$$f = ax_2^3 x_3 + bx_3^3 x_1 + cx_1^3 x_2.$$

Ensuite il considère la courbe représentée par l'équation $f = 0$, et ses vingt-huit tangentes doubles, et il arrive à des transformations remarquables de l'équation $f = 0$, dont l'une a été indiquée par M. Klein [*Ueber die Transf. siebenter Ordnung der elliptischen Functionen* (*Math. Ann.*, t. XIV)].

Volterra (*V.*). — Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. Note I (214-218), Note II (244-246).

L'auteur énonce quelques résultats qu'il a obtenus en étudiant la déformation et l'équilibre de ces surfaces. Il prend pour point de départ des formules de Jellett, et il prend en considération non seulement la composante du déplacement des points de la surface, mais aussi la composante de la rotation de ses éléments. Ces déplacements et rotations sont conjugués et liés entre eux par les relations

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \varpi}{\partial q}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \varpi}{\partial p}.$$

Tous les problèmes des déformations d'une surface dépendent de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial\left[(rt - s^2)\frac{\partial w}{\partial \varpi}\right]}{\partial \varpi} = 0,$$

que l'on peut intégrer pour plusieurs classes de surfaces. L'auteur établit les

éléments caractéristiques d'une déformation infiniment petite d'une surface flexible et inextensible, et fait voir qu'on peut faire dépendre les deux problèmes de l'équilibre et de la déformation de l'intégration d'une même équation différentielle.

Tacchini. — Sur les observations des taches et facules solaires faites à l'observatoire royal du Collège romain, dans le premier trimestre de 1884. (218).

Frattini (*G.*). — Les groupes à k dimensions. (260-264).

Construction générale des groupes transitifs à k dimensions, isomorphes à un groupe donné d'ordre μ.

Millosevich (*E.*). — Observations de la nouvelle planète entre Mars et Jupiter (236) faites à l'observatoire royal du Collège romain. (264).

Giacomelli (*F.*). — Observations de la comète Pons-Brooks faites à l'observatoire royal du Capitole. (265-267).

Volterra (*V.*). — Sur un problème d'électrostatique. (315-318).

On peut déterminer une fonction $f(z, \alpha)$ qui satisfasse à la condition

$$\varphi(x) = \int_0^z f(z, \alpha) F(x, \alpha)\, d\alpha, \qquad (0 < x < z < a).$$

$F(x, \alpha)$ étant une fonction connue et symétrique de x et α, et $\varphi(x)$ une fonction connue quelconque. Il suffit de connaître une fonction $\lambda(z, \alpha)$ qui satisfasse à la condition précédente lorsqu'on prend pour $\varphi(x)$ une fonction spéciale $\nu(x)$, et que l'on puisse poser

$$f(z, \alpha) = \int_\alpha^z \mathfrak{F}(z')\lambda(z'\alpha)\, dz' + k\lambda(z, \alpha).$$

Alors on a

$$f(z, \alpha) = -\int^z \frac{d}{dz'} \frac{\mu'(z')}{\theta'(z')} \lambda(z', \alpha)\, dz' + \left[\frac{\mu'(z')}{\theta'(z')}\right]_{z'=z} \lambda(z, \alpha).$$

Après avoir donné les formules précédentes, l'auteur en fait l'application au problème de l'équilibre de l'électricité sur les calottes d'une surface conductrice de révolution soumises à l'induction de non-conducteurs électrisés et distribués symétriquement par rapport à l'axe de révolution.

MEMORIE DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA. In-4°, 3e série.

Tome VII; 1876 (1).

Beltrami (*E.*). — Considérations analytiques sur une proposition de Steiner. (241-262).

Il est question du théorème relatif aux perpendiculaires tirées aux côtés d'un triangle par un point de la circonférence circonscrite, et de l'enveloppe de la droite qui passe par les pieds de ces perpendiculaires.

L'auteur traite projectivement cette question en substituant aux droites perpendiculaires aux côtés du triangle (qu'il prend pour fondamental) des droites conjuguées à ces côtés par rapport à l'absolu. Il étend ses recherches à la géométrie non euclidienne de l'espace de $n-1$ dimensions, et il arrive à un *lieu steinérien* de l'ordre n, et à une *enveloppe steinérienne* de la classe n, qui sont liés entre eux par réciprocité polaire par rapport à l'absolu. A un point donné du lieu correspondent ainsi deux plans de l'enveloppe, le plan steinérien et le plan polaire, et à un plan correspondent deux points. La relation qui existe entre les deux points qui correspondent à un même plan est celle qui vient de la transformation quadratique.

Dans le cas de la Géométrie ordinaire, le lieu steinérien est de l'ordre $n-1$, et l'enveloppe qui est toujours de la classe n touche $n-1$ fois le plan de l'infini.

Après avoir démontré quelques autres propriétés de ces figures, l'auteur établit les équations du lieu et de l'enveloppe dans le plan, et, en particulier, lorsque l'absolu se décompose en deux points.

Boschi (*P.*). — Sur les fonctions symétriques des racines d'une équation. (569-588).

Démonstration de deux formules de Waring. Ensuite l'auteur, en utilisant une propriété des équations à deux termes, donne un moyen pour déterminer les coefficients numériques dans l'expression d'une fonction symétrique des racines, et il en fait l'application à un cas particulier. Il donne enfin quelques autres formules relatives aux fonctions symétriques.

Fais (*A.*). — Sur quelques propriétés des droites conjuguées et des plans focaux relatifs aux forces appliquées à un système de forme invariable. (605-611).

Les conjuguées des droites qui touchent une hélice qui a pour axe l'axe central touchent une autre hélice qui a ce même axe. Ces hélices sont appelées par l'auteur *conjuguées*, et en particulier *orthogonales* lorsque leurs tangentes correspondantes font entre elles un angle droit. Chaque point d'une de ces

(1) Voir *Bulletin*, I, p. 82.

hélices a pour plan focal un plan osculateur de l'hélice conjuguée. L'auteur montre comment on peut utiliser les hélices orthogonales pour la détermination des foyers et des plans focaux, et pour se rendre compte d'une observation de Chasles relative aux caractéristiques.

Tome VIII; 1877.

Righi (*A.*). — Recherches expérimentales sur l'interférence de la lumière. (71-104).

Saporetti (*A.*). — Méthode pour calculer les éclipses de Lune et de Soleil, seulement à l'aide d'éphémérides célestes quelconques. (129-174).

Chelini (*D.*, *P. S.*). — Sur quelques questions dynamiques. (273-306).

Mémoire faisant suite à l'autre du même auteur sur les principes fondamentaux de la Dynamique.

L'auteur donne le nom de *pivot* d'un axe permanent à la projection du centre de percussion sur cet axe. Il traite quelques questions relatives aux axes permanents, aux pivots, à la distribution symétrique des axes principaux d'inertie autour du centre de gravité, aux pivots des axes permanents passant par un point donné. Il examine ce que devient le cône des axes permanents lorsque le sommet est situé dans un des plans principaux d'inertie; la rotation instantanée qui se produit dans un corps par une percussion perpendiculaire à l'un des plans principaux d'inertie; la polarité réciproque entre les centres de percussion et les axes spontanés; les points du plan $z = 0$ capables d'une percussion donnée.

Enfin il résout un problème général sur la percussion et la rotation instantanée d'un corps solide dont un point est arrêté par un obstacle.

Ruffini (*F.-P.*). — Sur la résolution des deux équations de condition des transformations crémoniennes des figures planes. (457-525).

L'auteur établit des formules par lesquelles on peut déterminer les solutions de ces équations pour chaque valeur donnée de n, et des solutions générales des mêmes équations, en choisissant celles qui conviennent au problème géométrique.

Fais (*A.*). — Sur les courbes gauches ayant les mêmes normales principales. (609-624).

Relation entre les rayons de courbure et de torsion de deux courbes ayant les normales principales communes. L'auteur suit une méthode analogue à celle suivie par M. Bertrand (*Journal de Liouville*, t. XV), mais les équations qu'il

obtient ont une forme plus simple. Il prend pour point de départ quatre formules très simples établies par la considération d'un triangle infinitésimal.

Righi (*A.*). — Sur la vitesse de la lumière dans les corps transparents magnétisés. (625-645).

Tome IX ; 1878.

D'Arcais (*F.*). — Sur un théorème dans la théorie des formes binaires. (173-180).

Nouvelle démonstration du théorème de Gordan sur l'expression d'une forme binaire à deux séries de variables par une somme dont les termes sont des polaires d'une forme à une seule série de variables, multipliées par des puissances du déterminant (xy).

Ruffini (*F.-P.*). — Sur un problème d'analyse indéterminée qui se présente dans la théorie géométrique des transformations des figures planes. (199-215).

Les transformations planes doubles étudiées par M. R. de Paolis (*Memorie della R. Accademia dei Lincei,* 1877-1878) dépendent de deux équations ayant la même forme que celles dont dépendent les transformations crémoniennes et que l'auteur a déjà étudiées dans un autre Mémoire (*Memorie della Accademia di Bologna,* t. VIII). Il établit maintenant des formules donnant les solutions des équations

$$\Sigma i^2 = u, \quad \Sigma i = v,$$

et qu'on peut appliquer aux transformations crémoniennes

$$[u = n^2 - 1, \quad v = 3(n-1)],$$

aussi bien qu'aux transformations de de Paolis

$$[u = n^2 - 2, \quad v = 3n + 2p - 4].$$

Ces formules, comme l'auteur même le fait remarquer, peuvent être appliquées aux transformations crémoniennes en préférence de celles qu'il a établies dans le Mémoire cité plus haut.

Beltrami (*E.*). — Sur quelques points de la théorie du potentiel. (451-475).

Discussion des deux équations de Gauss

$$(1) \qquad \int \frac{\partial F}{\partial x} dS + \int F \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma = 0,$$

$$(2) \qquad \int \frac{\partial F}{\partial r} \frac{dS}{r^2} + \int F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + (\sigma)_p F_p =$$

$(\sigma)_p$ étant l'angle visuel de la surface σ par rapport au point p, d'où sont menés les rayons vecteurs. Lorsque la fonction F est monodrome, finie et continue en S à l'exception d'un point isolé, mais que le produit $F r^{1-2n}$, n étant fini et > 0, l'est aussi en ce point, la formule (1) est encore vraie. L'auteur fait voir que la formule (2) est la plus essentielle dans la théorie du potentiel, et il en déduit les formules fondamentales du potentiel d'un espace et d'une surface. Il en déduit aussi un théorème relatif aux solénoïdes électrodynamiques, qu'il avait déjà traité dans un autre travail [*Nota sulla teoria dei solenoidi elettrodinamici* (*Nuovo Cimento*, 1872)].

Canevazzi (*S.*). — Sur l'équilibre moléculaire. (493-533).

Fais (*A.*). — Sur l'élimination des fonctions arbitraires. (649-656).

Il s'agit d'éliminer des équations

$$\varphi[x, y, z, \alpha, f_1(\alpha), f_2(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)] = 0,$$
$$\psi[x, y, z, \alpha, f_1(\alpha), f_2(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)] = 0$$

le paramètre α et les n fonctions arbitraires $f_i(\alpha)$.

L'auteur obtient successivement n équations

$$\lambda_i = P\frac{\partial\lambda_{i-1}}{\partial x} + Q\frac{\partial\lambda_{i-1}}{\partial y} + R\frac{\partial\lambda_{i-1}}{\partial z} = 0,$$

P, Q, R étant les trois déterminants

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{matrix} \right\|.$$

La première de ces équations $\lambda_1 = 0$ est obtenue en éliminant dx, dy, dz entre les trois équations

$$\sum \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx = 0, \quad \sum \frac{\partial\psi}{\partial x}dx = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy - dz = 0.$$

Le procédé par lequel on déduit l'équation $\lambda_i = 0$ de la précédente est maintenant évident. Au moyen de ces n équations jointes aux deux données, on peut éliminer le paramètre et les fonctions arbitraires.

Fais (*A.*). — Sur quelques propriétés des courbes gauches ayant les mêmes normales principales. (657-674).

Mémoire faisant suite à l'autre de même titre (t. VIII, 1877). L'auteur démontre par des considérations de Géométrie infinitésimale deux théorèmes démontrés par une autre voie par M. Mannheim (*Comptes rendus*, séance du 20 mai 1878). Ensuite il étudie le tétraèdre qui a pour sommets : un point de la courbe, le centre de courbure, le centre de la sphère osculatrice, et le point correspondant de l'arête de rebroussement de la développable recti-

ficatrice, et démontre que, si la courbe est à torsion constante, les volumes de ces tétraèdres sont entre eux comme les carrés des rayons de courbure. Pour les courbes qui ont les mêmes normales principales, il démontre quelques propriétés relatives à ces tétraèdres, aux rayons de courbure en points correspondants, à la ligne de gorge de la surface gauche engendrée par les normales principales communes, et à d'autres tétraèdres liés aux deux courbes.

ATTI DEL R. ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI. In-8°, 5e série.

Tome VI; novembre 1879-octobre 1880.

Bellavitis. — Sur un jeu américain (le taquin). (900-904).

Abetti (*A.*). — Observations et calculs sur la comète Swift. (913-918).

Abetti (*A.*). — Sur la détermination du temps par l'observation des passages des étoiles au vertical de la polaire. (931-948).

Tome VII; novembre 1880-octobre 1881.

Favaro (*A.*). — Sur la bibliothèque mathématique italienne du professeur P. Riccardi. (47-64).

Lorenzoni (*G.*). — L'équatorial Dembowski à l'observatoire royal de Padoue. (779-780).

Reggio (*Z.*). — Quadrature de certaines aires circulaires. (1097-1116).

Reggio (*Z.*). — Sur la détermination du pôle d'une droite donnée. (1117-1120).

Bordiga (*G.-A.*). — Quelques théorèmes sur les surfaces du deuxième ordre analogues au théorème de Pascal pour les coniques. (1253-1259).

Tome VIII; novembre 1881-octobre 1882.

Minich (*S.-R.*). — Sur les équations du cinquième degré. (307-320 et 893-908).

L'auteur propose pour l'équation du cinquième degré une résolvante plus simple que celle qui est indiquée ordinairement dans la théorie générale, et il montre les relations qui existent entre ses résultats et ceux de Malfatti (*Atti di Siena*, t. IV). Il annonce aussi la décomposition de l'équation du quatrième degré qui donne les quatre fonctions cycliques en deux facteurs du deuxième degré.

Reggio (*Z.*). — Quelques recherches sur les coniques. (649-672).

Soit une conique circonscrite au triangle ABC. Les droites que l'on appelle, suivant une dénomination connue, *harmonicales* des points de cette conique par rapport au triangle ABC, passent toutes par un même point O. Ce point est appelé par l'auteur *centre descriptif* de la conique. Il définit corrélativement la *droite descriptive*, et il montre l'emploi de ces éléments en plusieurs théorèmes relatifs aux coniques et aux systèmes de coniques.

D'Arcais (*F.*). — Sur quelques théorèmes relatifs aux courbes planes du troisième ordre. (673-682).

Les démonstrations sont faites par l'emploi des fonctions elliptiques, en exprimant les coordonnées d'un point de la courbe par des fonctions elliptiques d'un paramètre, le module k^2 étant le rapport anharmonique constant de la courbe.

Lorenzoni (*G.*). — Sur les observations de la comète *b* (III) 1881 faites à l'observatoire royal de Padoue. (683-713).

Veronese (*G.*). — Sur la Géométrie descriptive à quatre dimensions. (987-1024).

Généralisation de la projection centrale, et applications à la solution de problèmes projectifs et métriques. Projection orthogonale et axonométrique de l'espace de quatre dimensions.

Ricci (*G.*). — Sur la fonction potentielle des conducteurs de courants galvaniques constants. (1025-1048).

L'auteur, après avoir déterminé la fonction potentielle d'une distribution magnétique sur un conducteur à trois dimensions, donne un nombre infini de distributions magnétiques, qui sont équivalentes à un système galvanique donné. Pour une distribution magnétique $(M_1 M_2 M_3)$ équivalente à un système galvanique $(i_1 i_2 i_3)$ on a

$$M_\varepsilon = \nu \frac{\partial \mu}{\partial x_\varepsilon},$$

$\mu = \mu_0$, $\mu = \mu_1$ étant les surfaces qui renferment l'espace considéré, et ν une intégrale de l'équation

$$i_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0.$$

qui satisfait aux autres équations

$$i_{s_1} = \frac{\partial \nu}{\partial x_{s_2}} \frac{\partial \mu}{\partial x_{s_3}} - \frac{\partial \nu}{\partial x_{s_3}} \frac{\partial \mu}{\partial x_{s_2}}.$$

Il détermine ensuite la fonction potentielle d'un tube de flux électrodynamique, et il donne aussi sous certaines conditions la distribution galvanique équivalente à une distribution magnétique donnée.

6e série. — Tome I; novembre 1882-octobre 1883.

Garbieri (*G.*). — Sur quelques classes de fonctions symétriques. (33-74).

Déterminants de fonctions rationnelles. L'auteur étend ses recherches aux déterminants de fonctions birationnelles.

Favaro (*A.*). — Préliminaires à une restitution du livre d'Euclide sur la division des figures planes. (393-396).

Favaro (*A.*). — Sur la correspondance inédite entre Lagrange et d'Alembert. (533-544).

Grandi (*A.*). — Démonstration d'un théorème de la théorie des nombres. (809-812).

Padova (*E.*). — Un théorème de Mécanique. (913-917).

Appelons *homologues* deux systèmes de points, lorsque leurs positions sont déterminées par un même nombre de coordonnées indépendantes, et que leurs forces vives ont la même expression par ces coordonnées. On aura le théorème suivant, qui est une généralisation d'un théorème connu :

« Soit S un système de points partant d'une configuration C_0 et soumis à l'action simultanée de l systèmes de forces, qui ne dépendent que des coordonnées. Supposons que ces systèmes de forces fassent parcourir une même orbite aux systèmes $S_1, S_2, \ldots, S_l$ homologues à S, et qui partent de la même configuration initiale C_0. Si la force vive initiale de S est égale à la somme des forces vives initiales de $S_1, S_2, \ldots, S_l$, le sytème S parcourt aussi cette même orbite.

Camus (*G.*). — Recherche géométrique de la longueur d'un arc d'ellipse. (997-1003).

Padova (*E.*). — Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Dynamique. (1005-1020).

L'auteur donne une méthode simple pour déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation donnée puisse être une intégrale commune

à plusieurs problèmes de Dynamique. Ce travail constitue une simplification et une généralisation des recherches de Bertrand [*Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique* (*Journal de Liouville*, 1re série, t. XVII)], de Korkine [*Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel* (*Mathem. Ann.*, Bd. II)] et de Pennacchietti [*Sugli integrali comuni a piu problemi di Dinamica* (*Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa*, t. IV, 1877)]. L'auteur a porté plus particulièrement son attention sur les intégrales qui renferment les dérivées des coordonnées au premier ou au second degré.

Garbieri (*G.*). — Sur les équations aux dérivées partielles. (1173-1225).

On peut par différents procédés analytiques effectuer l'élimination de m fonctions arbitraires et arriver à une équation unique aux dérivées partielles d'ordre m. L'auteur examine aussi, en se bornant à deux variables indépendantes, un cas particulier remarquable, dans lequel on arrive à une équation unique aux dérivées partielles d'ordre égal au nombre des fonctions qui restent arbitraires, quoique les paramètres à éliminer soient liés entre eux par des équations différentielles. Enfin il fait des applications aux surfaces réglées, et aux surfaces engendrées par un cercle qui se meut suivant une loi quelconque.

Padova (*E.*). — Sur les axes statiques dans les systèmes de forme invariable. (1243-1250).

On sait que, si l'on fait tourner un corps roide autour d'un point fixe O, en laissant inaltérées en direction et intensité les forces appliquées à ses points, il y a quatre positions pour lesquelles ces forces ou sont en équilibre ou admettent une résultante unique passant par O (Darboux, *Mémoire sur l'équilibre astatique*). Les axes statiques sont les droites autour desquelles il faut faire tourner le corps pour le conduire respectivement en ces quatre positions, et ils ont été considérés pour la première fois par M. Siacci.

M. Padova fait connaître la distribution de ces droites dans l'espace, et il en déduit leurs propriétés principales, démontrées par M. Siacci.

Tome II; novembre 1883-octobre 1884.

Veronese (*G.*). — Démonstration de la formule

$$\begin{vmatrix} p \\ r-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q-1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ r \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} q-1 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ r+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q-1 \\ 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ r+2 \end{vmatrix} + \ldots = \begin{vmatrix} p+q-1 \\ q+r-2 \end{vmatrix},$$

par la Géométrie de n dimensions. (137-143).

Cette formule contient, comme des cas particuliers, deux formules données par M. Kantor [*Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume* (*Litr. b. der K. Ak. der Wissensch.* II Abth. October, Wien, 1879)].

Lorenzoni (*G.*). — Sur les déterminations du temps faites à Arcetri en automne 1882, par les observations des passages des étoiles au vertical de la polaire. (343-396).

Abetti (*A.*). — Observations astronomiques faites à l'observatoire de Padoue avec l'équatorial Dembowski. (837-858).

Favaro (*A.*). — Sur la *Bibliotheca mathematica* de Gustave Eneström (923-925).

Battelli (*A.*). — Sur la propagation de la lumière dans un système catadioptrique. (1081-1095).

Abetti (*A.*). — Observations de petites planètes faites à l'observatoire de Padoue avec l'équatorial Dembowski. (1137-1147).

Garbieri (*G.*). — Sur les surfaces enveloppes. (1201-1219).

Soit f une fonction des $n+2$ variables $z, x_0, x_1, \ldots, x_n$, et des $n+m$ paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$, z étant une fonction des x, et les b étant des fonctions des a (arguments). L'auteur démontre qu'on peut éliminer les $n+m$ paramètres, et arriver à une équation unique aux dérivées partielles de z et dont l'ordre est égal au nombre m des fonctions arbitraires. Il fait l'application de ce théorème à la recherche de l'équation différentielle des enveloppes pour un nombre quelconque de variables et, après avoir exposé les propriétés principales de ces surfaces, il considère en particulier les développables et les surfaces enveloppées par des sphères.

Turazza (*D.*). — Sur deux récentes recherches hydrométriques. (1609-1625).

Veronese (*G.*). — Sur une construction de la surface du quatrième ordre douée d'une conique double. (1841-1842).

Soient V, V′, S trois points situés en ligne droite, et M, M′ deux surfaces du deuxième ordre. Une droite arbitraire menée par S rencontre M, M′ respectivement en deux couples de points AA′, $A_1A'_1$. En joignant ces couples respectivement avec V, V′, on obtient quatre droites qui se rencontrent, outre qu'en V, V′, en quatre autres points X appartenant à une surface du quatrième ordre douée d'une conique double, qu'on peut conséquemment construire par ce moyen. La surface engendrée de cette manière est la projection centrale sur l'espace ordinaire de l'intersection de deux cônes à trois dimensions situés dans l'espace de quatre dimensions. L'auteur donne aussi la construction de la conique double.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI. In-4°, 3e série (1).

Memorie. t. II; 1877-1878.

De Paolis. — La transformation plane double du second ordre et son application à la Géométrie non euclidienne. (31-50).

Dans le cas particulier de la transformation plane double traité par M. de Paolis, aux droites du plan simple E′ correspondent les coniques $\mathfrak{S}$ qui passent par un point fixe du plan double E, et dont les courbes de passage ont un contact double avec une conique Ω; aux droites du plan double correspond en E′ un réseau de coniques qui passent par deux points fixes. Si l'on fait coïncider les deux points avec les points circulaires de E′, tous les cercles euclidiens de E′ auront pour transformées les coniques de E qui ont un contact double avec Ω, c'est-à-dire les cercles non euclidiens de E′, si l'on prend Ω comme conique absolue pour base de la détermination métrique projective dans le plan simple E′. Inversement, à tout cercle non euclidien du plan E′ correspondent deux cercles euclidiens conjugués dans le plan E. De cette manière on peut traduire immédiatement en Géométrie non euclidienne toute propriété descriptive ou métrique de la Géométrie ordinaire.

Lucas. — Sur un principe fondamental de Géométrie et de Trigonométrie. (449-456).

Si l'on appelle *puissance mutuelle* de deux cercles de rayons r_i, r_j l'expression

$$a_{ij} = \frac{r_i^2 + r_j^2 - d_{ij}^2}{2 r_i r_j},$$

où d_{ij} désigne la distance des centres, on aura

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55} = 0,$$

c'est-à-dire que le déterminant des puissances mutuelles de cinq cercles du plan (ou de six sphères de l'espace) est identiquement nul. Ce théorème renferme la plupart des propriétés métriques connues. Il subsiste lorsqu'on remplace les cercles par des points ou par des droites, situés à distance finie ou infinie. Il conduit à l'extension suivante du principe de mutualité :

Toute propriété descriptive ou métrique exprimant une relation entre des points, des droites et des plans, s'applique au système plus général dans lequel on remplace les points, les droites et les plans par des cercles et des sphères.

Bianchi. — Sur l'applicabilité des surfaces des espaces à courbure constante. (479-484).

---

(1) Voir *Bulletin*, II_2, p. 77.

Deux surfaces d'un même espace ou de deux espaces différents à courbure constante sont dites *applicables,* lorsque les expressions de leurs éléments linéaires respectifs, calculées d'après la détermination métrique correspondante, sont égales ou transformables l'une dans l'autre.

M. Bianchi étudie les *surfaces de révolution,* c'est-à-dire celles dont les sections par un plan perpendiculaire à une droite donnée sont des cercles dont les centres sont situés sur cette droite. Il démontre le théorème suivant :

Les surfaces de révolution des espaces à courbure constante sont applicables sur les surfaces de révolution de l'espace ordinaire; les méridiens correspondent aux méridiens et les parallèles aux parallèles.

On en conclut que les surfaces de l'espace non euclidien, qui ne changent pas dans un mouvement de cet espace, sont applicables sur un plan de l'espace ordinaire.

Ascoli. — Nouvelles recherches sur la série de Fourier. (584-651).

Ce travail est divisé en quatre Parties :

Dans la première, l'auteur établit les principes d'une théorie des fonctions d'une variable réelle; il étudie les séries illimitées de points appartenant à un segment, et leurs séries dérivées; il généralise la notion de fonction; il démontre divers théorèmes sur les fonctions finies et sur celles qui ne le sont pas; il envisage les limites inférieure et supérieure des valeurs d'une fonction finie dans un intervalle donné. Il considère ensuite les fonctions douées d'un nombre fini de maxima et de minima dans un certain intervalle, les oscillations qu'éprouve une fonction pour une valeur particulière de la variable, les fonctions qui possèdent un nombre illimité de maxima et de minima; et il applique les résultats obtenus à une classe particulière de fonctions. Enfin, M. Ascoli aborde l'étude des fonctions continues; il traite des données suffisantes pour définir une pareille fonction, et des diverses manières dont se comporte une fonction, continue dans un intervalle donné, lorsque la variable tend vers l'une ou l'autre de ses valeurs extrêmes.

Dans la deuxième Partie de son Mémoire, l'auteur considère les infinis isolés, les infinis isolés et intégrables, les infinis isolés et non intégrables.

La troisième Partie est consacrée aux séries trigonométriques. M. Ascoli envisage la série de Fourier relative à une fonction douée d'un nombre limité d'infinis non intégrables, dans l'intervalle de zéro à 2π, et dont l'intégrale seconde est convergente; il étudie une classe de fonctions qui ne sont pas intégrables partout, et qui peuvent être développées en séries de Fourier; il démontre un théorème fondamental sur les séries trigonométriques, dont il déduit diverses conséquences.

Dans la quatrième Partie, l'auteur recherche dans quels cas une classe de fonctions, admettant la période 2π et intégrables, sauf en un nombre limité de points du segment $0 \ldots 2\pi$, est exprimable par une série trigonométrique : cette recherche le conduit à divers théorèmes fondamentaux sur la série de Fourier.

Caporali. — Sur les complexes du second degré; sur les points et les plans singuliers de la surface de Kummer. (749-769).

I. *Sur les complexes du second degré.*

L'objet de ce travail est l'étude du mode de correspondance le plus simple qu'on puisse établir entre les droites d'un complexe du second degré et les points de l'espace ordinaire. Les formules de cette représentation, dues à M. Klein, ont été publiées par M. Noether; mais depuis, personne, à la connaissance de l'auteur, ne s'est occupé de cette question, sauf dans le cas particulier du complexe tétraédral. M. Caporali déduit la représentation dont il s'agit de celle des droites d'une congruence du second degré au moyen des points d'un plan; il recherche les modifications qui surviennent, dans le cas où le complexe possède des droites doubles en nombre limité ou illimité. Cette représentation lui permet de découvrir des propriétés nouvelles du complexe du second degré.

II. *Sur les points et les plans singuliers de la surface de Kummer.*

Les points (et les plans) singuliers d'une surface de Kummer, pris trois à trois, déterminent, outre les plans (et les points) singuliers de cette surface, un autre groupe de plans (et de points), qui constituent quinze nouvelles figures analogues à la figure fondamentale. L'étude de ce système met en lumière l'existence de nombreux éléments qui forment une figure assez compliquée. En coupant cette figure par un des plans singuliers de la surface de Kummer, on obtient comme section le système complet de l'hexagone de Pascal. Une partie du Mémoire est consacrée aux relations de la figure en question avec six complexes en involution déterminés par la surface de Kummer.

Volpicelli. — Corrections aux formules de la théorie du condensateur de Volta. (811-850).

De Paolis. — La transformation plane double du troisième ordre et du premier genre; ses applications aux courbes du quatrième ordre. (851-878).

L'auteur étudie un cas particulier de la transformation plane double, dont il a exposé la théorie générale dans un Mémoire précédent. Il envisage la dépendance entre les points de deux plans, telle que si à un point du premier plan (*plan simple*) correspond un point du second, et à un point du second plan (*plan double*) deux points du premier, au réseau des cubiques qui, dans le plan simple, ont sept points fondamentaux communs, correspondent les droites du plan double : dès lors aux droites du plan simple correspondent des cubiques dans le plan double; et à une droite du plan double correspondra dans le plan simple, outre la cubique qui passe par les sept points fondamentaux, une courbe conjointe du huitième ordre, qui possède un point triple en chacun des points fondamentaux.

M. de Paolis trouve la formule de transformation qui permet de passer d'un point du plan simple à un point correspondant du plan double, la formule inverse qui permet de passer d'un point du plan double aux deux points conjoints correspondants du plan simple, et la formule qui permet de passer, dans le plan simple, de l'un des points conjoints à l'autre. Il trouve ensuite les équations de la courbe limite dans le plan double, et de la courbe double dans le plan simple : la première est une courbe du quatrième ordre, la seconde du sixième.

L'auteur étudie la correspondance entre les points et les droites des deux plans, et la construction géométrique de la transformation double; puis il applique les formules obtenues à l'étude des tangentes doubles d'une courbe générale du quatrième ordre, pour laquelle on peut prendre la courbe limite qui s'est présentée dans la transformation. La forme sous laquelle il obtient l'équation de cette courbe lui permet de donner séparément les vingt-huit équations des tangentes doubles; ces tangentes sont les droites qui dans le plan double correspondent aux sept points fondamentaux du plan simple, et aux vingt et une droites qui leur sont conjointes deux à deux. En considérant les systèmes de coniques quadruplement tangentes à une courbe générale du quatrième ordre et deux systèmes différents de cubiques rationnelles qui touchent cette courbe en six points, l'auteur parvient à démontrer très simplement la propriété des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre, bien connue depuis les travaux classiques d'Aronhold, de Steiner, Hesse, Geiser, Cayley et Salmon.

Tome III, 1878-1879.

Battaglini. — Sur les complexes du second degré. (35-44).

Chizzoni. — Sur les surfaces et les lignes, lieux ou enveloppes des droites qui joignent les points correspondants de deux courbes homographiques planes. (69-116).

L'auteur considère deux plans homographiques π, π', et démontre que les droites qui joignent les points homologues des deux plans constituent le système des droites par lesquelles passent deux plans tangents d'une développable du quatrième ordre. Cette développable Σ est la *surface fondamentale.* Dans les deux plans, l'auteur imagine deux courbes correspondantes quelconques l, l' (d'ordre μ) et fait une étude complète de la surface Φ (d'ordre 2μ), lieu des droites qui joignent les points homologues des courbes l, l'.

Cette étude le conduit à une représentation élégante de l'espace sur un plan π. Dans ce mode de représentation, l'image d'un point quelconque de l'espace est constituée par les sommets d'un triangle circonscrit à une conique fixe C (conique fondamentale); par suite aux droites de l'espace correspondent les coniques circonscrites aux triangles circonscrits à la conique C.

L'auteur applique cette transformation à la représentation d'un plan sur le plan fondamental π. Il en déduit divers théorèmes, entre autres celui-ci :

Dans une courbe plane d'ordre μ on peut inscrire $\frac{1}{3}\mu(\mu-1)(\mu-2)$ triangles et $\frac{1}{4}\mu(\mu-1)^2(\mu-2)$ quadrilatères circonscrits à une conique donnée arbitrairement dans le plan de la courbe.

En terminant, M. Chizzoni suppose que les deux plans homographiques π, π' coïncident, ce qui l'amène à étudier les courbes enveloppes des droites qui joignent les points correspondants de deux courbes homographiques, situées dans le même plan.

Casorati. — Note sur la théorie des solutions singulières des équations différentielles algébriques du premier ordre et du second degré. (271-276).

Démonstration de divers théorèmes énoncés dans une Communication faite à l'*Acc. dei Linc.* en 1876.

De Saint-Robert. — Du mouvement d'un pendule simple suspendu dans une voiture de chemin de fer. (277-291).

Contrairement à ce que croyait Foucault, le plan d'oscillation ne reste pas invariable.

Tome IV; 1878-1879.

Ferraris. — Théorèmes sur la distribution des courants électriques constants. (3-18).

Dans sa *Théorie mécanique de la chaleur*, M. Briot a remarqué que, dans un fil conducteur parcouru par un courant constant, la loi de Ohm est une conséquence de celle de Joule. M. Ferraris étend ce théorème aux conducteurs de forme quelconque. Il montre que les lois de Kirchhoff relatives aux courants linéaires peuvent se déduire du théorème suivant, que Riemann a conclu de la loi de Ohm :

Sous l'action de forces électromotrices constantes, les courants se distribuent de manière que le travail de ces forces pendant un temps donné soit minimum.

Ascoli. — Sur la possibilité de représenter une fonction de deux variables par une série trigonométrique à double entrée. (253-300).

L'auteur entreprend pour les fonctions de deux variables des recherches analogues à celles que Riemann a consacrées aux fonctions d'une seule variable dans son Mémoire *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.*

Tome V; 1879-1880.

Bellavitis. — Sur la Statique. (29-42).

L'auteur fait ressortir la complication des constructions de la Statique graphique pour déterminer la résultante d'un système de forces dans l'espace. Il expose une méthode analytique, très expéditive, dans laquelle il fait usage des coordonnées pluckériennes et des principes des équipollences. Il applique cette méthode à la recherche des tensions ou pressions qui s'exercent le long des six arêtes d'un tétraèdre, chargé à son sommet d'un poids donné.

Passant au cas des forces coplanaires, il calcule, toujours par la même méthode, les tensions ou pressions dans un réseau triangulaire.

Il étend cette méthode au calcul des forces parallèles; il donne enfin l'expression des aires et des volumes en coordonnées pluckériennes.

Bellavitis. — Développements en série des fonctions implicites; branches infinies des courbes algébriques. (43-49).

L'auteur envisage les fonctions algébriques de deux variables. Pour transformer la fonction implicite en fonction explicite, il fait usage du polygone de Newton. Il donne quelques exemples de développements suivant les puissances croissantes ou décroissantes de l'une des variables.

Considérant ensuite la courbe qui représente la fonction de deux variables, il montre que les premiers termes du développement mettent en évidence les singularités qui se présentent, soit à l'origine, soit à l'infini, comme les points d'inflexion ou de rebroussement et les asymptotes.

Battaglini. — Sur l'équation différentielle elliptique. (50-57).

La Note de M. Battaglini a pour objet de montrer comment une équation à trois variables, du second degré par rapport à chacune d'elles, peut représenter, sous certaines conditions, une intégrale particulière de l'équation différentielle elliptique à trois variables, et l'intégrale générale de l'équation différentielle elliptique à deux variables, la troisième variable jouant alors le rôle de la constante arbitraire.

Beltrami. — Sur l'attraction d'un anneau circulaire ou elliptique. (183-194).

Casorati. — Le calcul des différences finies, interprété et enrichi de nouveaux théorèmes, par des considérations empruntées principalement à la théorie des variables complexes. (195-208).

Il s'agit des accroissements que prennent les fonctions d'une variable complexe, lorsque le point figuratif de la variable tourne autour d'un point fixe, à l'intérieur d'une couronne circulaire, et par conséquent pour des limites finies du module. Les théorèmes connus sur les différences finies se transforment alors en autant de théorèmes sur la variation continue des fonctions d'argument complexe.

Tome VI; 1879-1880.

Ce Volume ne contient aucun Mémoire de Mathématiques.

Tome VII; 1879-1880.

Maggi. — Distribution de l'électricité en équilibre sur deux conducteurs plans indéfinis, parallèles, soumis à l'influence d'un point situé dans l'espace qui les sépare. (273-286).

Solution nouvelle d'un problème très simple d'électrostatique. M. Maggi montre comment l'application de la méthode générale d'intégration des équations différentielles conduit directement au résultat obtenu par Thomson. La solution analytique de M. Maggi, représentée par une intégrale définie, permet de déterminer deux quantités (les charges des deux plans), qui, dans la méthode de Thomson, se présenteraient sous forme indéterminée.

Tome VIII; 1879-1880.

Favero. — De æquationum differentialium partialium natura disquisitiones quædam analyticæ. (217-239).

L'auteur envisage les équations aux dérivées partielles dans leur plus grande généralité. Il indique un nouveau mode d'intégration par série de ces équations.

Ascoli. — Sur les séries trigonométriques à deux variables. (263-319).

Recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction $f(x, y)$ puisse être représentée par une série convergente

$$\sum_0 {}_\nu \sum_0 {}_\mu \Big\{ \left[a_\mu^{(\nu)} \sin \mu x + a_{-\mu}^{(\nu)} \cos \mu x \right] \sin \nu y + \left[a_\mu^{(-\nu)} \sin \mu x + a_\mu^{(-\nu)} \cos \mu x \right] \cos \nu y \Big\},$$

en tous les points où le symbole $f(x, y)$ a un sens.

Cerruti. — Sur les vibrations élastiques des corps isotropes. (361-389).

M. Cerruti prend pour point de départ de ses belles recherches sur le mouvement élastique d'un corps isotrope un théorème de M. Betti sur l'équilibre d'élasticité. Il obtient les expressions de la dilatation cubique et des composantes de la rotation en un point quelconque, au bout d'un temps donné, en fonction seulement des conditions initiales, des pressions à la surface, et des conditions aux limites : connaissant la dilatation et les rotations, on en déduit très simplement la vitesse et le déplacement du point considéré. L'application de la méthode aux cas particuliers présente de grandes difficultés, parce qu'elle exige la détermination de certains groupes de fonctions auxiliaires, détermination plus ou moins difficile suivant la nature de la surface terminale. Mais ces fonctions étant trouvées une fois pour toutes pour un corps élastique donné, on a immédiatement les conditions qui définissent le mouvement, quelles que soient les conditions initiales, les pressions à la surface et les conditions aux limites.

Tome IX; 1880-1881.

Battaglini. — Sur les formes ternaires bilinéaires. (3-16).

L'objet de cette Note est la représentation géométrique d'une forme ternaire bilinéaire. Si l'on regarde les deux groupes de variables contenues dans la forme en question comme les coordonnées trilinéaires de deux points dans deux plans différents, l'équation obtenue en égalant cette forme à zéro établit entre les points des deux plans une dépendance corrélative, c'est-à-dire qu'à tout point de l'un des plans correspond une droite de l'autre. De la forme bilinéaire

proposée, on déduit une autre forme (*conjointe* à la première), qui définit, en coordonnées tangentielles, la dépendance corrélative entre les droites des deux plans. Dans le cas remarquable où le discriminant de la forme proposée est nul, il existe dans chaque plan un point singulier, pour lequel la droite correspondante dans l'autre plan est indéterminée; la forme conjointe se décompose alors en deux facteurs linéaires.

L'auteur examine avec détails le cas où les deux plans coïncident par leurs triangles de référence, pour la forme bilinéaire proposée comme pour sa conjointe.

Véronèse. — Sur quelques configurations remarquables de points, de droites et de plans, de coniques et de surfaces du second degré et d'autres courbes et surfaces. (265-343).

Si l'on prend le plan polaire π d'un point P par rapport à une surface du second ordre S_1, le pôle P_1 de π par rapport à une deuxième surface du second ordre S_2, le plan polaire π_1 de P_1 par rapport à S_1, et ainsi de suite, on obtient deux groupes projectifs, l'un de points, l'autre de plans, qui ne se ferment pas en général; c'est-à-dire qu'aucun des points ou des plans ainsi obtenus ne revient au point ou au plan de départ. Pour que l'on revienne au point P, il faut que les deux surfaces S_1 et S_2 occupent des positions respectives particulières. Si l'on donne S_1, il existe $n^3 - 1$ surfaces du second ordre, formant avec S_1 un groupe de n^3 surfaces, qui prises deux à deux jouissent de la propriété énoncée. Si l'on dispose dans un ordre donné les n^3 surfaces, et que, partant du point P, on prenne le plan polaire de P par rapport à la première, le pôle de ce plan polaire par rapport à la deuxième, le plan polaire de ce pôle par rapport à la troisième, et ainsi de suite, on obtient deux cycles, l'un de n^3 points, l'autre de n^3 plans, qui sont indépendants de l'ordre des trois surfaces. Dans le plan, on obtient par des considérations analogues un cycle de n^2 coniques.

M. Véronèse étudie les propriétés générales des groupes projectifs, relatifs à ces cycles de coniques et de surface du second ordre, de plans et de points. Il considère en particulier le cas de $n = 2$ et de $n = 3$, et il en fait l'application aux courbes planes du troisième ordre.

Maggi. — Induction électrique sur des conducteurs limités par des plans indéfinis, soumis à l'action de charges fixes disposées symétriquement autour d'un axe. (423-448).

L'auteur aborde directement ce problème par la méthode des fonctions cylindriques; en transformant convenablement ses formules, il retrouve celles qu'on obtiendrait par l'application du principe des images.

De Paolis. — Sur les fondements de la Géométrie projective. (489-503). S. R.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI ([1]).

Tome XVI; 1883.

Favaro. — Quelques écrits inédits de Galilée, tirés des manuscrits de la Bibliothèque nationale de Florence.

M. Antoine Favaro, dont nous avons fait connaître le beau travail sur Galilée et qui a démontré si péremptoirement la nécessité d'une nouvelle édition des Œuvres du grand philosophe, publie de nouveaux écrits inédits de Galilée d'après des manuscrits de la Bibliothèque nationale de Florence. Sa collection est divisée en quatre Parties : dans la première on trouve quelques extraits d'études de jeunesse sur la Philosophie naturelle; dans la deuxième des études et des traités sur le mouvement; dans la troisième ce qui nous est parvenu de la réponse à un des critiques du *Discours sur les choses qui sont sur l'eau ou qui se meuvent en elle;* enfin dans la quatrième une lettre inédite. La plupart de ces documents présentent de considérables difficultés de lecture; c'est sans doute un peu pour cette raison qu'ils sont demeurés inédits.

Ce Traité du Ciel, qu'on rencontre écrit en latin de la main de Galilée en l'année 1584, est-il son œuvre? Il est difficile de le prouver et aussi difficile de prouver le contraire; mais, en somme, ce sont là les premiers pas du jeune philosophe et il est intéressant de les suivre : M. Favaro publie la première question « le ciel est-il unique? » et la seconde « de l'ordre des orbes célestes ».

L'impression générale qu'on retire de la lecture des divers Chapitres de la deuxième Partie est qu'ils se rapportent plus ou moins étroitement avec les *Sermones de motu gravium* et les *Dialogues des nouvelles Sciences.*

On connaît bien les publications de Louis des Colombes et de Georges Coresio contre le discours de Galilée *Sur les choses qui se tiennent sur l'eau* (1612). La même année parut un opuscule anonyme : *Considerazioni sopra il discorso del Sign. Galileo Galilei*, etc., *fatte a difesa e dichiarazione dell' opinione d'Aristotele da Accademico incognito.* M. Favaro prouve que l'académicien inconnu est très probablement Arturo d'Elci, provéditeur de l'Université de Pise. Quoi qu'il en soit, tout ce qui concerne la réponse projetée de Galilée à l'Académicien inconnu est demeuré inédit et embrasse les documents suivants :

1° Deux copies d'extraits des considérations de l'académicien inconnu, de la main de D. Benedetto Castelli, enrichies de Notes autographes du maître;

2° Réponse autographe de Galilée aux *Considérations,* tout entière de sa main;

3° Un exemplaire des *Considérations* imprimé avec Notes marginales autographes de Galilée.

M. Favaro publie les pages de Galilée.

La Lettre inédite qui constitue la quatrième Partie de son travail est adressée en latin *Eruditissimo viro Georgio de Forti Scuto,* en réponse à une lettre datée

---

([1]) Voir *Bulletin*, VII, p. 130.

des Ides d'octobre 1628, que M. Favaro a eu la chance de retrouver : on peut la dater du mois de décembre 1629. Elle prouve que Galilée avait conçu le *Dialogue sur les deux plus grands systèmes du monde* avant la fin du XVIe siècle et attire notre attention sur une publication de Fortescue, les *Feriæ Accademicæ*, qui jusqu'ici avait échappé aux curieux, bien qu'on en trouve une analyse assez complète dans le *Gentleman's Magazine* de 1847.

Genocchi. — Extrait de lettre à D. Balthasar Boncompagni.

Il a lu avec plaisir le travail du P. Pépin consacré à la démonstration de ce théorème de Fermat publié pour la première fois par M. C. Henry : « Il n'y a aucun nombre que le seul 7 qui, étant le double d'un quarré -1, soit la racine d'un quarré de la même nature, c'est-à-dire qui soit double d'un quarré -1. » Mais on peut non seulement prouver que le théorème de Fermat est vrai pour de très grands nombres comme a fait le savant géomètre; on peut en démontrer la vérité absolue.

Realis. — Sur une équation indéterminée $y^4 + (y^2 - 1)^2 = z^2$, démonstration directe du théorème énoncé dans l'article précédent.

Boncompagni. — Lettre de C.-F. Gauss à Henri Guillaume Olbers : texte allemand publié suivant l'autographe possédé par la Société Royale des Sciences de Göttingue avec traduction italienne de M. Alphonse Sparagna.

Cette lettre de Gausss à Olbers est datée de Brunswick, 3 septembre 1805. Quelques passages formant moins de la moitié du document avaient été publiés, mais avec quelques inexactitudes, par M. Schering, en 1877, dans un discours lu devant la Société à l'occasion du centenaire de la naissance de Gauss.

Parmi les différentes circonstances qui l'ont empêché d'écrire plus tôt à Olbers, Gauss mentionne « quelques lettres de Leblanc de Paris, lequel a étudié avec une vraie passion mes *Recherches arithmétiques*, s'est familiarisé avec elles et m'a fait sur le sujet mainte belle communication ». Gauss fait ici allusion à deux lettres de Sophie Germain, du 21 novembre 1804 et du 21 juillet 1805, les deux premières d'une reproduction photolithographique bien connue. Ces belles communications se rapportaient à une généralisation du théorème contenu dans l'équation

$$\frac{4(x^n - 1)}{x - 1} = Y^2 \pm nZ^2,$$

et renfermaient encore ces deux théorèmes : « Le nombre 2 est résidu des nombres premiers de la forme $8K' + 1$ et non résidu des nombres premiers de la forme $8K' + 5$. Le nombre 2 est non résidu pour les nombres premiers de la forme $8K' + 3$ et résidu pour les nombres premiers de la forme $8K' + 7$. » Dans une lettre à Sophie Germain, en date du 16 juin 1805, Gauss fait, à propos de ces démonstrations, de grands éloges du talent arithmétique de son *correspondant;* cette lettre a été assez inexactement reproduite par M. Stupuy.

Gauss annonce à Olbers qu'il est parvenu enfin à découvrir, le 1er septembre 1805, la démonstration d'un théorème qu'il a énoncé dans ses *Disquisitiones*, et dont il recherchait depuis quatre ans la démonstration.

Voici ce théorème :

« Si l'on pose

$$\left(\frac{n-1}{2}\text{ pair}\right)\quad \begin{cases} \sum \cos\frac{KRP}{n} - \sum \cos\frac{KNP}{n} = \pm\sqrt{n}, \\ \sum \sin\frac{KRP}{n} - \sum \sin\frac{KNP}{n} = 0, \end{cases}$$

$$\left(\frac{n-1}{2}\text{ impair}\right)\quad \begin{cases} \sum \cos\frac{KRP}{n} - \sum \cos\frac{KNP}{n} = 0, \\ \sum \sin\frac{KRP}{n} - \sum \sin\frac{KNP}{n} = \pm\sqrt{n}, \end{cases}$$

où n est un nombre premier impair, K un nombre entier non divisible par n. P la circonférence d'un cercle de rayon 1, c'est-à-dire 2π, $\Sigma(R)$ la somme des résidus quadratiques de n et $\Sigma(N)$ la somme de tous les non-résidus positifs de n moindres que n; dans la première et la quatrième de ces quatre formules, on doit prendre les signes supérieurs lorsque K est un résidu quadratique de n, et les signes inférieurs si K est non-résidu. »

La démonstration de ce théorème a été publiée par Gauss, comme on sait, dans son Mémoire intitulé : *Summatio quarumdam serierum singularium*, en 1811 (*Commentationes Societatis regiæ Gottingensis*, t. I).

Gauss fait aussi observer à Olbers que dans la théorie « il est d'une particulière importance de pouvoir calculer exactement avec facilité les coefficients qui résultent de l'équation

$$(aa + a'a' - 2aa'\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} = A^0 + 2A'\cos\varphi + 2A''\cos 2\varphi + 2A'''\cos\varphi + \ldots,$$

puisqu'il est nécessaire de les déterminer pour un très grand nombre de valeurs de a et de a'. De fait, j'ai commencé à calculer à cet effet une table (qui, étant posé $\frac{a}{a'} = \operatorname{tang}\psi$, procède, pour les valeurs de a, entre 16° et 36°, de minute en minute, parce que de telles valeurs se présentent dans les astéroïdes); j'ai là-dessus de nombreux artifices personnels et même, dans la lettre ci-incluse que je confie à vos bons soins, j'engage notre ami Bessel à m'aider et à prendre pour lui une partie du travail ».

Charles Henry. — Sur la vie et les écrits mathématiques de Jean-Antoine Nicolas Caritat, Marquis de Condorcet. — Travaux de Condorcet. — Des méthodes d'approximation pour les équations différentielles lorsqu'on connaît une première valeur approchée, Mémoire inédit de Condorcet.

L'activité scientifique de Condorcet s'est portée sur quatre points très divers de la science : 1° sur le Calcul intégral; 2° sur l'Astronomie théorique; 3° sur le Calcul des probabilités; 4° sur l'histoire de la Science. En Calcul différentiel et intégral il a étudié après Fontaine les équations de condition qu'Euler avait rencontrées; il a donné la théorie générale de ces équations relatives à l'inté-

grabilité des fonctions différentielles et des fonctions aux différences; il a proposé une méthode générale d'intégration nécessairement impraticable; avant Laplace, il a exprimé des restrictions à la discontinuité des fonctions arbitraires; le premier, il s'est occupé des équations aux différences mêlées. En 1778, il partagea avec Tempelhoff le prix proposé par l'Académie de Berlin sur cette question : Déterminer l'orbite parabolique d'une comète par le moyen de trois observations. La méthode proposée par Condorcet est très laborieuse, elle n'a guère été appliquée.

L'*Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* est une tentative hardie, et souvent remarquable, d'appliquer le calcul aux différentes formes de décisions et aux différentes hypothèses de pluralité. Condorcet condamne notamment, et avec raison, le système actuellement suivi en France de n'écrire qu'un seul nom sur les bulletins de vote. Quand il y a seulement deux candidats, la majorité absolue pour l'un d'eux indique bien sa supériorité aux yeux du plus grand nombre. Quand il y en a trois et plus, c'est chose absolument différente : on ne sait pas quel ordre dans ses préférences l'électeur assignerait aux autres, s'il était obligé de choisir entre eux; et c'est ce qu'il importe de connaître pour avoir le sentiment de la majorité. Il est facile de citer des répartitions de préférences qui donnent la supériorité au candidat appelé le moins souvent par le scrutin ordinaire. Quelquefois cependant le système des bulletins à plusieurs noms peut aboutir à des propositions contradictoires qui exigent pour être résolues de nouvelles combinaisons. En somme, ce système est excellent quand les électeurs sont intelligents et que le vote n'a rien d'urgent; il devient peu pratique malheureusement dans la grande majorité des cas.

Un autre titre peu connu de Condorcet est l'idée de construire des *lentilles à échelons* et de les composer de plusieurs pièces. Cette heureuse idée d'employer plusieurs anneaux concentriques permet de diminuer la dépense, d'augmenter l'étendue de l'instrument, de corriger l'aberration de sphéricité, etc. : elle a été exposée par Fresnel dans son *Mémoire sur un nouveau système d'éclairage des phares.* Fresnel ignorait la priorité de Condorcet, et c'est Poinsot qui, dans une Note publiée pour la première fois par M. Charles Henry, exposa les titres incontestables de Condorcet.

La bibliographie mathématique de Condorcet a été dressée très incomplètement et avec nombre d'erreurs par Poggendorff. M. Charles Henry décrit neuf ouvrages publiés séparément et trente-trois Mémoires insérés dans divers recueils. Passant aux travaux inédits, il donne des détails complets sur le manuscrit du *Traité de Calcul intégral* légué avec d'autres papiers à la bibliothèque de l'Institut par Mme O'Connor, la fille de Condorcet. L'auteur semble avoir eu surtout pour but dans ce traité de coordonner les principaux résultats de ses recherches antérieures; l'impression en avait été commencée à l'Imprimerie royale en 1786 et, si l'ouvrage avait paru à cette époque, son exposition des principes du Calcul différentiel, indépendamment de toute notion d'infiniment petits et de limites, aurait paru nouvelle. Signalons encore parmi les papiers inédits des Mémoires sur la réduction des mesures et le jaugeage des vaisseaux.

Favaro. — Comptes rendus des Ouvrages de Mancini : *Vita di Leon Baptista Alberti,* et de Prowe : *Nicolaus Copernicus.*

Bierens de Haan. — Bibliographie néerlandaise historico-scientifique; nouvelles additions.

Jacoli. — Sur le problème « Le nœud de cravate » et quelques œuvres d'Urbano d'Aviso.

L'auteur d'un Livre récent de *Récréations mathématiques* avait donné comme nouvelle une manière de construire un pentagone régulier en liant une bande d'étoffe. M. Ferdinand Jacoli revient sur ce problème dit du « nœud de cravate ». Il prouve que la construction en question, ainsi que celle de l'hexagone régulier, se trouve dans un Livre paru en 1682, à Rome, et intitulé : *Trattato della sfera.* Ce Livre a été jusqu'ici attribué à Cavalieri. D'après M. Jacoli l'auteur ne serait pas ce savant, mais son élève Urbano d'Aviso, qui dans le livre assume le modeste rôle d'éditeur. Gabriel Piola, dans son *Éloge de Cavalieri*, avait déjà émis quelques doutes à cet égard, mais sans conclure. La solution de l'auteur est basée sur la *Sphère* de Galilée, publiée en 1656, sous le pseudonyme de Buonardo Savi. Le Livre se compose de deux Parties, dont la seconde intitulée : *Pratiques astronomiques*, peut très certainement être regardée comme appartenant à Daviso, quoique faite probablement sous la direction de Cavalieri. Or les traits principaux de ce Livre se retrouvent dans la publication de 1682, faite sous le nom de Cavalieri. Il y a, d'ailleurs, d'autres points qui prouvent que Daviso ne s'est pas borné au simple rôle d'éditeur. Cavalieri est mort en 1647; or, dans la *Sphère,* il est très souvent fait mention d'Ouvrages parus plus tard, par exemple des *Voyages de Pietro del Valle*, publiés en 1650, des *Œuvres* de Boyle, imprimées en 1669; d'Aviso se sert également des observations de Cassini sur la rotation de Jupiter, de Saturne et de Mars qui n'ont paru qu'après la mort de Cavalieri.

Enfin, les dix-septième et dix-huitième Chapitres sont très certainement tout entiers de d'Aviso. Ils ne forment, en effet, qu'un extrait de deux lettres sur les sources des fleuves publiées par lui en 1667. Le *Traité de la Sphère* ne peut donc être plus considéré comme l'œuvre du seul Cavalieri.

Steinschneider. — Études sur Zarkali : supplément à la Notice sur un Ouvrage astronomique inédit d'Ibn-Haitham.

Charles Henry. — Problèmes de Géométrie pratique de Mydorge, énoncés et solutions publiés pour la première fois.

Léon Rodet. — Solutions des mêmes problèmes tirées d'Ouvrages orientaux.

« Ces problèmes s'imposent par leur nature même à toutes les civilisations : c'est en comparant leurs solutions qu'on peut le mieux se rendre compte de la persistance des procédés ou de l'évolution des idées mathématiques. On verra par plus d'un exemple que le XVIIe siècle et les siècles suivants ne sont pas toujours en progrès sur les Arabes et les Indiens et qu'il y aurait beaucoup à gagner avec plus d'une construction antique tombée en désuétude. »

Favaro. — Discours sur l'aimant de P. Benoît Castelli.

Cet ouvrage, extrait des manuscrits galiléens de la Bibliothèque nationale de Florence, est une lettre à Don Ferdinando Cesarini, prélat romain : il a sans doute été écrit vers 1640, en tous cas il est antérieur à 1642, puisqu'on y parle

de Galilée comme d'un vivant. C'est un Traité rédigé sous forme mathématique qui mériterait une étude approfondie.

Favaro. — Recension de l'Ouvrage de Heiberg : *Literararargeschichtliche Studien über Euklid.*

Gustave Uzielli. — Recherches sur Paolo dal Pozzo Toscanelli.

Détails curieux sur la famille, la fortune, le tombeau du célèbre astronome : son portrait par Baldovinetti à 75 ans a été détruit; mais celui que Vasari a placé en 1569 dans la grande salle du Palazzo Vecchio en est sans doute une copie fidèle.

André Siattesi. — La vie et les travaux de Sébastien Purgotti.

Né à Cagli, dans les Marches, le 21 juillet 1799, il étudia d'abord le droit, puis les sciences : en 1827 il obtint la chaire de chimie et de pharmacie à Urbino, puis en 1834 la chaire de mathématiques élémentaires à Pérouse, où il resta jusqu'à sa mort (1879). Ce savant, qui insista beaucoup sur l'importance des théories atomiques en Chimie, aurait introduit aussi des améliorations dans l'enseignement mathématique de son pays.

Boncompagni. — Sur deux questions proposées dans le recueil intitulé : *Giornale degl'Eruditi e Curiosi :* 1° le zéro; 2° Galilée Middlebourg et les fils de Jansen.

Bierens de Haan. — Bibliographie néerlandaise historico-scientifique. Sommaire II. Aperçu sur quelques imprimeurs et éditeurs. C. H.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von L. KRONECKER und K. WEIERSTRASS (1).

Tome XCIV; 1883.

Hurwitz (Adolf). — Sur les périodes des fonctions monotropes $2n$-uplement périodiques qui possèdent partout à distance finie le caractère de fonctions rationnelles et qui sont réelles pour des valeurs réelles de leurs n arguments. (1-20).

« Soit $\varphi(u_1 + P_1, u_2 + P_2, \ldots, u_n + P_n) = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$: alors l'ensemble

---

(1) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 42.

des quantités P_α est appelé une *période* de la fonction φ, et les quantités individuelles P qui constituent la période sont désignées comme *modules de périodicité*. Le résultat principal du Mémoire de M. Hurwitz s'énonce comme il suit :

Soit $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une fonction monotrope $2n$-uplement périodique qui possède partout à distance finie le caractère de fonction rationnelle et qui prend des valeurs réelles lorsque tous les arguments sont des quantités réelles. Alors on peut toujours établir n couples de périodes de la fonction φ

$$(P_{1,\beta}, P_{2,\beta}, \ldots, P_{n,\beta}); \ (P_{1,n+\beta}, P_{2,n+\beta}, \ldots, P_{n,n+\beta}), \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n)$$

(où les modules de périodicité $P_{i,1}, P_{i,2}, \ldots, P_{i,2n}$ se rapportent à l'argument u_i) qui, pris ensemble, forment un système de *périodes primitives* de la fonction et telles que pour tout couple de périodes il arrive l'un des deux cas :

1° La première période $P_{1,\beta}, P_{2,\beta}, \ldots, P_{n,\beta}$ est réelle et la seconde $P_{1,n+\beta}, P_{2,n+\beta}, \ldots, P_{n,n+\beta}$ est purement imaginaire;

2° La première période est réelle, et la période composée de la première et de la seconde $2P_{1,n+\beta} - P_{1,\beta}, 2P_{2,n+\beta} - P_{2,\beta}, \ldots, 2P_{n,n+\beta} - P_{n,\beta}$ est purement imaginaire. »

Signalons encore cet autre théorème remarquable :

« Si un système de $2n$ périodes linéairement indépendantes d'une fonction $2n$-uplement périodique de n variables, et qui possède partout à distance finie le caractère de fonction rationnelle, ne comprend que des périodes réelles et purement imaginaires, il faut qu'il existe autant de périodes de l'une que de l'autre espèce. »

V. Mangoldt (*Hans*). — Sur la classification des surfaces d'après la possibilité d'en déplacer les triangles géodésiques. (21-40).

Dans son Mémoire *Théorie générale des triangles géodésiques* (*Abhandl. der Königl. Akad. d. Wissensch. zu Berlin*, p. 119-176; 1868), M. Christoffel a divisé les surfaces courbes en quatre genres selon la possibilité d'en déplacer les triangles géodésiques. En 1882, M. Weingarten a publié dans les *Sitzungsberichte de l'Acad. de Berlin* ces deux propositions : 1. Le troisième genre de surfaces est entièrement identique au quatrième. L'un et l'autre comprennent toutes les surfaces à mesure constante de courbure, et seulement celles-ci. 2. Le deuxième genre comprend toutes les surfaces qui sont développables sur des surfaces de rotation à mesure non constante de courbure, et seulement celles-ci. M. v. Mangoldt avait déjà communiqué sans démonstration la première de ces propositions à la Société des naturalistes de Fribourg. La démonstration de M. Weingarten part de cet autre théorème : Qu'un triangle géodésique ait des côtés désignés comme infiniment petits de premier ordre. » Si ce petit triangle peut se déplacer sur une surface courbe sans variation de ses six éléments, les mesures de courbure de la surface dans les sommets du triangle ne peuvent varier, à chaque déplacement, que de quantités infiniment petites de second ordre. » M. v. Mangoldt croit que ce théorème suffit pour démontrer la première des propositions mentionnées ci-dessus, qu'il suffit aussi pour faire voir que les lignes de mesure constante de courbure doivent être équidistantes sur les surfaces du deuxième genre, mais que la développabilité

de ces surfaces sur des surfaces de rotation ne résulte que lorsqu'on a démontré que ces lignes sont aussi isothermes. Une démonstration rigoureuse se déduit d'un déterminant qui a été établi par M. Christoffel, et M. Mangoldt s'est attaché dans son Mémoire à effectuer le calcul un peu fastidieux pour en faire saillir le résultat de M. Weingarten.

Gram (*J.-P.*). — Sur le développement en séries de fonctions réelles au moyen de la méthode des moindres carrés. (41-73).

L'idée de profiter de la méthode des moindres carrés pour calculer les coefficients d'une formule d'interpolation semble être née en même temps que la méthode même; cependant M. Tchebycheff paraît avoir été le premier à résoudre le problème en toute généralité. La solution (*Journal de Liouville*, 2e série, t. III, 1858) qui se rattache à la théorie des fractions continues présente le résultat sous la forme d'une série qui est en quelque sorte analogue à la classe générale de séries considérées par Sturm et Liouville (*Ibid.*, t II). Cette analogie, que M. Bienaymé ne tarda pas à signaler, a été ensuite mise en évidence par les travaux du regretté M. Heine; enfin MM. Plarr et Töpler ont prouvé que les développements procédant suivant les fonctions sphériques et les séries de Fourier sont intimement liés avec la méthode des moindres carrés. A tout prendre, il semble toutefois qu'on n'ait prêté que peu d'attention à cette filiation d'idées. Sans connaître les travaux cités, M. Gram, en partant de la méthode des moindres carrés, a été amené au même genre de séries, et il est d'avis que c'est cette méthode même qui fournit le plus simple point de vue commun pour une classe très étendue de développements qui embrassent non seulement la formule de M. Tchebycheff, mais encore les séries de Fourier et d'autres analogues à celles-ci. Ces idées sur les *séries à interpolation* furent développées pour la première fois dans la thèse de M. Gram : *Om Räkkeudviklinger, bestemte ved Hjälp af de mindste Kvadraters Methode. Kjöbnhavn*, 1879. *Höst et Sön.* M. l'auteur expose les fondements de sa théorie générale dans ce nouveau Mémoire sous une forme un peu modifiée et complétée. L'intérêt qui s'y attache est d'autant plus grand que la méthode de Dirichlet dont on s'est servi exclusivement n'a été appliquée qu'à des classes séparées de séries.

Caspary (*F.*). — Contribution à la théorie des fonctions thétas à deux arguments. (74-86).

D'après une observation faite par M. Weierstrass dans son Cours à l'Université de Berlin et par M. Weber dans un Mémoire inséré au tome XIV des *Mathematische Annalen*, il subsiste les équations de condition de la substitution orthogonale entre neuf certains quotients qui sont formés par les fonctions θ paires de deux arguments et par leurs valeurs zéros respectives. Ce résultat remarquable qui permet de grouper un grand nombre de relations des θ d'une manière claire et de les ramener à des formules connues, peut être étendu à l'ensemble des seize fonctions θ : un certain arrangement de seize produits des fonctions θ deux à deux fournit les coefficients d'une substitution linéaire qui réduit la somme des carrés des quatre nouvelles variables au produit d'une constante et de la somme des carrés des quatre variables primitives. Le deuxième paragraphe montre comment la relation de Goepel et sa

transformée, l'équation de la surface de Kummer, découlent de cette proposition. Le troisième paragraphe donne un second théorème d'où ressortent, pour un cas très spécial, les systèmes de formules qui font le point de départ des recherches de M. Rosenhain dans son Mémoire couronné.

Baltzer (*R.*). — Sur l'introduction des nombres complexes. (87-92).

Cette Note donne un abrégé historique de l'introduction des nombres complexes; elle insiste surtout sur les mérites de Gauss qu'on a parfois négligés ou méconnus. En particulier une Lettre de Gauss à Bessel (empruntée à la Correspondance entre Gauss et Bessel, publiée en 1880), datée du 18 décembre 1811, prouve évidemment que déjà à cette époque Gauss était en possession de la théorie des intégrales prises sur un chemin complexe de la variable.

Cayley (*A.*). — Sur les tangentes doubles d'une courbe plane de quatrième ordre. (93-115, angl.).

Le problème des tangentes doubles d'une courbe plane de quatrième ordre a trouvé une solution très élégante par Riemann dans le Mémoire : *Zur Theorie der Abelschen Functionen für den Fall* $p = 3$. (*Gesammelte Werke*, p. 456-479). M. Cayley s'est étudié à perfectionner l'homogénéité des formules de cette solution. Après avoir opéré quelques changements de la notation, il énumère les 28 équations des tangentes doubles et en vérifie la forme par un procédé purement algébrique et indépendant de la théorie des fonctions θ. Cette voie, quoique un peu longue par la nature des calculs à effectuer, est bien remarquable pour le caractère élémentaire de ses opérations. Un supplément du Mémoire s'occupe de la condition nécessaire et suffisante, dans la notation de M. Cayley, pour qu'il existe un point double, en particulier un point double qui est un *fleflecnode*, c'est-à-dire un point d'inflexion sur chacune des deux branches de la courbe qui s'y coupent.

Dobriner (*H.*). — Sur les surfaces qui ont un système de lignes sphériques de courbure. (116-161).

Sans connaître les travaux de M. Enneper qui ont traité la même question (*voir* ci-dessous), M. Dobriner a réussi à découvrir une méthode pour intégrer les équations différentielles du problème et à établir les équations de ces surfaces avec le nombre nécessaire de constantes arbitraires. Quand on connaît des surfaces dont les lignes de courbure sont planes, la transformation au moyen des rayons vecteurs réciproques fournit un moyen pour en faire naître d'autres dont les lignes de courbures sont sphériques. Pour mettre à profit cette transformation dans une plus grande étendue, on se sert de la notation généralisée de *surfaces parallèles* donnée par M. Enneper. Si deux surfaces ont, en des points correspondants, leurs normales et leurs lignes de courbure parallèles, sans être encore équidistantes, M. Enneper continue à les nommer parallèles, M. Dobriner les désigne comme *surfaces homothétiques* (ähnlich liegend) et énonce ce théorème relatif au problème en question :

« Toute surface avec un système de lignes sphériques de courbure est homothétique avec un nombre infini d'autres surfaces dont le système correspondant

de lignes de courbure est également situé sur des sphères; et parmi elles il y a aussi des surfaces où les sphères osculantes passent toutes par un même point. »

Toutes les surfaces homothétiques forment un *groupe*. Les équations des surfaces appartenant à un groupe sont liées par des relations simples en vertu desquelles il est aisé de déduire des équations de l'une des surfaces celles des autres. En transformant donc les surfaces dont les lignes de courbure sont planes, on parvient à des représentants qui peuvent servir à faire découvrir les autres surfaces du groupe. Quoique le problème puisse trouver sa résolution complète par cette voie, M. Dobriner donne la préférence à un chemin qui part des équations différentielles à intégrer.

I. Établissement des équations différentielles. II. Le cas général. III. Cas particuliers. — Ouvrages cités par l'auteur :

Ossian Bonnet. — *Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques.* (*Journ. de l'Éc. Polyt.*, t. XX, Cah. XXXV, 1853, p. 117-306).

Ossian Bonnet. — *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée.* (*Journ. de l'Éc. Polyt.*, t. XXV, Cah. XLII, 1867, p. 32-35).

Serret. — *Mémoire sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques.* (*Liouv. Journ.*, t. XVIII, 1853).

Dini. — *Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche.* (*Mem. d. Società ital. d. Scienze.* Firenze, 1869-76).

Enneper. — *Untersuchungen über die Flächen mit planen oder sphärischen Krümmungslinien* (*Abhandl. d. Königl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen.* t. XXIII, 1878).

Codazzi. — *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio* (*Annali di Matem.*, 2e série, t. II).

Craig (*Tomas*). — Note sur les surfaces parallèles. (162-170, angl.).

Suite des recherches publiées au tome XCIII sur la surface parallèle à l'ellipsoïde (*Bulletin*, IX_2, p. 48). Après avoir corrigé deux erreurs qui s'étaient glissées dans le travail antérieur, M. Craig développe quelques résultats généraux pour des surfaces parallèles quelconques. Soient

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 2kabc$$

l'équation d'un ellipsoïde, $d\Sigma$ l'élément de l'aire de l'ellipsoïde, dS l'élément correspondant de l'aire de la surface parallèle, H la somme des courbures principales de l'ellipsoïde dans un point quelconque, K la mesure de courbure dans le même point : on a

$$\frac{dS}{d\Sigma} = 1 + kH + k^2K.$$

Ce théorème vaut également pour une surface parallèle à une surface quelconque donnée.

Signalons encore cette remarque qui se trouve à la fin du Mémoire : « Dans mon Mémoire antérieur, j'ai déjà dit en passant que M. S. Roberts avait achevé quelque chose dans la théorie des surfaces parallèles. Cependant je n'avais pas

alors connaissance d'un de ses Mémoires qu'il a eu récemment la bonté de m'envoyer et où il s'occupe des surfaces parallèles. Le travail de M. S. Roberts est contenu dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*, année 1872 (*Bulletin*, 1re série, t. VII, p. 25), et contient un compte beaucoup plus complet des propriétés projectives de la surface que je ne l'ai donné. Un autre Mémoire de M. Roberts, contenu dans le vol. IV des mêmes *Proceedings* (*Bulletin, ibid.*, p. 27) contient un nombre de théorèmes concernant des surfaces parallèles, lesquels j'avais déjà obtenus avant d'avoir attentivement lu ce Mémoire et que j'avais eu l'intention d'incorporer à cette présente Note. Puisque cela n'est plus nécessaire, je me contente de m'en rapporter à ce Mémoire et d'en extraire seulement une propriété ou deux que j'avais trouvées indépendamment : Un ombilic de la surface primitive correspond à deux ombilics de la surface parallèle. A une ligne plane de courbure correspond une ligne plane de courbure; la différentielle qui détermine les directions où une normale est coupée par les normales successives est la même pour les deux systèmes, etc. »

Hunyady (*Eugen*). — Sur quelques équations entre des déterminants. (171-178).

La Note s'attache à quelques Mémoires de Hesse et de Cayley :

Cayley. — *Further investigations on the double ϑ-functions* (*Journ. für Math.*, t. LXXXIII).

Cayley. — *Note on a theorem in determinants* (*Quarterly Journ. of Math.*, vol. XV).

Hesse. — *Zur Involution* (*Journ. für Math.*, t. LXIII).

Hesse. — *Ein Uebertragungsprincip* (*ibid.*, t. LXVI).

Hesse. — *Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes.*

Holzmüller. — Note sur la réflexion isotherme. (179-180).

La réflexion isotherme contre la lemniscate ordinaire transforme le faisceau de cercles passant par ses foyers et le faisceau orthogonal de celui-ci en systèmes orthogonaux de sections coniques confocales qui ont les mêmes foyers.

Weingarten (*J.*). — Sur les propriétés de l'élément linéaire des surfaces à mesure constante de courbure. (181-202).

« Des recherches récentes de géomètres éminents et ressortant aussi bien à la Géométrie qu'à la théorie des fonctions font entrevoir un lien commun qui subsiste entre la théorie de la substitution linéaire et fractionnaire d'une quantité indéfiniment variable et d'une part la théorie des équations différentielles linéaires de second ordre, d'autre part la Géométrie des figures formées par les plus courtes lignes d'une surface à mesure constante de courbure. La première de ces indications se trouve dans Riemann, section 14 du Mémoire sur la surface à aire minima de limites données, et elle s'attache à l'observation que la question de la représentation conforme d'une telle surface sur un plan est identique avec celle de la représentation conforme d'une sphère sur un plan. Des indications ultérieures peuvent se tirer de quelques tours géométriques qu'on rencontre dans des Mémoires de MM. Klein et Poincaré sur la théorie des fonctions. Enfin il est aisé de voir que des substitutions linéaires

et fractionnaires achèvent la transformation en soi-même d'une forme donnée de l'élément linéaire d'une surface à mesure constante de courbure, transformation qui n'a lieu que pour ces surfaces de bien des manières dont le nombre est triplement infini.

Dans l'état où en est la question, on est amené à se douter d'une certaine affinité entre le problème de développer les lignes géodésiques d'une surface à courbure constante en partant d'une forme donnée de son élément linéaire, et la théorie des équations différentielles linéaires de second ordre. Cette présomption se trouvera confirmée par les développements qui vont suivre. »

Worpitzky (*J.*). — Études sur les nombres de Bernoulli et d'Euler. (202-232).

M. Worpitzky donne dans une introduction sommaire l'historique et la littérature principale de la question, puis il développe, d'après des méthodes qui lui appartiennent pour la plus grande part, les résultats séparés des auteurs qui ont recherché les propriétés de ces nombres, et il montre les sources d'où découlent ces propriétés soit connues, soit nouvelles. Citons seulement cette proposition où B_r désigne le $r^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli : « Le nombre

$$v_r = 2(2^{2r} - 1) B_r = \frac{r u_{2r}}{2^{2r-2}}$$

est entier, impair et divisible par tout diviseur impair de r. Le nombre u_{2r} est divisible par la $(2r - 2 - n)^{\text{ième}}$ puissance de 2, mais non par une plus grande, si 2^n est la plus haute puissance de 2 qui divise r. »

Study. — Démonstrations élémentaires de quelques propositions géométriques. (233-236).

1. Toutes les sphères circonscrites aux tétraèdres polaires d'un système polaire dans l'espace ont le centre du système polaire pour point chordal commun. 2. Les circonférences décrites sur les diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres ont une commune corde; généralisation de ce théorème pour l'espace.

Holzmüller. — Note sur la représentation conforme de la cyclide sur le rectangle et sur le plan infini. (237-238).

Holzmüller. — Sur certaines surfaces transcendantes qui comprennent la cyclide comme cas spécial. (239-240).

La Note donne quelques traits caractéristiques des surfaces que M. Holzmüller a étudiées dans la *Zeitschrift für Math. u. Physik. de M. Schlömilch*, année 1871 (t. XVI). L'explication se fait au moyen d'une figure contenue dans l'Ouvrage : Holzmuller, *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaft*. Leipzig, Teubner, 1882.

Thomae (*J.*). — Sur les intégrales de seconde espèce. (241-250).

Suite des recherches du tome XCIII (*Bulletin*, IX_2, p. 43). Ayant annoncé

l'intention de simplifier encore la représentation de la fonction

$$\frac{d \log \mathfrak{S}((u(\sigma, \zeta) - \Sigma u(s_\mu, z_\mu)))}{d\zeta},$$

par des intégrales de seconde espèce pour le cas $p = 3$, M. Thomæ développe actuellement cette simplification tout en retenant la notation du travail cité. L'introduction sert de plus à corriger quelques inexactitudes de la publication précédente.

§ 6. Les fonctions χ et $\varphi^{(0)}$. § 7. La fonction $\sqrt{\psi}$. § 8. La fonction entière

$$\Pi(\sigma, \zeta) = G(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta) - \tfrac{1}{2} F_1(\sigma, \zeta) \frac{d \log ab(\sigma, \zeta)\, ab_1(\sigma, \zeta)\, ab_2(\sigma, \zeta)}{d\zeta}.$$

§ 9. Résultat. § 10. Quotients différentiels partiels des fonctions $\mathfrak{S}$.

Rausenberger (*Otto*). — Contributions à la théorie des fonctions elliptiques. II. (251-267).

Le premier Mémoire se trouve au tome XCIII (*Bulletin*, IX_2, p. 49).

Les équations abéliennes dont les racines se déduisent d'une seule d'entre elles par les réitérations d'une substitution linéaire ou bien de deux linéaires et permutables étant algébriquement résolubles, on a lieu de se douter que des fonctions transcendantes, qui, en subissant les mêmes substitutions, restent invariables, seront algébriquement inversibles. Ces inversions pourront en général être représentées par un nombre infini de radicaux ayant en partie des exposants infinis. En effet, on sait que de $e^x = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega$ pour $\omega = \infty$ on tire

$$\log x = \omega \left(x^{\frac{1}{\omega}} - 1\right).$$

Des difficultés d'un ordre beaucoup plus élevé s'opposent à l'application de cette méthode pour les fonctions périodiques par multiplication, respectivement elliptiques. Les résultats auxquels M. Rausenberger est parvenu après des tentatives variées ne sont pas très satisfaisants, parce que la méthode même qui est l'imitation exacte de la résolution des équations abéliennes ne pouvait pas être poussée jusqu'au bout à l'aide de moyens tout élémentaires.

Kronecker (*L.*). — Sur les nombres de Bernoulli. (268-269).

Cayley (*A.*). — Sur la surface de quatrième ordre avec seize points nodaux. (270-272).

Soient x, y, z, w les coordonnées homogènes; ξ, η, ζ des fonctions linéaires de celles-ci choisies de sorte qu'on ait identiquement

$$x + y + z + \xi + \eta + \zeta = 0, \quad ax + by + cz + f\xi + g\eta + h\zeta = 0,$$

où

$$af = bg = ch = 1.$$

Alors l'équation de la surface sera

$$\sqrt{x\xi} + \sqrt{y\eta} + \sqrt{z\zeta} = 0,$$

et aura ses seize plans tangents représentés par des équations faciles à former.

Du Bois-Reymond (*P.*). — Sur l'intégrale double. (273-290).

Dans son *Essai historique sur la représentation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une série trigonométrique* (voir *Bulletin*, IV_1, p. 43 et 83) M. Arnold Sachse a fait quelques remarques sur la notion d'intégrale double telle qu'elle a été établie par M. P. du Bois-Reymond. Cette critique est devenue l'origine d'une controverse assez vive et parfois personnelle. Le travail actuel prend le chemin le plus sûr pour terminer une querelle, celui de développer avec clarté les idées du disputant. Voici comment l'auteur s'exprime à la fin :

« Lorsque je commençai à m'occuper de la théorie des intégrales doubles auxquelles appartient celle de la formule de Fourier, je cherchai à me tirer d'embarras à l'aide des intégrales singulières de Cauchy. Ce qui fait qu'on ne peut achever grand'chose par elles, c'est la diversité des oscillations qui sont possibles quand on s'approche des points de discontinuités, et qu'il faut pourtant prendre en considération dans des recherches plus générales. J'ai modifié alors l'analyse de Cauchy de façon à donner d'autres limites à ses intégrales singulières. Quoique je ne sois ainsi parvenu à aucune explication péremptoire de la nature de ces intégrales doubles, mon attention fut pourtant appelée, par cette généralisation de la méthode de Cauchy, à la cause évidente en Géométrie des particularités analytiques quelquefois très énigmatiques que montrent certaines intégrales doubles. Quelques résultats de cette recherche ont été communiqués dans le Chapitre IV de mon Mémoire : *Sur les propriétés générales de la classe d'intégrales doubles*, etc., t. LXIX, p. 99. L'embrouillement de ces problèmes fut écarté par l'idée, apparemment facile à concevoir, d'appliquer aux intégrales doubles la seconde définition de Cauchy pour l'intégrale simple qui a ou des limites infinies ou un intégrande devenant infini, chemin qui avait été prescrit en toute netteté par Dirichlet. »

Königsberger (*Leo*). — Propriétés des intégrales algébrico-logarithmiques d'équations différentielles linéaires non homogènes. (291-311).

On trouve dans le Mémoire plusieurs théorèmes sur les propriétés de l'équation différentielle linéaire qui possède des intégrales algébriques ou logarithmiques.

Reye (*Th.*). — Sur les transformations de degré n des coordonnées. (312-318).

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées homogènes d'un point X dans l'espace R_x, y_1, y_2, y_3, y_4 celles d'un point Y dans l'espace R_y, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ quatre formes quaternaires de degré n des coordonnées y_i, ρ un facteur de proportionnalité. Les formules de transformation seront

$$\rho x_1 = \varphi_1, \quad \rho x_2 = \varphi_2, \quad \rho x_3 = \varphi_3, \quad \rho x_4 = \varphi_4.$$

Le Mémoire développe les théorèmes fondamentaux sur la correspondance des figures dans les deux espaces. Par exemple : Des éléments homologues infiniment petits d'espace ou d'aire (c'est-à-dire dont toutes les dimensions sont

infiniment petites) des deux espaces R_x et R_y sont collinéaires; il faut cependant excepter ces éléments de R_y qui contiennent des points associés à eux-mêmes. Tout point Y′ de R_y associé à lui-même est un point double d'une surface du réseau des F^n, et inversement. A cette surface du réseau il correspond dans R_x un plan τ qui est touché dans le point correspondant X′ par toutes les surfaces dont les homologues passent par Y′.

Stahl (*Wilhelm*). — Sur la théorie des polaires des complexes de second degré. (319-328).

Rapportée à un complexe de second degré, toute droite l de l'espace correspond à une polaire l', lieu des pôles de la droite l par rapport aux courbes du complexe situées dans les plans du faisceau l et en même temps section de tous les plans polaires de l par rapport aux cônes du complexe dont les centres se trouvent sur l. Mais en général l n'est pas inversement la polaire de l'; il existe cependant une certaine réciprocité. C'est que l est toujours la polaire de l' par rapport à un second complexe qui a la surface des singularités commune avec le premier. Cette proposition se trouve démontrée dans le Mémoire de M. Stahl par la voie synthétique. Le procédé analytique fournirait encore la signification entière du théorème quand on considère toutes les droites qui ont la même polaire pour un complexe. Les relations entre ces complexes gagnent de la perspicuité dans le complexe tétraédral pour lequel M. Stahl communique quelques constructions et théorèmes à la fin du Mémoire.

Enneper (*A.*). — Sur les surfaces avec un système de lignes sphériques de courbure. (329-341).

En rédigeant son travail sur ces surfaces, M. Dobriner (*voir* plus haut) n'avait pas connu la littérature complète sur ce sujet, en particulier deux Mémoires de M. Enneper qui portent le titre : *Untersuchungen über die Flächen mit planen und mit sphärischen Krümmungslinien*, von Alfred Enneper. Le premier se trouve dans le tome XXIII des *Abhandlungen der K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen*, 1878, l'autre avec l'addition, second Mémoire, a été inséré au tome XXVI, 1880, de la même collection. Le second Mémoire discute (p. 62-103) les cas différents que peuvent présenter les surfaces avec un seul système de lignes sphériques de courbure. Pour plus d'évidence M. Enneper reproduit les résultats principaux de ce second Mémoire sans les déduire de nouveau, et fait réimprimer l'introduction du n° 12 parce qu'elle donne un abrégé littéraire des travaux fondamentaux sur les surfaces avec des lignes sphériques de courbure. Outre les travaux cités par M. Dobriner, M. Enneper nomme encore :

Serret. — *Comptes rendus*, t. XLII, p. 109-110 et 190-194, 1856.
Bonnet. — *Note sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles simultanées* (*Comptes rendus*, t. LIII, p. 971-974, 1861).
Enneper. — *Nachrichten von der Königl. Gesellsch. d. Wissensch.*, Göttingen, 1872.

Holzmüller. — Sur la représentation conforme de la cyclide. (342-343).

Kronecker (*L.*). — La décomposition des quantités entières d'un

domaine naturel de rationnalité en facteurs irréductibles. (344-348).

Au § 4 de ses *Traits fondamentaux d'une théorie arithmétique des quantités algébriques* (*Bulletin*, VIII_2, p. 182) M. Kronecker a effleuré la démonstration inductive pour la possibilité et la détermination entière de la décomposition des quantités entières d'un domaine naturel de rationnalité en facteurs irréductibles. Actuellement il achève de donner la démonstration complète d'après une méthode qu'il a déjà utilisée depuis le cours du semestre d'hiver 1861-62 à l'Université de Berlin.

Runge (*C.*). — Déduction algébrique de la multiplication de $\cos am\, u$. (349-351).

Cette déduction repose en partie sur la Note précédente de M. Kronecker.

E. Lampe.

ANNALES de la Société Scientifique de Bruxelles. — Bruxelles, F. Hayez. In-8° (1).

Tome III, 1878-1879 (publié en 1879).

Carbonnelle (*I.*). — Deux théorèmes de Dynamique. (A, 53-55).

Si, dans les équations d'un problème de Dynamique où les forces ne sont pas fonctions du temps, on change, soit le signe des vitesses initiales, soit celui du temps considéré comme variable indépendante, on obtient le même résultat. Le mouvement défini par les équations ainsi transformées est le *réverti* de celui qui était défini par les équations primitives. Cela posé : 1° si dans le mouvement d'un système il y a un moment où toutes les vitesses sont nulles, cet instant divise le mouvement en deux parties parfaitement symétriques dont l'une est exactement la révertie de l'autre; 2° s'il y a deux instants où toutes les vitesses sont nulles, le mouvement est périodique et la période complète se compose de deux parties parfaitement symétriques dont l'une est la révertie de l'autre.

Gilbert (*Ph.*). — Recherches sur les mouvements relatifs. (A, 58-65; 70-77; 81-90).

L'auteur met les équations du mouvement relatif sous des formes telles que les diverses quantités qui y entrent ont une interprétation géométrique simple. Cela lui permet de traiter plus complètement que ses devanciers les questions relatives au mouvement d'un système matériel pesant S à la surface d'une

---

(1) *Voir* le *Bulletin*, 2e série, t. IV, 2e Partie, p. 80-89. Chaque volume a deux paginations que nous distinguons par les lettres A, B

planète animée d'une vitesse de rotation quelconque ω autour de son axe. Si l'origine se confond avec le centre de gravité, il obtient le théorème suivant : « On peut appliquer rigoureusement les équations de Lagrange au mouvement apparent d'un système pesant S dont le centre de gravité est fixe sur la planète, comme si celle-ci était en repos, pourvu que l'on ajoute à la demi-force vive apparente T du système S la projection, sur l'axe de rotation de la planète, de l'axe du moment des quantités de mouvement de S multipliée par la vitesse angulaire ω de cette rotation. » Grâce à ce théorème, M. Gilbert ramène aux intégrales elliptiques l'intégration des équations du mouvement du gyroscope complet, sans négliger dans les calculs le carré de ω, comme Lottner. Si l'axe du tore est maintenu dans un plan fixe ou sur un cône fixe, la solution rigoureuse est plus simple que le résultat trouvé par Bour et Lottner. En particulier, si l'axe du tore est maintenu dans un plan fixe, son mouvement est celui d'un certain pendule dont le plan tournerait uniformément autour de la verticale. Esquisse d'autres applications.

D'Abbadie (*A.*). — Description et usage de l'*aba*. (A, 78-80).

Espèce de théodolite très pratique destiné aux voyageurs qui veulent faire de la géodésie expéditive.

Henry (*L.*). — Sur la nature essentielle des éléments chimiques. (A, 95-96).

Sur la possibilité de l'existence d'une seule matière pondérable.

Gilbert (*Ph.*). — Les instruments arithmétiques à l'exposition universelle de 1878. (A, 122-124).

Domec. — Gabriel Garcia Moreno et l'enseignement dans la République de l'Équateur. (A, 136-150).

Lafont. — Les origines et l'établissement de l'observatoire héliospectroscopique de Calcutta. (A, 150-152).

Puiseux (*V.*). — Note sur les polygones qui sont à la fois inscrits dans un cercle et circonscrits dans un autre (B, 1-12).

Étude par une méthode élémentaire des fonctions entières rencontrées par Jacobi dans son Mémoire sur cette question.

De Lapparent (*A.*). — Note sur les théories relatives à la structure cristalline. (B, 73-80).

La théorie cristallographique de Bravais ne contient pas de postulat, contrairement à ce que pense Sohnke, et elle explique tous les phénomènes cristallographiques.

Gilbert (*P.*). — Sur l'extension aux mouvements plans relatifs de la méthode des normales et des centres de courbure. (B, 81-92).

Ghysens (*E.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 55-57).

« Étant donnés, pour une figure F′, qui se meut dans le plan d'une figure F, le centre instantané C′, le pôle d'inflexion K′, la vitesse de rotation ω′; les éléments analogues C″, K″, ω″ pour F qui se meut dans un plan P en entraînant F′, trouver pour le mouvement de F′, dans F, les éléments C, K, ω. Applications. »

Gilbert (*P.*). — Sur la réduction des forces centrifuges composées dans le mouvement relatif d'un corps solide. (B, 141-156).

L'auteur résout d'une manière simple la question indiquée en adoptant pour l'accélération centrifuge composée la figuration géométrique proposée dans son *Cours de Mécanique*. Il retrouve ainsi, par une voie toute naturelle, les résultats obtenus antérieurement par M. Resal et par M. Quet, et un grand nombre de nouveaux.

Joubert. — Formation de la réduite de l'équation du multiplicateur dans le cas de la transformation du septième ordre. (B, 157-180).

Les équations modulaires du sixième, du huitième et du douzième degré correspondant à la transformation du cinquième, du septième et du onzième ordre donnent lieu à des réduites dont le degré est moindre d'une unité, comme l'a prouvé M. Hermite. La même démonstration s'applique à l'équation du multiplicateur. L'auteur, dans le travail actuel, forme l'équation réduite du multiplicateur, du septième degré dans le cas de la transformation du septième ordre.

De Regnon (*T.*). — De la réfraction à travers les lentilles sphériques épaisses. (B, 181-206).

M. Bertin a montré, dans un travail inséré dans les *Annales de Chimie et de Physique*, en avril 1878, comment on peut aborder, par une méthode simple, la théorie de la réfraction dans les lentilles épaisses. L'auteur du présent Mémoire, introduisant cette étude dans l'Optique élémentaire, rattache la question des lentilles épaisses à quelques théorèmes connus. Il traite successivement le cas d'une lentille plongée tout entière dans un même milieu, ou dans deux milieux différents, le point lumineux étant situé sur l'axe principal ou en dehors.

Haton de la Goupillière (*J.-N.*). — De la similitude en thermologie. (B, 207-212).

Dans l'étude des phénomènes de conductibilité de la chaleur, qui peuvent

être dits semblables, il y a, en général, sept rapports de similitude, liés entre eux par deux relations.

Delsaux (*J.*). — Sur une propriété des surfaces du second degré dans la théorie de l'électricité statique. (B, 213-220).

Gilbert (*P.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 80-81).

Quand on charge d'électricité, un corps conducteur isolé, la résultante de toutes les actions exercées par les éléments de la surface sur un point intérieur est nulle, quel que soit ce point. De plus, si le corps est un ellipsoïde, les actions élémentaires de la surface sur un point situé sur la droite qui joint deux éléments sont égales et de signe contraire. L'auteur démontre que l'ellipsoïde jouit seul de cette dernière propriété; puis il prouve que la pression électrique est, comme l'admet W. Thomson, pour un élément de la surface ellipsoïdale, la moitié seulement de la valeur admise pour la plupart des physiciens et même, qu'il en est ainsi pour une surface quelconque.

Sohnke (*L.*). — Réponse à la Note de M. de Lapparent : *Sur les théories relatives à la structure cristalline.* (B, 247-254). Réplique de M. Lapparent. (B, 255-258).

Mansion (*P.*). — Note sur quelques principes fondamentaux d'Analyse. (B, 259-266).

La limite d'une fonction de deux variables $F(x, y)$ pour $x = x_0$, $y = y_0$ peu être différente, suivant que x et y tendent simultanément vers leurs limites ou non. Il résulte de là que la règle de dérivation des fonctions composées, et celle des intégrales définies par rapport à un paramètre variable ne peuvent être établies d'une manière générale; puis, qu'il faut quelque précaution pour prouver que le reste, dans la série de Taylor, tend vers zéro, quand les dérivées sont toutes continues.

Tome IV; 1879-1880 (publié en 1880).

Gilbert (*P.*). — Rectification aux formules sur les mouvements relatifs. (A, 53-55).

L'auteur, dans ses Notes sur les mouvements relatifs, a désigné une même quantité par deux lettres distinctes, ce qui a compliqué divers résultats (p. 76, 61, 77, 86-88,87, 89, du t. III de ses *Annales*). Il donne ici les formules exactes.

De Heen. — Détermination des dimensions réelles des molécules. (A, 84-87).

Historique : méthode de Clausius et Clerk Maxwell fondée sur la théorie

cinétique des gaz. Méthode de William Thomson fondée sur les phénomènes électriques. La méthode de De Heen est fondée sur l'étude des phénomènes capillaires et conduit à des résultats assez concordants avec ceux obtenus par les autres méthodes.

De Locht (*L.*). — Le pantéléphone. (A, 136-138).

Gilbert (*Ph.*). — Note sur la formule d'addition dans les fonctions elliptiques. (B, 87-90).

Développement de l'idée suivante : Le théorème de Hermite sur la décomposition en fractions semi-rationnelles des fonctions doublement périodiques méromorphes donne immédiatement

$$\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{sn}^2 z - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{1}{2\,\mathrm{D}\operatorname{sn} a}\left[\frac{1}{\operatorname{sn}(z+a)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(z-a)}\right],$$

relation d'où il est facile de tirer le théorème de l'addition.

De Salvert. — Note sur l'expression du rayon de courbure de la section normale d'une surface. (B, 91-96).

Mansion (*P.*). — Sur le même sujet. (A, 55-57).

Valeur du rayon de courbure d'une ligne tracée sur une surface dont l'équation est sous forme implicite $\varphi(z, y, z) = 0$.

Mansion (*P.*). — Toute équation algébrique a une racine. (B, 99-124).

Démonstration de R. Argand, appelée souvent démonstration de Cauchy et quelquefois de Legendre, rendue rigoureuse par Lipschitz (*Grundlagen der Analysis*, I, §§ 61-66). L'auteur a simplifié et complété l'exposé de Lipschitz et, en particulier, l'a dégagé de toute considération géométrique.

Delsaux (*J.*). — Sur la loi de force de M. Clausius entre courants élémentaires. (B, 125-140).

L'auteur déduit de cette loi des conséquences, selon lui, vérifiables par l'expérience. Une expérience ancienne de Biot et Savart semble infirmer la loi de Clausius.

Gilbert (*Ph.*). — Note sur quelques intégrales définies. (B, 141-158).

Intégrales innombrables déduites de

$$\int_0^\infty \frac{a\cos xu}{a^2+u^2}\,du = \int_0^\infty \frac{u\sin xu}{a^2+u^2}\,du = \tfrac{1}{2}\pi e^{-ax}.$$

par l'application de méthodes connues et d'artifices spéciaux, élégants et susceptibles d'applications multiples.

Gilbert (*Ph.*). — Sur l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités des aiguilles d'une montre. (B, 139-142).

Solution de la question au moyen des principes exposés par l'auteur dans une Note antérieure sur les mouvements relatifs (*Ann. Soc. scient.*, t. III, p. 81).

Van Tricht. — La Météorologie et les stations météorologiques belges. (B, 193-259).

Résumé des principes de la Météorologie générale et données relatives à la Belgique.

Carnoy (*J.*). — Propriétés descriptives nouvelles des coniques. (B, 260-272).

Mansion (*P.*) et *Le Paige* (*C.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 60-62, 62-64).

Théorème fondamental : « Étant donnés cinq points d'une conique, on en prend quatre pour les sommets d'un quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta = 0$, et l'on mène, par le cinquième, deux droites quelconques $\varepsilon = 0$, $\xi = 0$. La droite $\eta = 0$, qui réunit les points $(\varepsilon\beta)$, $(\xi\alpha)$ et la droite $\theta = 0$, qui réunit les points $(\varepsilon\delta)$, $(\xi\gamma)$ forment avec les deux côtés opposés $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ du premier quadrilatère un second quadrilatère $\alpha\eta\gamma\theta = 0$, avec les deux autres côtés $\beta = 0$, $\delta = 0$ du premier quadrilatère, un troisième quadrilatère $\beta\theta\delta\eta = 0$. Les deux diagonales de ces nouveaux quadrilatères se coupent en quatre points dont l'un est $(\varepsilon\xi)$ et qui sont tous situés sur la conique. »

On déduit de là le théorème corrélatif et la construction d'une conique donnée par cinq points, quatre points et la tangente en l'un d'eux, trois points et les tangentes en deux d'entre eux, et les problèmes corrélatifs.

Gilbert (*Ph.*). — Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. (B, 273-276).

Mansion (*P.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 58-59).

La plupart des Traités de Calcul intégral contiennent le théorème suivant :

« Si $F(x, y, z) = 0$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = Z,$$

la fonction F peut se mettre sous la forme $f(u, v) = 0$, $u = \alpha$, $v = \beta$ étant les intégrales du système auxiliaire $dx : X = dy : Y = dz : Z$. On base cette dé-

monstration sur cette remarque : le déterminant fonctionnel

$$D = \frac{\delta(u, v, F)}{\delta(x, y, z)}$$

est nul et par conséquent F est une fonction de u, v seulement. M. Gilbert prouve sur un exemple très simple que cette proposition est inexacte; pour qu'elle fût vraie, il faudrait que D fût *identiquement* nul ». Or, au contraire, en général, D est nul, à cause de la relation $F = 0$. M. Mansion fait remarquer néanmoins que l'équation $F = 0$ peut se mettre sous la forme

$$\psi(x, y) f(u, v) = 0.$$

Perry. — Résumé d'une conférence sur l'observatoire de Stonyhurst. (B, 281-302).

Turquan (*L.-V.*). — Intégration d'un système particulier de deux équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. (B, 303-316).

Mansion (*P.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 65-75).

Le travail de M. Turquan contient une méthode d'intégration d'équations aux dérivées partielles du premier ordre entre deux variables dépendantes z et z_1, deux variables indépendantes x et y et les *trois* dérivées $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz_1}{dx}$, $\frac{dz_1}{dy}$. Le rapport contient le résumé d'une méthode plus générale de M. Turquan dans le cas où, dans les deux équations entrent les *quatre* dérivées $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz_1}{dx}$, $\frac{dz_1}{dy}$, un essai d'exposition de cette méthode par le rapporteur, au moyen des idées de Cauchy. Le rapporteur a trouvé ultérieurement des erreurs de calcul et de raisonnement dans cette partie de son Rapport et probablement il y a une erreur aussi dans le Mémoire de M. Turquan.

Tome V; 1880-1881 (publié en 1881).

Mansion (*P.*). — Rectification. (A, 50-52).

Exposé d'un essai d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, à deux variables dépendantes et deux variables indépendantes donné dans le t. IV, p. 65-75, avec une erreur de raisonnement et une erreur de calcul.

Gilbert (*P.*). — Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (B, 1-16).

Mansion (*P.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 52-57).

La partie essentielle de cet important Mémoire a paru dans les *Comptes rendus*, t. XCI, p. 541-544, 613-616, et est analysée dans le *Bulletin*, 2e série, t. IV, p. 238. L'erreur de Jacobi et de ses continuateurs vient de ce qu'ils ont confondu des équations avec des identités. L'exposé de M. Gilbert, plus simple que celui d'aucun de ses devanciers, est en même temps rigoureux.

Mansion (*P.*). — Notes sur les équations aux dérivées partielles. (B, 17-33).

Gilbert (*Ph.*). — Rapport. (A, 58-64).

L'auteur montre que la méthode de Cauchy permet d'établir rigoureusement la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles; puis il intègre, dans tous les cas, l'équation des surfaces réglées, au moyen d'équations linéaires, sujet traité antérieurement par lui dans le cas principal (*Messenger of Mathematics*, 2e série, t. VI, p. 45-48, 1876).

D'Esclaibes. — Nouvelle démonstration d'un théorème relatif aux courbes du second genre. (B, 34-36).

Démonstration simple du théorème suivant : « Les coordonnées des points d'une courbe d'ordre n qui a $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-2$ points doubles peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre λ et de la racine carrée d'un polygone du sixième degré en λ.

D'Abbadie (*A.*). — Recherches sur la verticale. (B, 37-51).

Preuves expérimentales des variations de la verticale et conjectures sur la cause de ce mystérieux phénomène.

Belpaire (*Th.*). — Étude sur la marche des crues et sur l'influence des travaux de rectification, d'approfondissement et d'élargissement des cours d'eau. (B, 52-76).

Lagasse (*Ch.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 65-71).

Dans le cas du mouvement uniforme, l'auteur suppose que la hauteur de l'eau est une fonction entière du second degré du débit et une fonction du premier degré du temps. Il déduit de là la plupart des circonstances que présente la marche d'une crue. Il fait des hypothèses analogues dans le cas du mouvement varié.

Cousin (*L.*). — Conditions d'équilibre du wagon-grue de six tonnes. (B, 77-82).

D'Abbadie (*A.*). — Les désiderata de l'Astronomie. (B, 123-138).

En Mécanique céleste, il y a à chercher si l'introduction des fonctions elliptiques dans les calculs ne permettrait pas de mieux savoir l'influence des termes que l'on néglige dans les développements en série qu'on ne le fait maintenant. Dans les calculs astronomiques, il y a lieu d'introduire la division décimale qui abrège les calculs des $\frac{2}{7}$, comme l'a prouvé l'expérience. Airy a transformé en divisions décimales toutes les observations de la Lune faites avant lui avant de les réduire. Les premiers calculs d'une observation doivent être effectués au plus tôt et par celui qui l'a faite, afin de découvrir les grosses fautes d'observation et de pouvoir vérifier par l'observation des conclusions inattendues; faute d'avoir pris cette précaution, Lemonnier a observé Uranus, et Lalande, Neptune, sans s'en douter. Quand on donne une moyenne, il faut en même temps faire connaître les écarts maxima et donner l'erreur probable, bien entendu, si le nombre des observations permet d'appliquer la méthode des moindres carrés. Enfin, il y a une foule d'observations dont les grands observatoires ne peuvent se charger et que l'on peut faire sans grands frais.

Delsaux (*J.*). — Sur quelques propriétés des solénoïdes soumis à l'action d'un courant angulaire. (B, 184-228).

Gilbert (*Ph.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 71-73).

Au point de vue didactique, ce Mémoire prouve que l'on ne parle pas toujours exactement, dans les Traités les plus estimés, du point d'application des forces développées par les courants sur les solénoïdes ou les aimants. L'auteur lui-même a commis une faute de ce genre dans un précédent Mémoire. Il reprend ici toute la question et montre que, tant qu'il s'agit de courants indéfinis, l'action sur un solénoïde est la même que l'on parte de la loi d'Ampère ou de celle de Grassmann et Clausius. Ce n'est que pour un courant limité (non fermé), si l'on pouvait en produire, qu'il y aurait une différence dans les effets, selon que l'une ou l'autre de ces lois serait vraie.

Mansion (*P.*). — Sur l'évaluation approchée des aires planes. (B, 231-290).

Déjà analysé dans le *Bulletin*, 2e série, t, VI, 2e Partie, p. 193-195, comme supplément de *Mathesis*, t. I.

De Salvert. — Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces. (B, 291-473).

Le Paige (*C.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 63-65).

Voici, d'après une Note inédite de l'auteur, une analyse de ce Mémoire.

« Frappé des difficultés de calcul que fait naître en général l'application des formules classiques relatives à la courbure des surfaces, par suite du rôle exceptionnel joué par la variable par rapport à laquelle on suppose à l'avance résolue l'équation de la surface, l'auteur s'est proposé de reprendre en entier l'ensemble de cette théorie, en traitant constamment les trois variables sur le

même pied, de façon, d'une part, à obtenir des formules applicables dans tous les cas, lors même que l'équation ne pourrait être résolue par rapport à aucune des variables, ou que le calcul des dérivées p, q, r, s, t présenterait des difficultés trop grandes, et, d'autre part, à profiter de tous les avantages que la symétrie constamment observée entre des variables similaires offre, pour la commodité, la rapidité et la sûreté des calculs, à l'analyste qui s'en est fait une règle au début de son travail. C'est le développement étendu à toute la théorie et l'application à plusieurs questions importantes, qu'il est impossible ou beaucoup plus difficile d'aborder sans cela, de la méthode indiquée par Hesse dans ses *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes* (*voir* XXe, XXIe et XXIIe leçon), mais limitée par lui à un ou deux points seulement de la théorie et présentée sans application à aucune question qui en fasse ressortir l'utilité. »

Ce travail est divisé en cinq Chapitres ou Paragraphes.

I. Dans le premier, après avoir adopté une notation différentielle spéciale (dont nous ne ferons pas usage dans cette analyse), ainsi que la notation connue des *paramètres différentiels de Lamé*, à savoir les symboles :

$$\Delta_1\varphi = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}, \quad \Delta_2\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

l'auteur établit tout d'abord, une fois de plus, la formule qui donne l'expression du rayon de courbure d'une section normale [formule déjà donnée avant Hesse par l'abbé Moigno dans ses *Leçons de Calcul différentiel et intégral* (t. II, § 186, p. 350)], et dont il déduit tout le reste de la théorie.

II. Dans le second paragraphe, l'auteur tire en outre de cette dernière formule, par l'application normale des règles classiques relatives aux maxima et minima, la détermination des rayons de courbure principaux et des sections principales, seule question (avec la précédente) traitée par Hesse dans le travail cité. Mais, n'ayant pas connaissance de ce dernier travail, au moment où il écrivait son Mémoire, la diversité de la méthode qu'il emploie, le conduit pour la détermination des sections principales à un système d'équations d'une forme plus simple que celui de Hesse, bien qu'équivalente, comme il le montre ensuite, et qui est le suivant :

a, b, c, cosinus directeurs de la tangente à une section principale; R, rayon de courbure principal correspondant; λ, μ, ν, cosinus directeurs de la normale à la surface proposée $\varphi(x, y, z) = 0$, c'est-à-dire les expressions

$$\lambda = \frac{1}{\Delta_1\varphi}\frac{d\varphi}{dx}, \quad \mu = \frac{1}{\Delta_1\varphi}\frac{d\varphi}{dy}, \quad \nu = \frac{1}{\Delta_1\varphi}\frac{d\varphi}{dz}.$$

Les trois cosinus demandés a, b, c vérifient les cinq équations suivantes :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

$$a\frac{d\varphi}{dx} + b\frac{d\varphi}{dy} + c\frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

$$a\frac{d\lambda}{dx} + b\frac{d\lambda}{dy} + c\frac{d\lambda}{dz} = \frac{a}{R},$$

$$a\frac{d\mu}{dx} + b\frac{d\mu}{dy} + c\frac{d\mu}{dz} = \frac{b}{R},$$

$$a\frac{d\nu}{dx} + b\frac{d\nu}{dy} + c\frac{d\nu}{dz} = \frac{c}{R},$$

dont les trois dernières se réduisent à une seule, en tenant compte des deux premières. De ces équations, l'auteur déduit ensuite la condition de perpendicularité des deux sections principales, puis la formule classique

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'}\cos^2\theta + \frac{1}{R''}\sin^2\theta,$$

et enfin l'expression des coefficients H et K de l'équation du second degré $\frac{1}{R^2} - H\frac{1}{R} + K = 0$, qui fournit en grandeur et en signe les deux rayons de courbure principaux.

III. Dans le troisième Chapitre, la considération de la courbe *indicatrice* de Charles Dupin se présente naturellement, comme l'intersection d'une certaine surface du second ordre, ayant pour centre le point considéré (x, y, z), par le plan tangent à la surface proposée $\varphi(x, y, z) = 0$, en ce même point. Cette surface *indicatrice*, dont l'équation est

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(X-x)^2 + \frac{d^2\varphi}{dy^2}(Y-y)^2 + \frac{d^2\varphi}{dz^2}(Z-z)^2 + 2\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}(Y-y)(Z-z)$$
$$+ 2\frac{d^2\varphi}{dz\,dx}(Z-z)(X-x) + 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}(X-x)(Y-y) = \pm 1,$$

doit être regardée comme jouant dans la théorie de la courbure des surfaces un rôle analogue à celui du cercle osculateur dans l'étude des courbures d'une courbe quelconque, en ce qu'elle offre, en un certain point nettement défini, une représentation exacte de la courbure de la surface proposée au point considéré. En second lieu, elle fournit également, entre autres propriétés intéressantes, une interprétation géométrique remarquable du paramètre différentiel du second ordre $\Delta_2\varphi$ de Lamé, consistant en ce que (si la surface indicatrice est un ellipsoïde) « cette quantité est la somme des inverses des trois axes de la surface indicatrice ». Il n'y aurait que quelques mots à changer à cet énoncé si la surface indicatrice était un des deux hyperboloïdes.

IV. Le quatrième Chapitre présente une application intéressante des formules et des théories exposées précédemment au *système triple orthogonal de surfaces*. Après avoir démontré tout d'abord, par un procédé plus rapide que celui de *Hesse*, le célèbre théorème de *Charles Dupin*, l'auteur en déduit très facilement la notation des coordonnées curvilignes, introduite en analyse par *Lamé*, et l'expression si simple donnée par lui à l'aide de ce précieux instrument analytique des six courbures principales du système orthogonal, à savoir (φ, ψ et ϖ désignant les trois coordonnées curvilignes) les expressions

$$\frac{1}{R_1} = \Delta_1\varphi\frac{d.l\Delta_1\psi}{d\varphi}, \quad \frac{1}{R_1'} = \Delta_1\psi\frac{d.l\Delta_1\varpi}{d\psi}, \quad \frac{1}{R_1''} = \Delta_1\varpi\frac{d.l\Delta_1\varphi}{d\varpi}.$$
$$\frac{1}{R_2} = \Delta_1\varphi\frac{d.l\Delta_1\varpi}{d\varphi}, \quad \frac{1}{R_2'} = \Delta_1\psi\frac{d.l\Delta_1\varphi}{d\psi}, \quad \frac{1}{R_2''} = \Delta_1\varpi\frac{d.l\Delta_1\psi}{d\varpi}.$$

Puis, allant plus loin, l'auteur établit de même avec facilité les relations intéressantes trouvées par Lamé entre ces six courbures et formulées par lui en théorèmes, mais qu'il démontre par des calculs compliqués et fastidieux, qui ont sans doute seuls empêché jusqu'ici l'introduction dans l'enseignement de

ces propriétés remarquables. Ne pouvant citer ici tous ces théorèmes, nous en ferons comprendre l'intérêt en nous bornant à rapporter seulement ceux qui consistent en des relations finies entre les six courbures, et dans le cas particulier où les trois surfaces qui composent le système orthogonal sont toutes trois isothermes. *Lamé* établit, pour ce cas, la seule formule, si simple et si élégante,

$$\frac{1}{R_1 R'_1 R''_1} + \frac{1}{R_2 R'_2 R''_2} = 0.$$

L'auteur du Mémoire est conduit, dans le même cas, aux trois relations du même genre :

$$\frac{1}{R''_1 R_1} + \frac{1}{R''_2 R_2} = \frac{1}{R''_2 R_1}, \quad \frac{1}{R_1 R'_1} + \frac{1}{R_2 R'_2} = \frac{1}{R_2 R'_1}, \quad \frac{1}{R'_1 R''_1} + \frac{1}{R'_2 R''_2} = \frac{1}{R'_2 R''_1},$$

qui, à la vérité, se réduisent à deux seulement, dont l'une est précisément la précédente signalée par Lamé, et l'autre est la suivante (entièrement nouvelle par conséquent) :

$$\frac{1}{R'_1 R''_1} + \frac{1}{R''_1 R_1} + \frac{1}{R_1 R'_1} + \frac{1}{R'_2 R''_2} + \frac{1}{R''_2 R_2} + \frac{1}{R_2 R'_2} = \frac{1}{R'_2 R''_1} + \frac{1}{R''_2 R_1} + \frac{1}{R_2 R'_1}.$$

V. Le cinquième et dernier Chapitre enfin est en entier consacré à la recherche des ombilics, problème dont la solution s'obtient en joignant à l'équation de la surface les trois équations

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{\Delta_1 \varphi}{R},$$

dans lesquelles, R étant le rayon de courbure de toutes les sections normales à l'ombilic, a, b, c, a', b', c' désignent respectivement, pour abréger, les quantités suivantes :

$$a = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} - 2\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}, \quad a' = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2,$$

$$b = \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} - 2\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dz\,dx}, \quad b' = \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2,$$

$$c = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}, \quad c' = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2.$$

Faisant appel successivement à tous les ordres de considérations qui peuvent servir à cette recherche, l'auteur obtient les trois équations qui précèdent de quatre manières différentes, savoir : d'abord à l'aide de la considération propre de la surface *indicatrice*, en second lieu en exprimant que la grandeur du rayon de courbure est indépendante de la direction de la section normale, puis en troisième lieu en exprimant de même que les sections principales sont indéterminées, et enfin que les deux rayons de courbure principaux sont égaux entre eux, ou, ce qui est la même chose, que le discriminant de l'équation du second degré qui les fournit est égal à zéro. Cette dernière méthode consiste, à proprement parler, à démontrer l'identité

$$a'b'c'\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 \Delta_1^6 \varphi\,(H^2 - 4K)$$

$$= \left(a'\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 (bc' - cb')^2 + \left(b'\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 (ca' - ac')^2 + \left(c'\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 (ab' - ba')^2.$$

que la symétrie complète des formules permet d'établir sans difficulté, bien que le dévelloppement du second membre contienne à lui seul en réalité plus de sept cents termes.

Comme preuve de l'avantage de sa méthode et comme exemple de l'utilité de ses formules, l'auteur applique, en terminant, ces derniers résultats à la recherche des ombilics de *la surface des ondes,* problème déjà résolu géométriquement par *Mannheim*, à l'aide d'élégantes constructions graphiques, mais qui n'avait pu jusqu'ici être abordé par l'analyse, l'équation de la surface étant du quatrième degré, et les expressions des dérivées p, q, r, s, t, qui figurent dans la théorie classique de la courbure, devenant par suite, en raison de la présence des radicaux, d'une complication extrême. Avec sa méthode, au contraire, l'auteur trouve facilement les coordonnées des ombilics de cette surface, et montre qu'elles correspondent bien aux points fournis par les ingénieuses constructions de *Mannheim*. Le succès complet de la méthode dans une question intéressante absolument rebelle aux anciennes formules paraîtra sans doute une preuve irréfutable de l'utilité de la nouvelle théorie et du secours qu'elle apporte aux géomètres pour l'étude des propriétés des surfaces.

Tome VI; 1881-1883 (publié en 1882).

Mansion (*P.*). — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. (A, 56-57).

La réduction de ces équations à une forme homogène permet d'éviter les difficultés signalées par M. Gilbert. (Cette remarque n'est pas exacte.)

Perry. — Sur le prochain passage de Vénus. (A, 103-109).

Choix des stations; méthodes diverses d'observation, etc.

Delsaux (*J.*). — Sur une propriété de la diffraction des ondes planes dans les systèmes de petites ouvertures. (B, 1-8).

Généralisation de propriétés établies dans un cas particulier. (*Voir* Billet, *Optique physique*, t. I, p. 224.)

Delsaux (*J.*). — Sur la théorie de l'arc-en-ciel. (B, 8-16).

Simplification de la théorie de M. Airy.

Pepin. — Sur le problème de former un carré en ajoutant un cube à un nombre donné. (B, 86-100).

Généralisation de théorèmes dus à M. de Jonquières (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2e série, t. XVII, p. 374). Nous donnerons deux exemples seulement : I. L'équation $x^3 + a = y^2$ est impossible en nombres entiers si $a = c^3 - 4^\alpha b^2$, b et c désignant deux nombres impairs, positifs ou négatifs, dont le premier n'admet aucun diviseur de la forme $4l + 3$, et dont le second est de la forme $8l + 1$, $8l + 3$, $8l + 7$, si $d = 1$, $8l + 3$, $8l + 5$, $8l + 7$, si α est > 1. II. Si b est un nombre premier avec 10 ne renfermant aucun facteur de la forme

$20l + 11$ et si $a = 32(2d+1)^2 - 5b^2$, l'équation $x^2 + a = y^2$ n'a pas de solutions en nombres entiers.

Van Tricht. — Description d'un nouveau météorographe électrique. (B, 153-227).

Mansion (*P.*). — Note sur les cubatures approchées. (B, 228-232).

Démonstration géométrique élémentaire de deux formules de Woolley et d'une formule nouvelle ; limite de l'erreur commise.

De Lisleferme (*H.*). — Note d'analyse géométrique d'après Rossin, ingénieur de la Marine française. (B, 242-246).

Mansion (*P.*). — Rapport sur cette Note. (A, 49-51).

Toute aire plane peut être remplacée approximativement par le polygone inscrit ou une somme de trapèzes; chacun de ceux-ci, par deux rectangles de hauteurs moitié moindres et ayant pour base celle du trapèze. L'aire d'un rectangle peut être représentée par l'ordonnée d'une droite passant par l'origine; celles d'une somme de rectangles par les ordonnées des sommets d'un polygone facile à construire. Application aux centres de gravité et aux moments d'inertie.

Gilbert (*Ph.*). — Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. (B, 270-374) [1].

Le Mémoire a pour objet l'étude du mouvement des appareils gyroscopiques par rapport à un système de comparaison animé d'un mouvement uniforme de rotation, au moyen d'une équation donnée par Bour pour étendre aux mouvements relatifs les formules dynamiques de Lagrange. L'équation de Bour est démontrée en quelques lignes : l'interprétation géométrique des divers termes qui y figurent permet d'obtenir dans chaque problème, presque sans calcul, les équations différentielles du mouvement en fonction des variables les plus convenables, sans aucune transformation de coordonnées.

Cette méthode s'applique d'abord à la question de l'équilibre et du mouvement relatif d'un anneau, portant une petite masse additionnelle, et mobile autour d'un axe horizontal entraîné d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical.

Les équations obtenues font voir que son mouvement se ramène à celui d'un

---

[1] La fin de ce Mémoire a paru dans le tome suivant des *Annales*, B, 11-110. *Voir* dans les *Comptes rendus* de Paris, 17 juillet 1882, un Rapport sur ce travail par M. C. Jordan.

point pesant sur un cercle tournant uniformément autour d'un diamètre vertical. Ce dernier mouvement constitue un type simple, auquel on ramènera d'autres mouvements plus compliqués, en sorte qu'ayant poussé jusqu'au bout la solution du premier au moyen des fonctions elliptiques, il suffira de simples substitutions dans les formules pour obtenir également la solution complète des problèmes gyroscopiques.

Le calcul montre que, si la vitesse d'entraînement est faible, il n'existe pour le point pesant que deux positions d'équilibre, situées sur l'axe de rotation. Pour une vitesse plus grande, on aura quatre positions d'équilibre; les deux situées en dehors de la verticale répondent à l'équilibre stable. Si, à l'instant initial, la vitesse relative étant nulle, le point mobile n'occupe pas une de ces positions d'équilibre, il exécutera autour de la position d'équilibre stable la plus voisine une série d'oscillations périodiques, dont la loi s'exprime explicitement par les fonctions elliptiques. Donc, dans le second des deux cas ci-dessus, il pourra osciller en restant toujours du même côté de la verticale.

Un gyroscope étant composé d'un disque ou tore D auquel on a donné une rotation n autour de son axe de figure, d'un anneau intérieur I et d'un anneau extérieur E qui est maintenu en rotation uniforme ω autour de son diamètre ZZ', il existe *deux* ou *quatre* positions d'équilibre relatif pour l'axe du disque, suivant la vitesse rotatoire imprimée au tore; si cette vitesse est nulle, l'axe ne restera pas pour cela en équilibre, à moins que les moments d'inertie du tore et de l'anneau I ne vérifient une relation simple, auquel cas l'équilibre aura lieu sous toute inclinaison de l'axe de figure sur l'axe ZZ'. Hors des cas d'équilibre, l'oscillation de l'axe du tore par rapport à ZZ' suivra les mêmes lois que celle du point pesant sur un cercle tournant autour d'un diamètre vertical, et sera représentée par les formules du problème analysé plus haut. Quant à la rotation du disque, son expression dépendra d'intégrales de la forme

$$\int \frac{\alpha + \beta \operatorname{sn} u}{\gamma + \delta \operatorname{sn} u}\, du,$$

qui se ramènent facilement aux fonctions de Jacobi. Toutes les variables s'expriment donc en fonction explicite du temps, mais la forme finale de ces expressions est différente suivant les relations qui existent entre les vitesses n, ω, l'angle ζ_0 compris, à l'instant initial, entre l'axe du tore et l'axe ZZ', et les moments d'inertie du tore et des anneaux; il y a sept cas distincts. Dans le cas particulier où la vitesse initiale absolue donne une composante nulle suivant l'axe du tore, cet axe oscille régulièrement de part et d'autre d'une perpendiculaire à ZZ', et le mouvement de rotation du tore autour de son axe se réduit aussi à un mouvement oscillatoire.

Le *polytrope* de Sire, appareil destiné à imiter les effets que produit la rotation terrestre sur les corps tournant rapidement à sa surface, fournit une autre application de la méthode. On en déduit les équations rigoureuses du mouvement du tore. Lorsque le tore et les anneaux sont libres, il peut y avoir plusieurs positions d'équilibre relatif pour l'axe du tore, et le cas du mouvement se ramène aux formules de Lottner (*Journal de Borchardt*, t. 54, p. 197). Lorsque l'axe de figure est guidé dans un plan fixe par rapport au méridien tournant, et que la rotation initiale n du tore est assez petite, il existe pour cet axe une position d'équilibre stable ne coïncidant pas avec la projection OS, sur le plan directeur, de la parallèle à l'axe de rotation du méridien. Ce résultat curieux est en contradiction avec ce que nous apprend le principe *de la*

tendance des axes de rotation au parallélisme, principe qui ne s'applique qu'au cas où la rotation du tore est très rapide. Enfin, les équations différentielles du mouvement font voir que l'axe du tore oscille, par rapport à la projection OS, comme un pendule simple dont le plan d'oscillation tournerait autour de la verticale avec une vitesse constante. Cette vitesse et la longueur du pendule sont des fonctions simples des rotations du tore et du méridien, des moments d'inertie du tore et des anneaux, etc. Les formules du premier problème donnent donc encore ici, en fonction explicite du temps, l'inclinaison de l'axe du tore sur une direction déterminée, et les autres éléments du problème dépendent également des fonctions elliptiques.

La seconde Partie traite les problèmes plus nouveaux dans lesquels la pesanteur intervient en même temps que la rotation du système de comparaison pour dévier l'axe de figure des corps tournants, mais ici les oscillations de l'axe se rattachent à un nouveau type, le mouvement d'un point pesant sur un cercle vertical qui tourne uniformément autour d'une verticale ne passant pas par son centre. L'équation du mouvement du point et les positions d'équilibre se tirent immédiatement de l'équation de Bour par la méthode exposée par l'auteur. La détermination de ces positions, qui sont au nombre de *deux* ou de *quatre,* est ramenée à la construction d'une droite passant par un point donné, et telle que le segment intercepté sur elle par deux droites rectangulaires ait une longueur donnée. Les positions d'équilibre stable sont définies au moyen de l'équation du mouvement, dont l'intégration dépend encore des fonctions elliptiques.

Le curieux *pendule gyroscopique* de Sire est formé d'une tige verticale terminée par une chape, laquelle porte un tore mobile dont l'axe est perpendiculaire à la tige; tout l'appareil peut osciller autour d'une horizontale perpendiculaire à l'axe du tore. Cet appareil peut être étudié d'une manière complète et rigoureuse par la méthode de l'auteur, quelles que soient la masse de la chape et la vitesse de rotation initiale du tore. Lorsque celle-ci n'est pas trop considérable, le calcul montre que le pendule admet quatre positions d'équilibre relatif, déterminées par la même construction que celles du problème précédent, et cela donne l'explication d'un fait resté jusqu'ici inexpliqué, que Sire avait rencontré dans ses expériences. Au contraire, si le tore a une rotation très rapide, la construction citée conduit aux résultats bien connus, et donne l'explication des phénomènes curieux présentés par cet appareil.

En dehors des positions d'équilibre de la tige, celle-ci exécutera des oscillations dont la loi est la même que celle du mouvement du point pesant, dans le problème précédent : le mouvement du pendule gyroscopique est donc ramené à un problème résolu. Lorsqu'on peut négliger le carré de la vitesse angulaire du support, la loi du mouvement se ramène à celle du pendule simple. L'étude de quelques cas particuliers termine cette seconde Partie du Mémoire.

Dans la troisième Partie, la même méthode est appliquée aux mouvements gyroscopiques à la surface de la Terre, ou en général d'une planète douée d'une rotation uniforme autour d'un axe. Lorsqu'on suppose quelconque cette vitesse ω, mais que l'on regarde la pesanteur comme une constante en grandeur et en direction pour tous les points du corps, on obtient les équations différentielles du mouvement sous une forme très simple qui est celle-ci :

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial(\mathrm{T}+\mathrm{V})}{\partial q'} - \frac{\partial(\mathrm{T}+\mathrm{V})}{\partial q} = \mathrm{M}g\,\frac{\partial\rho\cos\overline{\rho g}}{\partial q}.$$

T est la demi-force vive relative du système mobile, V le produit géométrique de l'axe de rotation de la planète par l'axe du couple des quantités de mouvement relatives du corps, q l'une quelconque des variables qui déterminent la position du corps, M sa masse, ρ le rayon vecteur du centre de gravité du corps et $\overline{\rho g}$ l'angle compris entre ce rayon vecteur et la direction de la pesanteur.

Cette équation se simplifie encore lorsqu'on suppose, ce qui est le cas dans les expériences faites à la surface de la Terre avec le gyroscope de Foucault, que le centre de gravité du corps coïncide avec l'origine O du système de comparaison pendant toute la durée du mouvement ($\rho = 0$). On n'a plus alors à calculer que les quantités T et V, et les équations différentielles du mouvement du tore et de ses anneaux peuvent s'écrire immédiatement.

Dans les §§ XII et suivants, on étudie par cette voie le mouvement apparent du gyroscope en tenant compte des termes de l'ordre du carré de ω, dans les différents cas considérés par les géomètres (axe du tore entièrement libre, guidé dans un plan directeur, sur un cône, etc.). Seulement, l'hypothèse simplificatrice relative à la pesanteur n'étant pas la même que celle adoptée par Lottner et Bour, les équations diffèrent par des termes de l'ordre de ω^2, ce qui donne l'occasion d'intégrer par les fonctions elliptiques certaines équations différentielles qui n'avaient pas encore été traitées. Lorsque l'axe du tore est entièrement libre, et que les masses des anneaux sont négligeables, on obtient ainsi en fonction explicite du temps les valeurs des angles θ, ψ, φ dont dépend la position du tore et de ses anneaux.

Lorsque l'axe du tore est assujetti à se mouvoir dans un plan fixe par rapport à la planète, ou sur la surface d'un cône fixe, il est facile de déterminer les positions d'équilibre relatif de l'axe du tore; on est ramené ainsi aux résultats signalés par Foucault. Si cet équilibre n'a pas lieu, c'est encore le mouvement d'un point pesant sur un cercle tournant autour d'un diamètre vertical (premier problème) qui représente le type auquel se ramène l'oscillation de l'axe du tore; une simple application des formules de ce problème donnera donc la loi exacte de cette oscillation. On trouve, entre autres résultats curieux, que si la rotation de la planète était assez rapide et celle du tore assez lente, son axe, maintenu dans un plan horizontal, oscillerait en restant toujours du même côté du plan méridien.

La quatrième Partie du Mémoire traite des cas où, dans le mouvement apparent d'un système gyroscopique à la surface de la Terre, la pesanteur intervient avec la rotation de la planète pour dévier l'axe du tore. Le pendule de Sire se prête à une étude de ce genre (§ XVII) : on suppose que l'axe horizontal de suspension du pendule soit fixe par rapport à la Terre, mais peut être orienté dans un azimut quelconque. Le pendule ayant une inclinaison quelconque et le tore une rotation initiale donnée, les formules du mouvement se tirent immédiatement de l'équation (A). On en déduit d'abord cette conclusion, que la position d'équilibre stable de la tige du pendule fera un petit angle avec la verticale, dans un sens ou dans l'autre suivant le sens de la rotation imprimée au tore, la valeur de cet angle dépendant d'ailleurs de l'azimut du plan d'oscillation. Si l'on pouvait imprimer au tore une rotation assez rapide, cet appareil fournirait donc un signe sensible du mouvement de la Terre.

Écarté de cette position d'équilibre, le tore-pendule exécute des oscillations dont la loi reproduit encore celle du mouvement d'un point pesant sur un cercle qui tourne autour d'une sécante verticale. Les formules donnent tous les

éléments de ce pendule de comparaison en fonction des données du pendule gyroscopique.

La déviation du pendule étant trop peu appréciable dans le dispositif décrit ci-dessus, l'auteur a soumis au calcul un appareil plus sensible, qu'il a nommé *barogyroscope*. Une chape en acier est supportée par deux couteaux placés aux extrémités de son diamètre horizontal. Elle porte à son intérieur un tore ayant pour axe un second diamètre perpendiculaire au premier. La chape porte un prolongement inférieur de cet axe, une aiguille le long de laquelle on peut faire monter ou descendre un curseur. Le centre de gravité du tore étant sensiblement sur la ligne des couteaux, le poids du curseur maintient la tige verticale quand le tore est en repos.

Les équations rigoureuses du mouvement apparent de ce système, fournies par l'équation (A), conduisent à ce résultat, que l'aiguille est en équilibre lorsqu'elle fait avec la verticale un angle E donné par la formule

$$\operatorname{tang} E = \frac{C\omega n \cos L \cos \alpha}{g\mu\delta - C\omega n \sin L},$$

n étant la vitesse initiale du tore, L la latitude du lieu, α l'angle du plan d'oscillation de l'aiguille avec le méridien, μ la masse du curseur, δ sa distance à la ligne des couteaux, C le moment d'inertie du tore par rapport à son axe.

Il en résulte que, pour $\alpha = 0$, l'aiguille dévie vers le nord ou vers le sud suivant le sens de la rotation n, tandis que, quand le plan d'oscillation est normal au méridien, toute déviation disparaît. L'expérience a confirmé complètement ces déductions théoriques. « Ce nouvel appareil, dit Jordan, peut remplacer le gyroscope de Foucault pour la démonstration de la rotation terrestre. Il a d'ailleurs sur ce dernier l'avantage d'être beaucoup plus facile à construire. » Les formules qui représentent les oscillations de l'aiguille fournissent les indications nécessaires pour déterminer les formes et les dimensions les plus convenables de l'appareil et assurer au phénomène tout son développement.

Les derniers Chapitres de ce Mémoire donnent les équations du mouvement d'une toupie, en tenant compte de la rotation de la Terre : c'est un sujet sur lequel Foucault paraît avoir fait quelques expériences. Les équations différentielles sont faciles à établir par l'équation (A), mais leur intégration offre de grandes difficultés, sauf dans quelques cas particuliers, mais l'analyse justifie le fait annoncé par Foucault, savoir, que l'axe de la toupie ne peut garder une direction invariable que si cette direction est dans le plan du méridien, et fait un très petit angle avec la verticale, vers le nord ou vers le sud, suivant le sens de la rotation de la toupie.

Tome VII; 1882-1883 (publié en 1883).

Gilbert (*Ph.*). — Sur une transformation des équations de l'Hydrodynamique. (B, 1-10).

De Tilly. — Rapport. (A, 49).

Les équations transformées ont une forme qui rappelle celle des équations

canoniques de Lagrange. Les voici :

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \xi'} = \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta'} - \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\partial \Omega}{\partial \eta},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \zeta'} - \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}.$$

Dans ces équations, $\Omega = U - P$; U est la fonction dont les dérivées partielles par rapport à x, y, z sont les trois composantes de la force extérieure, rapportée à l'unité de masse, agissant sur le point (x, y, z); p est la pression, ρ la densité, u, v, w les composantes de la vitesse en ce point (x, y, z), à l'époque dt; $P = \int \frac{dp}{\rho}$; $2T = u^2 + v^2 + w^2$. Enfin, x, y, z sont des fonctions de nouvelles variables ξ, η, ζ, dont les dérivées sont ξ', η', t', par rapport à t, pour une molécule fluide déterminée.

Les équations (1) permettent de traiter tout problème d'Hydrodynamique avec le système de coordonnées le plus convenable. L'auteur l'emploie pour retrouver les équations données par Clebsch (*Journal de Crelle*, t. 54, p. 293).

Gilbert (*Ph.*). — Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. (B, 11-110).

Troisième et quatrième Partie du Mémoire analysé plus haut.

Sparre (Comte *de*). — Sur le pendule de Foucault. (B, 111-126).

Gilbert (*Ph.*). — Rapport. (A, 51-52).

Résumé de la dissertation de l'auteur, relative au mouvement du pendule de Foucault, lorsque l'on néglige les termes de l'ordre du carré de la vitesse angulaire ω de la Terre; complément de cette dissertation, par l'examen de l'influence des termes en $\omega^2 t$, t étant le temps.

M. Gilbert fait observer, d'après Puiseux, que le problème traité dans ce dernier cas est purement idéal, parce que l'attraction de la Lune et du Soleil et d'autres causes encore introduisent des forces perturbatrices de l'ordre du carré ω^2 de la rotation terrestre, forces dont il faudrait tenir compte, pour traiter le problème complètement.

Jordan (*C.*). — Sur l'ordre d'un système d'équations différentielles. (B, 127-130).

Démonstration directe d'un théorème de Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 64) sur la matière.

De Salvert. — Mémoire sur les ombilics coniques. (B, 143-248[2]).

Jordan (*C.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 49-50).

Ce Mémoire est la suite naturelle du *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces*, et forme comme le premier Chapitre d'une théorie de la courbure

aux points singuliers des surfaces. La méthode préconisée dans le premier, et qui consiste à traiter constamment dans le calcul les trois variables x, y, z sur le pied d'égalité, est ici absolument nécessaire; car il est impossible de traiter la question au moyen des dérivées habituelles $p, q, r, s, t, \ldots$, puisque pour ces points particuliers elles deviennent toutes à la fois indéterminées.

L'auteur étudie les courbures des différentes sections planes que l'on peut mener dans une surface en un de ses points singuliers, et il étend la notion de l'ombilic à ces mêmes points, cette notion étant caractérisée essentiellement par la similitude complète, au point de vue des courbures en l'un de ces points de toutes les sections planes que l'on peut mener par une même droite déterminée, passant par ce point. L'analogie du rôle joué par cette droite dans la question actuelle avec celui de la normale pour les points ordinaires montre que cette droite doit être forcément l'axe du cône tangent; et le même procédé qui a fourni dans le premier cas la formule des sections normales conduit aussitôt avec la même facilité à la formule analogue que nous allons rapporter.

Pour l'écrire, ainsi que les formules suivantes, en raison de la très grande multiplicité des termes, il est nécessaire d'adopter une notation abrégée, à laquelle l'auteur avait déjà eu recours dans son premier Mémoire, et qui consiste à supprimer partout, haut et bas, dans les symboles différentiels, la caractéristique d, en en conservant seulement les exposants, et à faire usage en outre de la notation très usitée des puissances symboliques en les signalant à l'attention dans les calculs par l'emploi de doubles parenthèses. Avec ces conventions, x', y', z' désignant de nouvelles coordonnées rectilignes parallèles aux anciennes, et ayant pour origine le point singulier considéré (x, y, z), pour lequel on a, par hypothèse,

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z) = 0, \quad \frac{\varphi}{x} = 0, \quad \frac{\varphi}{y} = 0, \quad \frac{\varphi}{z} = 0,$$

l'équation du cône tangent étant, comme l'on sait

$$\left(\left(x'\frac{\varphi}{x} + y'\frac{\varphi}{y} + z'\frac{\varphi}{z}\right)\right)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad F(x', y', z') = 0,$$

et, par conséquent, les cosinus directeurs p, q, r de l'axe du cône étant fournis par les trois équations

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1, \quad \frac{\frac{1}{2}\frac{dF}{dp}}{p} = \frac{\frac{1}{2}\frac{dF}{dq}}{q} = \frac{\frac{1}{2}\frac{dF}{dr}}{r} = F(p, q, r),$$

le rayon de courbure d'une section plane quelconque menée par l'axe du cône tangent et définie par les cosinus directeurs a, b, c de la génératrice du cône qui lui est tangente, sera donné par la formule

$$R = \pm \frac{3}{2} \frac{\left(a\frac{dF}{dp} + b\frac{dF}{dq} + c\frac{dF}{dr}\right)}{\left(\left(a\frac{\varphi}{x} + b\frac{\varphi}{y} + c\frac{\varphi}{z}\right)\right)^3 \sqrt{(qc - rb)^2 + (ra - pc)^2 + (pb - qa)^2}},$$

dont il est facile de saisir l'analogie avec la formule

$$R = \frac{\pm \Delta_1 \varphi}{\left(\left(a\frac{\varphi}{x} + b\frac{\varphi}{y} + c\frac{\varphi}{z}\right)\right)^2}.$$

donnée dans le Mémoire précédent pour les sections normales aux points ordinaires des surfaces.

Après avoir fait l'application de cette formule, à titre d'exemple, aux quatre points doubles de la *surface des ondes de Fresnel,* l'auteur passe ensuite à la recherche des conditions pour que le point singulier soit un *ombilic conique,* c'est-à-dire un point tel : 1° que le cône tangent soit de révolution ; 2° que les branches de courbe qui correspondent à ses diverses génératrices aient toutes la même courbure.

La première de ces deux conditions se traduisant, comme l'on sait, par les deux équations

$$(2)\qquad \frac{\varphi^2}{x^2} - \frac{\dfrac{\varphi^2}{zx}\,\dfrac{\varphi^2}{xy}}{\dfrac{\varphi^2}{yz}} = \frac{\varphi^2}{y^2} - \frac{\dfrac{\varphi^2}{xy}\,\dfrac{\varphi^2}{yz}}{\dfrac{\varphi^2}{zx}} = \frac{\varphi^2}{z^2} - \frac{\dfrac{\varphi^2}{yz}\,\dfrac{\varphi^2}{zx}}{\dfrac{\varphi^2}{z^2}};$$

la seconde est obtenue exactement par le même procédé de calcul, étendu à un ordre différentiel et à un degré de termes plus élevé, qui dans le Mémoire précédent avait déjà fourni la condition analogue pour la détermination des *ombilics sphériques,* ou ordinaires, seuls considérés dans tous les traités jusqu'ici. Ce procédé, dont l'idée caractéristique est l'extension à des équations *non linéaires* de la célèbre méthode *des multiplicateurs de Lagrange,* que l'on considère généralement comme applicable seulement à des équations linéaires, conduit avec une facilité remarquable, eu égard à la complication apparente des formules, pour la détermination des coordonnées d'un ombilic conique, et de la grandeur de son rayon de courbure R, à sept équations [équations (3)] extrêmement symétriques (données p. 202-203), complètement analogues à celles données antérieurement pour la détermination des ombilics sphériques.

Enfin, dans un dernier paragraphe, l'auteur se propose tout à la fois de fournir quelques exemples de l'utilité de ces formules, et d'en vérifier l'exactitude, en en faisant l'application à trois cas particuliers simples, et choisis de telle sorte que l'on puisse très aisément s'assurer par des considérations *a priori,* tout au moins indépendantes de sa théorie, de la justesse des résultats auxquels cette théorie aura conduit. Pour faire saisir la valeur de ce genre d'épreuves, nous nous contenterons de signaler seulement le dernier exemple, qui est le suivant.

Ayant remarqué qu'en vertu des équations (1), (2) et (3) il existe ainsi *douze* relations entre les coordonnées seules de tout ombilic conique, et par conséquent, si l'on élimine ses trois coordonnées entre ces douze équations, *neuf* conditions déterminées entre les coefficients d'une surface donnée, pour qu'elle admette un ou plusieurs ombilics coniques, l'auteur considère la surface du troisième ordre

$$(4)\qquad x + y + z = \frac{m(x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda yz + 2\mu zx + 2\nu xy)}{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta yz + 2\varepsilon zx + 2\eta xy},$$

dont l'équation renferme précisément neuf coefficients indéterminés α, β, γ, δ, ε, η, λ, μ, ν (m étant un paramètre linéaire donné), et se propose de déterminer ces neuf coefficients par les conditions nécessaires et suffisantes pour que la surface admette au moins un ombilic conique.

On arrive par le moyen des équations (2) et (3) aux neuf conditions

$$(5)\qquad \alpha = \beta = \gamma = g,\quad \delta = \varepsilon = \eta = h,\quad \lambda = \mu = \nu = k.$$

et, avec ces valeurs, la surface (4) présentera dès lors un ombilic conique à l'origine des coordonnées, quels que soient les trois coefficients arbitraires g, h, k, la valeur du rayon de courbure connues à toutes les sections planes relatives à cet ombilic étant, en vertu de la dernière équation (3),

$$(6) \qquad R = m\frac{k^{\frac{3}{2}}(1-2k)^{\frac{1}{2}}}{gh-k}.$$

Or rien n'est plus simple que de vérifier directement l'exactitude de ce résultat, car avec les valeurs (5), l'équation de la surface (4) pouvant se mettre sous la forme

$$x+y+z=\frac{m[(1-k)(x^2+y^2+z^2)+k(x+y+z)^2]}{(g-h)(x^2+y^2+z^2)+h(x+y+z)^2},$$

il est visible, eu égard à la forme connue de l'équation générale des surfaces de révolution, que cette surface est une surface de révolution autour de la bissectrice de l'angle trièdre des coordonnées positives, et présente dès lors à l'origine, qui en est un point singulier, les conditions caractéristiques de l'ombilic conique; et, de plus, si, après avoir déterminé sa méridienne, on en calcule directement le rayon de courbure en ce point, on retombe immédiatement sur la valeur (6), à laquelle nous ont conduit les formules de la théorie qui vient d'être exposée.

Cette théorie fournit donc bien sans incertitude, ni doute possible, tous les éléments nécessaires à la détermination des points remarquables, auxquels on propose d'attribuer le nom d'*ombilics coniques,* et qui, bien qu'offrant un genre de singularité assez élevé, peuvent être néanmoins, comme on vient de le voir, introduits à volonté dans toute surface dont l'équation présente au moins neuf coefficients indéterminés.

Delsaux (*J.*). — Sur la diffraction des ondes planes dans une ouverture circulaire. (B, 249-254).

Gilbert (*Ph.*). — Rapport. (A, 63-64).

Démonstration nouvelle très simple des résultats de Knochenbauer, sur la diffraction parallèle.

Biervliet (*A. Van*). — Note sur quelques propriétés générales des fonctions X_n. (B, 402-408).

Mansion (*P.*). — Rapport. (A, 68-69).

L'auteur prend pour définition de X_n la relation d'O. Rodrigues

$$X_n=\frac{1}{2^n}\,\frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

et en déduit diverses propriétés anciennes ou nouvelles, entre autres celles-ci :

$$\frac{d^p X_n}{dx^p} - x\frac{d^p X_{n-1}}{dx^p} = (p+n-1)\frac{d^{p-1} X_{n-1}}{dx^{p-1}},$$

$$x\frac{d^p X_n}{dx^p} - \frac{d^p X_{n-1}}{dx^p} = (n-p+1)\frac{d^{p-1} X_{n-1}}{dx^{p-1}}.$$

Braet (*G.*). — Note sur la construction et la stabilité des cheminées en maçonnerie. (B, 285-380).

Ward (*J.*). — Rapport. (A, 72-73).

Étude très détaillée d'un grand nombre de types particuliers. Conclusions : Les cheminées les plus stables sont celles dont les maçonneries ne travaillent que par compression. Le coefficient de stabilité dépasse souvent 2,70. Il y a avantage à donner aux cheminées tronconiques un piédestal prismatique.

Suttor (*E.*). — Sur une application de la statique graphique. (B, 409-416).

Cousin (*L.*). — Rapport. (A, 69-70).

Détermination simple, élégante et complète, par le tracé de lignes droites seulement, des moments fléchissants et, en particulier, de leur maximum absolu, d'une poutre que parcourent des essieux en nombre quelconque.

Teixeira (*G.*). — Sur la théorie des imaginaires. (B, 417-428). (Aussi *Mathesis,* III, Supplément).

Mansion (*P.*) et *Gilbert* (*Ph.*). — Rapports. (A, 59-63).

Exposé didactique des principes fondamentaux de la théorie des équivalences algébriques de module (i^2+1); développement des idées de Cauchy (*Ex. d'An. et de Phys. math.,* t. IV, 87-110).

Turquan (*L.-V.*). — Recherches sur l'intégration d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. (B, 429-436).

Mansion (*P.*). — Rapport. (A, 70-72).

Intégration de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre entre trois variables indépendantes x, y, z, et deux dépendantes u, v, dans quatre cas : 1° quand elles ne contiennent pas explicitement x, y, z, u, v; 2° quand elles contiennent seulement une des variables x, y ou z explicitement; 3° quand

elles sont de la forme

$$\varphi(x, u'_x, v'_x) + \psi(y, u'_y, v'_y) + \chi(z, u'_z, v'_z) = 0;$$

4° quand φ, ψ, χ sont linéaires en $u, v, u'_x, u'_y, u'_z, v'_x, v'_y, v'_z$.

Dutordoir (*H.*). — Toute équation algébrique a une racine; démonstration nouvelle. (B, 437-449).

Mansion (*P.*). — Rapport. (A, 52-58).

Si $\varphi(x+yi) = \psi(x,y) + i\chi(x,y)$, on a, comme l'on sait,

$$\psi'_x = \chi'_y, \quad \psi'_y = -\chi'_x.$$

Par suite, on peut faire varier x ou y, ou bien x et y de manière que les deux fonctions φ et ψ croissent ou décroissent ensemble, ou que l'une croisse, tandis que l'autre décroît ou inversement. Partant de là, l'auteur prouve rigoureusement que l'on peut faire tendre simultanément ψ et χ vers zéro, tandis que x et y tendent vers une limite finie déterminée, lorsque φ est une fonction entière.

Mansion (*P.*). — Intersection d'une droite avec une surface du second degré. (A, 64-65).

Solution par la règle et le compas, développée, à la prière de l'auteur, par M. Legrand, *Mathesis,* III, 177-181.

Gilbert (*Ph.*). — Recherches sur les accélérations. (A, 66-67).

La méthode exposée par l'auteur, dans sa *Mécanique analytique,* pour obtenir le théorème de Coriolis, s'étend sans peine à l'étude des accélérations d'ordre supérieur, dans le mouvement relatif. Sur le mouvement, en général, M. Gilbert est arrivé à divers théorèmes nouveaux, entre autres à celui-ci :

« Dans le mouvement d'un solide libre, sollicité par des forces quelconques, à chaque instant, le produit géométrique de l'axe du couple moteur par l'axe instantané de rotation, est égal au produit géométrique de l'axe du couple des quantités de mouvement par l'accélération angulaire. »

Gilbert (*Ph.*). — Sur le potentiel. (A, 67-68).

Du théorème de Green, l'auteur déduit, d'une manière simple, un théorème de Riemann, sur l'équilibre électrique, et les théorèmes de Gauss sur la substitution d'une couche superficielle à une masse donnée, sans altérer le potentiel.

Mansion (*P.*). — Sur les deux sens du mot *force.* (A, 85-88).

Premier sens, $(Pv:g)$, P étant le poids auquel la force imprime en une

seconde une vitesse v, g la constante de la pesanteur; second sens, $(Pv^2 : 2g)$, capacité de travail de la force proprement dite (premier sens), pendant une seconde. Application à des recherches récentes sur la force des insectes, par MM. F. Plateau et J. Delbœuf.

P. Mansion.

MÉMOIRES de la Société royale des Sciences de Liège. — 2e série, Bruxelles, Hayez [1].

Tome IX, février 1882.

Folie (*F.*). — Tables des lignes trigonométriques naturelles et des inverses des nombres. (1-11).

Tables à quatre figures des fonctions circulaires pour chaque sixième de degré, et des inverses des nombres de 100 à 999. Dans la première Table, un point est placé après le dernier chiffre pour indiquer que l'erreur est comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ d'unité du quatrième ordre.

Le Paige (*C.*). — Notes d'Analyse et de Géométrie. (1-20).

I. Sur un invariant du dixième ordre d'une forme sextique binaire. Relation, avec les invariants fondamentaux de la sextique, de cet invariant qui exprime la condition pour que les six points représentés par la sextique $a_x^6 = 0$ soient conjugués harmoniques du troisième ordre. II. Sur l'évolution. III. Sur une intégrale triple, qui se présente dans la théorie des nombres de Bernoulli.

Le Paige (*C.*). — Sur quelques points de la théorie des formes algébriques. (1-23).

Démonstration d'un théorème relatif aux formes écrites de la notation sylvestérienne $a_0 x_1^n + \sqrt{n_1} a_1 x^{n-1} y + \sqrt{n_2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots$; on peut en déduire le théorème de Sylvester relatif à ces formes préparées. Démonstration nouvelle de la règle de la multiplication des déterminants. Voici cette belle démonstration. Si

$$\gamma = \Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33} c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + a_{i3} b_{k3},$$

$$\alpha = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}, \quad \beta = \Sigma \pm b_{11} b_{22} b_{33},$$

$$\gamma A_{11} = \begin{vmatrix} c_{11} A_{11} & c_{12} A_{11} & c_{13} A_{11} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} A_{11} + c_{21} A_{21} + c_{31} A_{31}, & \ldots \\ c_{21} & \\ c_{31} & \end{vmatrix}.$$

---

[1] Voir *Bulletin*, 2e série, t. IV, 2e Partie, p. 106. Les Mémoires ont une pagination séparée.

Or

$$c_{11}A_{11} + c_{21}A_{12} + c_{31}A_{13} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13})A_{11}$$
$$+ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13})A_{21}$$
$$+ (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{12} + a_{33}b_{13})A_{31} = b_{11}\alpha.$$

Par suite, il vient

$$\gamma A_{11} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \alpha = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13} & a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} & a_{22}b_{32} + a_{23}b_{33} \\ a_{32}b_{12} + a_{33}b_{13} & a_{32}b_{22} + a_{33}b_{23} & a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33} \end{vmatrix} \alpha,$$

que l'on met aisément sous la forme $\alpha\beta A_{11}$, si l'on admet que le théorème est vrai pour un des déterminants contenant une ligne de moins.

Graindorge (*J.*). — Sur certaines formules du mouvement elliptique. (1-8).

Graindorge (*J.*). — Sur la possibilité de déduire d'une seule des lois de Kepler le principe de l'attraction (à propos d'un Mémoire de M. V.-G. Imschenetsky). (1-10).

Exposition simplifiée d'un travail de M. Imschenetsky sur ce sujet.

Deruyts (*J.*). — Note sur quelques propriétés des déterminants multiples. (1-11).

Démonstration directe d'un théorème de M. Le Paige, qui, pour $n = 4$, peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Imschenetsky (*V.-G.*). — Sur le multiplicateur des équations différentielles linéaires du deuxième ordre (à propos d'une Note de M. J. Graindorge). (1-7).

Généralisation du résultat suivant dû à M. Graindorge : L'intégrale générale de $y'' + 2y' \cot x - y = 0$ est $y \sin x = ax + b$.

Tome X, mai 1883.

Catalan (*E.*). — Problèmes et théorèmes d'Arithmétique. (1-12).

Nombre de nombres non divisibles par des nombres premiers donnés, de 1 à n; conséquences, densités.

Le Paige (*C.*). — Essais de Géométrie supérieure du troisième ordre. (1-103).

Exposé systématique des recherches de Géométrie supérieure de l'auteur. I. Homographie. II. Involution. III. Rapport anharmonique. IV. Groupes polaires.

Weyr (*Em.*). — Sur les involutions supérieures représentées sur un même support. (1-8).

Deruyts (*J.*). — Sur certaines sommes de déterminants. (1-11).

Suite du travail analysé plus haut.

Deruyts (*J.*). — Remarques sur quelques points de la Dynamique. (1-8).

Signification de la constante des aires dans le plan invariable et de diverses quantités analogues.

Cesaro (*E.*). — Sur diverses questions d'Arithmétique. (1-350).

Catalan (*E.*). — Rapport sur ce Mémoire. (351-352).

Voir une analyse de ce Mémoire, dans le *Bulletin*, 2e série, t. VIII, Ire Partie, p. 82-89. L'auteur, encore élève à l'Université de Liège quand il l'a écrit, a retrouvé les principes de l'arithmétique asymptotique de Dirichlet et beaucoup d'identités de Liouville, qu'il déduit d'une source unique. Les cent cinquante dernières pages contiennent beaucoup de propriétés non signalées antérieurement. La préface donne les indications historiques nécessaires pour distinguer ce qui est nouveau de ce qui est ancien.

Vaněček (*J.-S.*). — Sur les faisceaux de surfaces du second ordre. (1-16).

Neuberg (*J.*). — Sur la cyclide de Dupin. (1-10).

Soient $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ les équations de trois sphères de rayon R_1, R_2, R_3, $t_1 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 - (R_2 - R_3) = f(2, 3)$, $t_2 = f(3, 1)$, $t_3 = f(1, 2)$. L'équation de la cyclide, considérée comme enveloppe d'une sphère qui touche les trois sphères données est

$$\begin{vmatrix} 0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & 0 & t_3 & t_2 \\ S_2 & t_3 & 0 & t_1 \\ S_3 & t_2 & t_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Teixeira (*G.*). — Sur une formule d'interpolation. (1-7).

Détermination d'une fonction entière de x, dont on connaît les valeurs ainsi que celle de ses dérivées pour des valeurs particulières de x, en nombre suffisant.

Tome supplémentaire, in-4°; 1883.

Folie (F.). — Douze Tables pour le calcul des réductions stellaires. (I-XVI et 1-131).

Tables I à V, pour le calcul de la précession; VI à X pour la nutation; XI et XII, nouvelle édition des Tables publiées dans le tome IX des Mémoires.

P. Mansion.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1).

LIVe Cahier, 1884.

Autonne. — Recherches sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. (1-29).

« Soit Y une équation différentielle linéaire, d'ordre p et à coefficients rationnels; soit H une équation algébrique de degré m, à coefficients rationnels et irréductibles; si p des m racines de H forment un système fondamental d'intégrales de Y, toutes les m racines de H seront, comme on sait, des intégrales de Y; il existera donc, entre les m racines de H, $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1}$, n équations linéaires, homogènes, à coefficients constants de la forme

$$0 = x_q = \sum_{i=0}^{i=m-1} \alpha_{qi}\eta_i \quad (q = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

et seulement n distinctes; n désigne la différence $m - p$ entre le degré m de H et l'ordre p de Y. »

Dans un précédent travail (LIe Cahier), M. Autonne s'était déjà occupé des conséquences qu'entraîne l'existence du système (1) d'équations linéaires entre les racines de H pour la nature du groupe H et pour celle des intégrales de Y. Il aborde actuellement le problème dans toute sa généralité. Son Mémoire comprend trois Parties.

Dans la première, il expose le principe de la méthode, et il énonce deux théorèmes fondamentaux :

« I. Si le groupe G de H et le groupe Γ (dérivé des substitutions linéaires auxquelles équivalent toutes les substitutions de G) sont isomorphes avec hémiédrie, l'équation H résulte de l'élimination d'un paramètre ζ entre les équations

$$(1) \qquad \eta^M + A_1(\zeta, x)\eta^{M-1} + \ldots = 0,$$

$$(Z) \qquad \zeta^L + B_1(x)\zeta^{L-1} + \ldots = 0,$$

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VII$_2$, p. 32.

où l'on a $m = ML$; λ désigne la variable indépendante; $A_1, \ldots, B_1, \ldots$ sont des fonctions rationnelles. Le groupe Z est isomorphe à Γ sans hémiédrie.

» Si G et Γ étaient isomorphes sans hémiédrie, on aurait $L = 1$, $M = m$, et l'équation H serait identique à (1).

» II. On peut toujours former une équation de degré L (Ξ), à coefficients rationnels et irréductibles, qui jouira des propriétés suivantes : 1° les L racines $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{L-1}$ de (Ξ) seront des intégrales de Y, et $L - n$ de ces intégrales seront linéairement indépendantes; le groupe de (Ξ) sera isomorphe à Γ sans hémiédrie.

» Si G et Γ sont isomorphes sans hémiédrie, (Ξ) ne diffère pas de H.

» On a toujours

$$L \geq n;$$

si $L = n$, il viendrait

$$(1) \qquad \eta^M + A_2(\zeta, x)\eta^{M-2} + \ldots = 0$$

et

$$(Z) \qquad \zeta^n + B_1(x)\zeta^{n-1} + \ldots = 0;$$

les équations (1) et (Z) ne seraient pas autrement déterminées. »

L'auteur énonce enfin le théorème suivant :

« Toute équation Θ, dont le groupe est isomorphe sans hémiédrie à un groupe linéaire Γ d'ordre fini à n variables, devient abélienne, après qu'on a résolu une équation auxiliaire Φ, qui est à coefficients rationnels et irréductibles; l'ordre et le degré de Φ ne dépendent que de n.

» Dans la deuxième Partie, on examine le cas où m est un nombre premier. Les groupes G et Γ sont alors isomorphes sans hémiédrie et l'équation H est une équation de Galois.

» L'équation différentielle Y possède p intégrales linéaires indépendantes de la forme $\sqrt[m]{u}$, les u étant ϖ à ϖ racines d'une même équation de degré ϖ, à coefficients rationnels et irréductibles, qui est abélienne. L'entier ϖ doit diviser : 1° $m - 1$ et n, si Y possède une intégrale rationnelle, 2° $m - 1$ et $n - 1$, si Y est dépourvue d'une pareille intégrale.

» Ces propositions sont sans exception pour $n \leq 3$; si $n > 3$, il existe pour chaque valeur de n une limite Λ telle que, si $m > \Lambda$, les conclusions précédentes s'appliquent de plein droit. »

Dans la troisième Partie l'auteur énumère (en se bornant aux cas de $n = 1, 2, 3$) les divers types des équations (Θ) et Φ, définies dans la première Partie, lorsque le degré m de H est un nombre composé quelconque. Il arrive aux résultats suivants :

» 1° $n = 1$. Les L racines de (Θ) sont de la forme $\sum_{i=0}^{i=L-1} \alpha_i \sqrt[\lambda_i]{u_i}$, où α_i est une constante, λ_i un diviseur de L, u_i une quantité rationnelle en x.

» 2° $n = 2$. Deux cas peuvent se présenter :

» (α). Φ a pour degré 1 ou 2, ou bien $i = L - 1$:

» (β). Les racines de (Θ) sont de la forme

$$\sum_{i=0}^{i=L-1} \alpha_i \sqrt[\lambda_i]{f_i(x, v_1, v_2, \ldots)}.$$

où λ_i est un diviseur de L; α_i désigne une constante, f_i est une fonction rationnelle; v_1, v_2, ... sont les racines d'une équation auxiliaire V du quatrième ou du cinquième degré à discriminant carré.

» 3° $n = 3$. Deux cas peuvent encore se présenter :

» (α). L'équation Φ aura pour degré un nombre ≤ 5; si Φ est du cinquième degré, le discriminant de Φ est carré;

» (β). L'équation V, définie comme pour $n = 2$, sera du cinquième degré (à discriminant carré); du neuvième degré (hessienne); du huitième degré (modulaire). »

Picquet. — Applications de la représentation des courbes du troisième degré à l'aide des fonctions elliptiques. (31-100).

L'auteur se propose d'appliquer la représentation des courbes algébriques au moyen des fonctions doublement périodiques à l'étude des polygones à la fois inscrits et circonscrits aux cubiques planes.

» Complètement traitée par divers auteurs dans le cas où la courbe est unicursale, dit M. Picquet, l'étude de ces polygones, dans le cas où la cubique est la plus générale de son degré, se déduit si facilement de la représentation des courbes du premier genre à l'aide des fonctions elliptiques, que l'on doit supposer qu'elle a été abandonnée par l'illustre Clebsch aux recherches de ses élèves. »

Soit u_1 l'une des valeurs de l'argument correspondant au premier sommet d'un polygone de n côtés à la fois inscrit et circonscrit à une cubique générale. La condition exprimant que ce polygone se ferme est

$$u_1 = \frac{C}{3} + \frac{2mK + 2piK'}{2^n - (-1)^n},$$

où $2K$ et $2iK'$ représentent la période réelle et la période imaginaire, m et p tous les nombres entiers tels que, pour deux systèmes différents, la différence des valeurs correspondantes de u_1 ne soit pas un multiple des périodes. Le nombre total des sommets est par suite

$$[2^n - (-1)^n]^2,$$

ou plutôt

$$[2^n - (-1)^n]^2 - 3^2,$$

en retranchant les points d'inflexion, qui font partie de la solution.

M. Picquet déduit de là le nombre des polygones de n côtés, dont l'expression est différente suivant que n est premier, impair non premier ou pair; il en résulte divers théorèmes d'Arithmétique sur la divisibilité par n. On arrive finalement à cette règle énoncée pour la première fois par M. Picquet, et retrouvée par MM. Sylvester et Story :

« Pour calculer le nombre propre des sommets des polygones de n côtés, on formera tous les diviseurs a de n complémentaires des diviseurs du même nombre qui n'admettent leurs facteurs premiers qu'à la première puissance, et, si le nombre de ces facteurs est pair, on ajoutera à $2^3(2^{n-2}+1)(2^{n-1}-1)$ ou à $2^3(2^{n-1}+1)(2^{n-2}-1)$, suivant que n est impair ou pair, les quantités

$$2^3(2^{a-2}+1)(2^{a-1}-1) \quad \text{ou} \quad 2^3(2^{a-1}+1)(2^{a-2}-1)$$

suivant que a est impair ou pair; on les en retranchera si le nombre des facteurs est impair. »

L'auteur étudie ensuite les polygones curvilignes à la fois inscrits et circonscrits aux cubiques planes. Supposons qu'une courbe du degré μ ait en un

point déterminé $3\mu - 1$ points consécutifs confondus sur la cubique; elle n'est pas déterminée; mais, quelle qu'elle soit, elle rencontre la cubique en un dernier point qui est fixe. Si l'on opère sur ce point comme sur le premier, et, ainsi de suite, on obtiendra une espèce particulière de polygones curvilignes, fermés si le premier sommet est convenablement choisi, dont les côtés sont indéterminés, mais dont les sommets sont parfaitement déterminés; qui sont à la fois inscrits et circonscrits à la cubique, circonscrits par des contacts d'ordre $3\mu - 2$.

La condition pour qu'un pareil polygone se ferme est

$$u_1 = \frac{C}{3} + \frac{2mK + 2piK'}{1 - (1 - 3\mu)^n},$$

n désignant le nombre de ses sommets. Le nombre total des solutions est

$$[(3\mu - 1)^n - (-1)^n]^2.$$

Ici s'introduit un élément nouveau : si le dernier point d'intersection de la courbe du degré μ avec la cubique coïncide avec le point de contact, on obtient des points particuliers de la cubique, que M. Halphen nomme *points de coïncidence*. Or les sommets des polygones, rectilignes ou curvilignes, à la fois inscrits et circonscrits à une cubique plane, sont des points de coïncidence; mais le dénombrement des premiers points ne résulte pas de celui des seconds; les divers ordres de points de coïncidence qui font partie des sommets des polygones d'ordre μ et d'un nombre n de côtés sont, d'une façon générale, tous les diviseurs de $\frac{1}{3}[(3\mu - 1)^n - (-1)^n]$; mais il faut en excepter ceux qui sont égaux à $\frac{1}{3}[(3\mu - 1)^{n'} - (-1)^{n'}]$, ($n'$ étant un diviseur de n) ou qui le divisent.

M. Picquet apprend, en terminant, à distinguer parmi les sommets des polygones (μ, n) ceux qui sont réels et ceux qui sont imaginaires.

Léauté. — Théorie du frein à lame. (117-135).

L'auteur indique, pour la théorie du frein à lame, une méthode nouvelle et d'une complète rigueur, dans laquelle il tient compte de l'élasticité. Il montre que, dans une lame circulaire ou rectiligne avant l'enroulement, la loi de répartition des tensions pendant le glissement est la même, que l'on tienne compte de l'élasticité ou que l'on n'en tienne pas compte. Il intègre l'équation de la courbe affectée par une lame primitivement droite ou circulaire. En prenant pour axe des ξ la direction de la force qui agit sur l'extrémité, pour origine cette extrémité, pour axe des η la perpendiculaire à celui des ξ, on a

$$\left\{\begin{aligned} \eta &= 2akk'\frac{\operatorname{sn}\frac{\sigma}{a}}{\operatorname{dn}\frac{\sigma}{a}}, \\ \xi &= \sigma + 2a\left[k^2\frac{\operatorname{sn}\frac{\sigma}{a}\operatorname{cn}\frac{\sigma}{a}}{\operatorname{dn}\frac{\sigma}{a}} - \int_0^{\frac{\sigma}{a}}\operatorname{dn}^2\frac{\sigma}{a}\,d\frac{\sigma}{a}\right], \end{aligned}\right.$$

où la variable σ désigne l'arc de courbe embrassé. De ces équations M. Léauté apprend à déduire la longueur de l'arc embrassé.

Guieysse. — Régulateur isochrone parabolique. (137-142).

Halphen. — Note sur l'inversion des intégrales elliptiques. (171-181).

L'auteur donne une solution nouvelle et très simple du problème qui consiste, étant donné un polynôme X du quatrième degré en x, à exprimer $\sqrt{X}$ et x, à la fois, par des fonctions elliptiques du même argument. Ses notations sont celles de M. Weierstrass (*Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen.*)

Soit

$$X = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4.$$

On aura

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv}, \quad \sqrt{X} = \sqrt{a_0}\,[p(u - v) - pu],$$

l'argument constant v étant déterminé par les relations simultanées et concordantes

$$pv = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^2}, \quad p'v = \frac{a_3 a_0^2 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3}{a_0^3}.$$

M. Halphen discute ces formules générales dans le cas où les coefficients de X sont réels, ainsi que x et $\sqrt{X}$.

Si l'on désigne par S et T les deux invariants de X,

$$S = a_0^2 g_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$
$$T = a_0^3 g_3 = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4.$$

le discriminant de X est

$$D = S^3 - 27 T^2.$$

Le cas de $D < 0$ correspond, comme on sait, au cas où X a deux racines réelles et deux imaginaires; v est alors réel à des multiples des périodes près. Si a_0 est positif, u est également réel; si a_0 est négatif, u est de la forme

$$-\frac{v}{2} - iz,$$

z étant réel.

Si D est positif et que les quantités pv, g_2, g_3 satisfassent aux inégalités

$$pv > 0, \quad 2 g_2 pv + 3 g_3 > 0,$$

les racines de X sont réelles, et l'argument v est aussi réel. Dans le cas contraire, les racines de X sont imaginaires, et l'argument v a la forme $v_0 + \omega_3$, v_0 étant réel, ω_3 étant l'une des demi-périodes ω_1, ω_2, ω_3. Si a_0 est positif, quel que soit v, u peut parcourir les deux séries de valeurs distinctes z et $\omega_1 + z$; si a_0 est négatif, $u = -\frac{v}{2} + iz$, ou $u = -\frac{v}{2} + \omega_1 + iz$.

M. Halphen termine par l'étude de l'équation $p'u - p'v = 0$.

Les invariants étant réels, ainsi que l'argument donné v (compris entre zéro et la demi-période positive réelle), les racines u de l'équation $\frac{p'u - p'v}{u - v} = 0$, à des périodes près, ont les formes suivantes :

1° *Discriminant négatif.* — I. $g_2 > 0$, $g_3 < 0$. Deux arguments v'_0, v'_1 réels, compris entre zéro et ω_2, étant déterminés par les relations

$$pv'_0 = +\sqrt{\frac{g_2}{3}}, \quad pv'_1 = -\sqrt{\frac{g_2}{3}},$$

les racines sont réelles, si v est compris entre v'_0 et v'_1 ou entre $2\omega_2 - v'_1$ et $2\omega_2 - v'_0$.

II. Dans les autres cas, les racines ont la forme $-\frac{v}{2}+iz$, où z est réel.

2° *Discriminant positif.* — Un argument v'_0 réel, compris entre zéro et ω_1, étant déterminé par la relation $pv'_0=+\sqrt{\frac{g_2}{3}}$, les racines ont la forme $(z+\omega_3)$, où z est réel, si v est compris entre v'_0 et $2\omega_1-v'_0$; elles ont la forme

$$-\frac{v}{2}+\omega_1+iz,$$

si v est supérieur à $2\omega_1-v'_0$; et la forme $-\frac{v}{2}+iz$, si v est inférieur à v'_0.

Halphen. — Sur une courbe élastique. (183-250).

Ce travail, où sont utilisés les résultats obtenus dans la Note précédente, a pour point de départ un problème pose et en partie résolu par M. Maurice Lévy : « Un anneau circulaire étant soumis, sur tout son périmètre, à une pression toujours normale et uniforme, située dans son plan, quelle est la condition pour que la forme circulaire soit la seule figure d'équilibre de cet anneau? »

L'emploi direct des intégrales elliptiques a permis à M. M. Lévy d'établir une condition suffisante qui diffère peu de la condition précise à la fois nécessaire et suffisante. Au moyen des fonctions elliptiques inverses, M. Halphen donne la solution complète du problème, solution prévue d'ailleurs par M. M. Lévy.

La nouvelle courbe élastique, examinée géométriquement, présente bien des formes différentes, dont deux seulement conviennent au problème en question. L'auteur énumère toutes ces formes et exprime leurs éléments par des développements en séries explicites. Pour rendre ces séries réelles, il a dû distinguer trois catégories de formules.

Au point de vue mécanique, chaque équilibre de flexion d'un prisme droit chargé debout ne peut avoir lieu que si la charge excède une certaine limite. Si donc la charge est au-dessous de cette limite, une seule figure d'équilibre est possible, la figure naturelle : c'est alors un équilibre stable. L'analyse ainsi conduite fait connaître une limite de la charge qui préserve de toute flexion.

Cette méthode (appliquée par M. M. Lévy à l'anneau comprimé normalement) fournit en général des conditions de stabilité suffisantes, et non nécessaires. M. Halphen démontre qu'une verge élastique circulaire, dont les extrémités sont fixes, et qui n'est soumise à aucune force, est susceptible d'une infinité de figures d'équilibre. Si cette verge est soumise à des forces quelconques permettant l'équilibre sous la forme circulaire, la méthode précédente ne pourra fournir une limite de ces forces préservant de toute flexion.

L'auteur résume ainsi les cinq parties de son Mémoire :

« Le premier paragraphe contient la représentation des éléments de la courbe élastique par des fonctions elliptiques d'un paramètre. Le deuxième paragraphe est consacré à la discussion des formules, poussée aussi loin qu'il a été possible en conservant les algorithmes des fonctions elliptiques. Dans le troisième et le quatrième paragraphe, les formules sont développées, et les éléments de la courbe sont représentés par des séries explicites. La division des deux paragraphes répond à la distinction essentielle des deux cas qui s'offrent dans les fonctions elliptiques à module réel, et basée sur le signe du discriminant. Le cinquième paragraphe a trait aux applications. »

2ud Part

THE LONDON, EDINBURGH AND DUBLIN PHILOSOPHICAL MAGAZINE AND JOURNAL OF SCIENCE. Conducted by Sir Robert Kane, Sir William Thomson and William Francis. — London, in-8° (1).

Tome XIII, janvier-juin 1882.

Edlund (*E.*). — Sur la résistance électrique du vide. (1-20).

Cockle (Sir *J.*). — Nouvelles transformations des ordinaux. (44-46).

Suite des recherches publiées dans le précédent Volume.

Cellérier (*C.*). — Distribution des vitesses moléculaires dans les gaz. (47-67).

Thompson (*Silv.-P.*). — Les battements des consonances fausses. (68-70).

Vernon Boys (*C.*). — Sur un intégrateur et un autre appareil pour la mesure des forces mécaniques et électriques. (77-95).

Clausius (*R.*). — Détermination théorique de la pression de la vapeur et des volumes de la vapeur et du liquide. (132-142).

Edlund (*E.*). — Sur la résistance électrique des gaz. (200-212).

Michelson (*A.-A.*). — Les phénomènes d'interférence dans une nouvelle forme de réfractomètre. (236-244).

Cockle (Sir *J.*). — Note sur la transformation. (357-359).

Clausius (*R.*). — Sur les différents systèmes de mesures pour les quantités électriques et magnétiques. (381-398).

Thompson (*Silv.-P.*). — Sur le rôle des deux oreilles dans la perception de l'espace. (406-416).

---

(1) Voir *Bulletin*, VII, p. 44-61.

Exposé des théories de Steinhauser et de Graham Bell, de Mayer, de Match et de lord Rayleigh.

Burbury (*S.-H.*). — Un théorème sur la dissipation de l'énergie. (417-419).

Thomson (*J.-J.*), *Larmor* (*J.*) et *Everett* (*J.-D.*). — Sur les dimensions d'un pôle magnétique dans le système électrostatique d'unités. (427-434).

Tyndall (*J.*). — Action des molécules gazeuses sur la chaleur rayonnante, et sa transformation en son. (435-462, 480-526).

Tome XIV; juillet-décembre 1882.

Vernon Boys (*C.*). — Mesure de la courbure et de l'indice de réfraction. (30-41).

Ayrton (*W.-E.*) et *Perry* (*J.*). — Sur un photomètre de dispersion simplifié. (45-50).

Sundell (*A.-F.*). — Remarques sur les systèmes absolus d'unités physiques. (81-109).

Cunningham (le major *A.*). — Théorie de Moseley des courants permanents. (110-115).

Clausius (*R.*). — Sur les dimensions de l'unité de magnétisme dans le système électrostatique de mesures. (124-126).

Fisher (*O.*). — De l'effet d'un liquide placé sous la croûte terrestre sur les marées de l'Océan. (213-225).

L'auteur, conduit antérieurement par des considérations purement géologiques à regarder la Terre comme formée d'une croûte mince flottant en équilibre sur un liquide de petite densité, examine l'influence que pourrait avoir ce liquide sur les marées océaniennes. En admettant l'existence d'une masse liquide de 60 lieues (*miles*) ou plus de profondeur recouvrant un noyau solide, et d'un coefficient de frottement égal à $\frac{1}{10}$, il est conduit à cette conclusion que les marées équatoriales des syzygies seraient réduites dans la proportion de $\frac{7}{10}$.

Thomson (*J.-J.*). — Sur les dimensions d'un pôle magnétique dans le système électrostatique d'unités. (225-226).

Wiedemann (*G.*). — Méthodes de détermination de l'ohm. (258-276).

Vansittart Neale (*E.*). — Les queues des comètes. (292-294).

Boltzmann. — Théorème sur la distribution moyenne de l'énergie dans un système de points matériels. (299-312).

Rayleigh (lord). — Comparaison des méthodes employées pour la détermination des résistances en unités absolues. (329-346).

Lodge (*O.*). — Sur les dimensions d'un pôle magnétique dans le système électrostatique d'unités. (357-365).

Goldstein (*E.*). — Sur les décharges électriques dans les gaz raréfiés. (366-387).

Cook (*E.*). — L'acide carbonique comme élément constituant de l'atmosphère. (387-395).

Darwin (*G.-H.*). — Sur les variations de la verticale dues à l'élasticité de la surface de la Terre. (409-427).

Haughton (*S.*). — Aperçus nouveaux sur la théorie de M. George Darwin sur l'évolution du système formé de la Terre et de la Lune. (427-430).

Helmholtz. — Sur les systèmes d'unités absolues pour les quantités électriques et magnétiques. (430-440).

Trowbridge (*J.*) et *Bingham Penrose* (*C.*). — Sur le phénomène de Thomson. (440-449).

Goldstein (*E.*). — Sur la réflexion des rayons électriques. (449-455).

Tome XV ; janvier-juin 1883.

Edlund (*E.*). — Recherches sur le passage de l'électricité à travers l'air raréfié. (1-22).

Vogel (*H.*). — Sur la théorie de la dissociation de Lockyer. (28-30).

Browne (*W.*). — Sur les forces centrales et la conservation de l'énergie. (35-42).

Leconte (*J.*). — Attractions et répulsions apparentes des petits corps flottants. (47-56).

Everett (*J.-D.*). — Recherches élémentaires sur les vibrations d'un corps soumis à des forces extérieures; applications aux marées et au contrôle des pendules. (73-79).

Clausius (*R.*). — Sur les rapports entre les unités de magnétisme et d'électricité. (79-83).

Pringsheim (*E.*). — Sur le radiomètre. (101-124).

Thompson (*Silv.-P.*). — Sur la représentation graphique de la loi de l'effet produit par un moteur électrique. (124-131).

Langley. — Absorption de l'énergie solaire par sélection. (153-183).

Lamb (*H.*). — Les fondements de la Statique. (187-191).

Riley (*J.*). — Sur les phénomènes capillaires. (191-198).

Worthington (*A.-M.*). — Sur le mouvement horizontal des corps flottants sous l'action de forces capillaires. (198-203).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Sur la force magnétomotrice. (205-217).

Rayleigh (lord). — Sur les vibrations permanentes. (229-235).

Maxwell (*H.-C.*). — Sur la signification du mot « force ». (248-251).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur le nombre de fractions contenues dans une suite de Farey dont la limite est donnée. (251-257).

La suite de Farey est constituée par les fractions irréductibles dont les deux termes ne dépassent pas une limite donnée. Ces fractions sont en outre rangées par ordre de grandeur croissante et, dans l'article en question, inférieures à l'unité. Soit $t(x)$ le nombre des nombres inférieurs à x et premiers avec lui, $u(x)$ leur somme, $T(j)$ le nombre des fractions de la suite de Farey dont la

limite des deux termes est égale à j, y compris la fraction $\frac{1}{4}$, $U(j)$ la somme des numérateurs de ces fractions. On a évidemment

$$T(j) = \sum_{x=1}^{x=j} t(x), \quad U(j) = \sum_{x=1}^{x=j} u(x).$$

M. Sylvester indique les deux formules récurrentes

$$T(j) + T\left(\frac{j}{2}\right) + T\left(\frac{j}{3}\right) + T\left(\frac{j}{4}\right) + \ldots = \frac{j^2 - j}{2},$$

$$U(j) + 2U\left(\frac{j}{2}\right) + 3U\left(\frac{j}{3}\right) + 4U\left(\frac{j}{4}\right) + \ldots = \frac{j(j+1)(j+2)}{3},$$

où x sera remplacé par le nombre entier immédiatement inférieur dans $T(x)$ et dans $U(x)$, lorsque x est fractionnaire. Lorsque x augmente indéfiniment $\frac{T(x)}{x^2}$ a pour limite $\frac{3}{\pi^2}$, et $\frac{U(x)}{x^3}$ a pour limite $\frac{1}{\pi^2}$. Une Table jointe à cette Note donne les valeurs de $t(x)$, $T(x)$, $\frac{3}{\pi^2}x^2$ pour les valeurs de x de 1 à 500. Cette Table montre que $T(x)$ est toujours compris entre $\frac{3}{\pi^2}x^2$ et $\frac{3}{\pi^2}(x+1)^2$. D'après l'auteur, $U(x)$ serait toujours compris entre $\frac{1}{\pi^2}x^3$ et $\frac{1}{\pi^2}(x+1)^3$. Il est à remarquer que, lorsque x est un nombre premier, $T(x)$ est ordinairement beaucoup plus rapproché de la limite supérieure que de la limite inférieure.

Yung (*E.*). — Sur les erreurs des sens; contribution à l'étude de l'illusion et de l'hallucination. (259-270).

Barrett (*W.-F.*). — Note sur le prétendu éclairement du champ magnétique. (270-275).

Bosanquet (*R.-H.*). — Sur le magnétisme permanent. (309-316).

Glazebrook (*R.-T.*). — Sur les prismes polarisants. (352-362).

Droop (*H.-R.*). — Sur la sensation des couleurs. (373-384).

Rayleigh (lord). — Sur les vibrations d'un vase cylindrique, contenant un liquide. (385-389).

Cook (*E.*). — Sur une théorie de l'action solaire. (400-405).

Thomson (*J.-J.*). — Sur une théorie de la décharge électrique dans les gaz. (427-434).

Tome XVI; juillet-décembre 1883.

Heath (*D.-D.*). — Sur la théorie des courants atmosphériques de M. Ferrel. (13-23).

Rayleigh (lord). — Sur les ondulations des liquides en contact avec une surface vibrante. (50-58).

Siemens (Sir *W.*). — Sur la conservation de l'énergie solaire. (62-66).

Korteweg (*D.-J.*). — Théorème général sur la stabilité du mouvement d'un fluide visqueux. (112-118).

Il s'agit du théorème suivant, dû à Helmholtz :

« Dans une région simplement connexe, il existe seulement une solution pour le mouvement constant d'un fluide visqueux incompressible lorsque les vitesses à la limite sont connues et lorsque les carrés et les produits des vitesses sont négligeables; ce mode de mouvement est toujours stable ». L'auteur donne une nouvelle démonstration de ce théorème; la démonstration prouve que ce mouvement correspond à un minimum pour la perte d'énergie due au frottement intérieur, lorsque les vitesses à la limite sont connues.

Ayrton (*W.-E.*) et *Perry* (*J.*). — Note sur la mesure de la résistance électrique des liquides. (132-142).

Gray (*A.*). — Sur la détermination en unités absolues de l'intensité des champs magnétiques puissants. (144-156).

Siemens (*W.*). — Sur l'hypothèse d'un potentiel électrique solaire, et de son importance pour l'explication des phénomènes terrestres. (161-181).

Rayleigh (lord). — Action des corps poreux sur le son. (181-186).

Gray (*T.*). — Sur la grosseur des conducteurs pour la distribution de l'énergie électrique. (187-193).

Abney et *Festing*. — Recherche sur les rapports entre la radiation, l'énergie et la température. (224-229).

Sylvester (*J.-J.*). — Table des *totients*, des *sum-totients* et des

produits de $\frac{3}{\pi^2}$ par les carrés des nombres entiers de 501 à 1000. (230-233).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur l'équation aux inégalités séculaires dans la théorie des planètes. (267-269).

Étant donnée une matrice, si de chaque élément de la diagonale on retranche λ, le déterminant ainsi obtenu est une fonction entière de λ; les racines de cette fonction sont les racines *latentes* de la matrice, d'après la dénomination de M. Sylvester. On a alors les théorèmes suivants :

« 1° Les racines latentes du carré d'une matrice sont les carrés des racines latentes de la matrice elle-même.

» 2° La somme des produits i à i des racines latentes du produit des deux matrices m et n est égale à la somme des produits obtenus en multipliant chaque déterminant d'ordre i dans l'une des matrices par le déterminant opposé dans l'autre matrice. On dit que deux déterminants sont opposés lorsqu'ils sont placés symétriquement par rapport à la diagonale principale. »

De ce dernier théorème on déduit bien aisément que les racines latentes d'une matrice symétrique sont toutes réelles, c'est-à-dire le théorème de Laplace.

L'auteur indique en même temps une expression pour une fonction quelconque d'une matrice au moyen des racines latentes de cette matrice. On en déduit qu'il y a ω^i valeurs pour la racine $\omega^{\text{ième}}$ d'une matrice d'ordre i; il y a exception pour les matrices unitaires, et l'expression des racines contient alors un certain nombre de paramètres arbitraires.

Tribe (*A.*). — De l'influence de la direction des lignes de force sur la distribution de l'électricité sur les corps métalliques. (269-275).

Fletcher (*L.*). — La dilatation des cristaux par les changements de température. (275-300, 344-350, 412-429).

Edgeworth (*F.-Y.*). — Sur la loi de l'erreur. (300-309).

Rayleigh (lord). — Sur la théorie de la capillarité de Laplace. (309-315).

Worthington (*A.-M.*). — Sur la théorie de la capillarité de Laplace. (339-343).

Edgeworth (*F.-Y.*). — La méthode des moindres carrés. (360-375).

Browne (*W.-R.*). — Sur la réalité de la force. (387-393).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur la multiplication et l'extraction de racines des quaternions. (394-396).

La théorie des quaternions d'Hamilton est identique en réalité avec la théorie des substitutions du second ordre. La règle de multiplication de deux quaternions se ramène à la loi de multiplication de deux matrices du second ordre ou à la loi de composition de deux substitutions; il en résulte que l'opération n'est pas commutative, mais qu'elle est soumise à la loi associative, pour un produit de trois ou de plusieurs facteurs.

En ce qui concerne les racines, l'auteur a donné l'expression générale des racines $q^{\text{ièmes}}$ d'une matrice quelconque; on en déduit pour les racines $q^{\text{ièmes}}$ d'un quaternion q^2 valeurs dont q réelles, $q^2 - q$ imaginaires, en supposant la racine mise sous la forme $\mathrm{A}m + \mathrm{B}$, où m désigne la matrice elle-même. Dans le cas d'une matrice unitaire, on a en outre d'autres racines contenant des paramètres variables; ces racines ont été données par Babbage dans ses recherches sur les fonctions $\frac{ax+b}{cx+d}$ qui ont une périodicité d'un degré donné.

Liveing (*G.-D.*) et *Dewar* (*J.*). — Sur les taches du Soleil et sur la présence d'éléments terrestres dans le Soleil. (401-408).

Tait. — Sur les lois du mouvement. (439-447).

Blaikley (*D.-J.*). — Expériences sur la vitesse du son dans l'air. (447-455).

Tome XVII; janvier-juin 1884.

Larmor (*J.*). — De l'induction électromagnétique dans les surfaces conductrices et les corps solides. (1-23).

Tait. — La topologie de Listing. (30-46).

Cet article est destiné à montrer l'importance de la branche de la Science ainsi appelée par Listing et dont il a posé les fondements dans ses Mémoires : *Vorstudien zur Topologie* (*Göttinger Studien*, 1847) et *Der Census raümlicher complexe* (*Göttinger Abhandlungen*, 1861). M. Tait propose de remplacer le mot de *topologie*, qui a déjà un sens bien déterminé, par le nom de *Science de situation*, qui a l'avantage d'indiquer l'objet de cette branche de la Science. Quel que soit le nom qu'on adopte, on trouvera dans cet article un très grand nombre d'applications intéressantes, depuis de simples récréations mathématiques jusqu'à une extension de la formule d'Euler sur les polyèdres.

Clausius (*R.*). — Sur la théorie des machines dynamo-électriques. (46-59).

John Tyndall. — Sur l'arc-en-ciel. (61-64).

Quincke (*G.*). — Sur les changements de volumes et d'indices de réfraction des fluides produits par une pression hydrostatique. (65-68).

Croll (*J.*). — Examen de la modification de M. Alfred Wallace à la théorie physique des changements séculaires de climat. (81-111, 367-376).

Chattock (*A.-P.*). — Sur une méthode pour déterminer expérimentalement la constante d'un électrodynamomètre. (111-115).

Muir (*Th.*). — Sur l'équation générale aux différences du second ordre. (115-118).

Démonstration de la règle donnée par M. Cayley pour obtenir le terme général de la suite

$$u_x = a_{x-1} u_{x-1} + b_{x-1} u_{x-2},$$

en fonction des deux premiers termes de la suite u_0, u_1. Les coefficients de u_0, u_1 se présentent sous forme de déterminants dont le développement s'effectue par une loi très simple. L'auteur se propose de même de déterminer le terme général de la suite

$$u_x = a_{x-1} u_{x-1} + b_{x-2} u_{x-3} + c_{x-2}.$$

Clausius (*R.*). — Sur la théorie des machines dynamo-électriques. (119-134).

Edgeworth (*F.-Y.*). — Sur la réduction des observations. (135-141).

Newcomb (*S.*). — Sur quelques points de climatologie. Réponse à M. Croll. (142-148).

Tyndall (*J.*). — Sur l'arc-en-ciel blanc. (148-150).

Bunsen (*R.*). — Sur la condensation de l'acide carbonique à la surface du verre poli. (160-173).

Rayleigh (lord). — Observations acoustiques. (188-194).

Langley (*S.-P.*). — Détermination expérimentale des longueurs d'onde dans le spectre invisible. (194-214).

Lodge (*O.-J.*) et *Clark* (*J.-W.*). — Sur les phénomènes observés

dans l'air plein de poussière au voisinage des corps incandescents. (214-239).

Shelfford Bidwell. — Sur quelques expériences relatives à une explication du phénomène de Hall. (249-265).

Kamensky (*G.*). — Note sur la conductibilité électrique et autres propriétés des alliages cuivre-antimoine. (270-275).

Croll (*J.*). — Remarque sur la « Réponse » du professeur Newcomb. (275-281).

Wright (*A.*) et *Thomson* (*C.*). — Détermination de l'affinité chimique en fonction de la force électromotrice. (282-301, 377-391).

Liveing et *Dewar.* — La température des taches solaires. (302-304).

Hasselberg (*B.*). — Sur le second spectre de l'hydrogène. (329-352).

Hood (*J.-J.*). — Sur le rapport de l'absorption chimique des gaz à leur interdiffusion. (352-367).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur la résolution d'une classe d'équations en quaternions. (392-397).

M. Sylvester se propose de montrer comment on peut résoudre par les procédés de l'Algèbre ordinaire les équations en quaternions unilatérales, c'est-à-dire, telles que les coefficients de l'inconnue soient tous situés du même côté; le cas de l'équation unilatérale du second degré avait été traité par Hamilton. L'auteur se borne d'ailleurs à indiquer la méthode pour les équations de la forme de Jerrard

$$x^{\omega} + px + q = 0,$$

et l'on trouve que le nombre des solutions est en général $2\omega^2 - \omega$. L'article se termine par quelques considérations sur le nombre des solutions de l'équation unilatérale générale et par l'examen de quelques cas particuliers qui échappent à l'analyse précédente.

Tomlinson (*H.*). — Note sur le phénomène de Hall. (400-402).

Rowland. — Sur la propagation d'une perturbation arbitraire

électromagnétique, sur les ondes sphériques de lumière et la théorie dynamique de la diffraction. (413-437).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Sur la détermination de la composante horizontale du magnétisme terrestre à Oxford. (438-447).

Quincke (*G.*). — Sur la mesure des forces magnétiques au moyen de pressions hydrostatiques. (447-458).

Edlund (*E.*). — Sur la grandeur de l'induction unipolaire de la Terre. (493-506).

Bryant (*S.*). — Sur la déduction de principes inductifs de la théorie mathématique des probabilités. (510-518).

Clausius (*R.*). — Sur la théorie de la transmission de la force par les machines dynamo-électriques. (518-530).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Sur les électro-aimants. (531-536).

Tome XVIII; juillet-décembre 1884.

Carnelley (*T.*). — La loi de périodicité, démontrée par certaines propriétés physiques des composés inorganiques. (1-22, 194-200).

Wiedemann (*E.*). — Sur la décharge électrique dans les gaz. (35-54, 85-97).

Trouton (*F.*). — Sur la chaleur latente moléculaire. (54-57).

Ayrton (*W.-E.*) et *Perry* (*J.*). — Le diagramme-indicateur des machines à gaz. (59-76).

Hoffert (*H.-H.*). — Un nouvel appareil pour la combinaison des couleurs. (81-85).

Glazebrook (*R.-T.*). — Sur une méthode pour mesurer la capacité électrique d'un condenseur, et sur la détermination par des observations électriques de la période d'un diapason. (98-105).

Turpin (*G.-S.*) et *Warrington* (*A.-W.*). — La viscosité apparente de la glace. (120-123).

Carnelley (*T.*). — Sur la couleur des composés chimiques en fonction des poids atomiques de leurs éléments. (130-140).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Les aimants permanents. (142-153).

Liveing (*G.-D.*) et *Dewar* (*J.*). — Sur les lignes spectrales des métaux développées par des gaz en explosion. (161-173).

Beetz (*H.-W.*). — Sur les éléments normaux pour les mesures électrométriques. (173-179).

Chase (*E.-P.*). — Le mouvement harmonique dans les systèmes stellaires. (200-204).

Edgeworth (*F.-Y.*). — Les probabilités *a priori*. (204-210).

Dewar (*J.*). — Sur la liquéfaction de l'oxygène et les volumes critiques des fluides. (210-216).

Boys (*C.-V.*). — Un phénomène magnéto-électrique. (216-225).

Thomson (*J.-J.*). — Sur la combinaison chimique des gaz. (233-267).

Croll (*J.*). — Sur la cause des climats polaires tempérés. (268-288).

Langley (*S.-P.*). — Sur la valeur de l'absorption atmosphérique. (289-307).

Kundt (*A.*). — Sur la rotation électromagnétique du plan de polarisation de la lumière. (308-327).

Blaikoley (*O.-J.*). — Expériences sur la vitesse du son dans l'air. (328-334).

Worthington (*A.-M.*). — Sur les forces superficielles dans les fluides. (334-364).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur les contrariants, une nouvelle espèce d'invariants. (374-376).

Étant données deux formes algébriques, indépendantes l'une de l'autre, ou les deux séries de variables sont contragrédientes, un invariant de ce système est un contrariant. Pour former les contrariants de deux formes quadratiques contrevariantes de n variables, f et φ, les variables étant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour f et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ dans φ, on écrira dans cette dernière, au lieu de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$,

$$\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \ldots, \frac{d}{dx_n},$$

et l'on opérera sur les puissances successives de f avec les puissances successives du symbole d'opération ainsi formé. On a de cette façon $n+1$ invariants simultanés des deux formes et indépendants.

M. Sylvester propose, pour distinguer ces diverses sortes d'invariants, d'employer la terminologie de la Botanique. L'analogie n'est point, d'après lui, de pure fantaisie, mais a son origine dans l'*Unité de la Nature*, qui reste semblable à elle-même dans ses manifestations intellectuelles et physiques.

Jellett (*J.-H.*). — Sur l'équation de Laplace. (400-404).

Si l'on considère l'espace compris entre une surface fermée dont la forme est presque sphérique et une sphère tangente comme rempli de matière attirant suivant la loi newtonienne, on a, en désignant par v le potentiel au point de contact, par a l'attraction normale en ce même point et par b le rayon de la sphère

$$(n+1)v = 2ba.$$

Telle est l'équation sur laquelle Laplace a fondé sa discussion du problème de l'attraction. M. Jellett examine l'hypothèse d'une attraction proportionnelle à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance; il est conduit à cette conclusion que l'équation de Laplace a lieu pour toutes les valeurs de n supérieures à -4, pourvu qu'on néglige le carré de l'épaisseur de la couche considérée.

Muir (*Th.*). — Un auteur oublié dans la théorie des déterminants. (416-427).

L'auteur dont il s'agit est Ferdinand Schweins, né en 1780, professeur à Heidelberg, mort en 1856. Son Ouvrage, *Theorie der Differenzen und Differentiale*, publié en 1825, contient, sous le titre : *Producte mit Versetzungen*, un véritable Traité des déterminants, divisé en quatre Sections. M. Muir donne une énumération rapide des matières contenues dans la première Section. On y trouve une théorie élémentaire complète, la résolution des équations du premier degré et un grand nombre de théorèmes intéressants, même sans tenir compte de la date de l'Ouvrage.

Kohlrausch (*F.*). — Sur la distance entre les pôles d'un aimant, les coefficients d'induction et la détermination des moments d'inertie au moyen de la suspension bifilaire. (446-454).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur l'équation quadratique d'Hamilton et l'équation générale unilatérale en matrices. (454-458).

L'auteur reprend pour l'équation $px^2 + qx + r = 0$ en quaternions les calculs de la méthode générale qu'il a indiquée dans le Volume précédent. La discussion est liée à la discussion des racines de la forme algébrique biquadratique $(a, b, m, e, f)(X, Y)^4$, qui n'est autre que le module de $x^2 + xp + q$. En ce qui concerne l'équation générale unilatérale en matrices d'ordre ω et de degré n, M. Sylvester est conduit à penser par induction que le nombre des racines est $2n^2 - n$: théorème qu'il a démontré depuis (*Comptes rendus*, 20 octobre 1884).

Buchheim (*A.*). — Preuve de la « Troisième loi de mouvement » du professeur Sylvester. (459-460).

La nullité d'un produit de deux matrices est au moins égale à la plus grande de leurs nullités et ne peut dépasser leur somme.

Loudon (*J.*). — Méthodes géométriques dans la théorie de la réfraction à la surface d'une ou de plusieurs sphères. (485-493).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Sur la répulsion supposée entre les lignes de force magnétiques. (494-495).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Applications du théorème de Möbius à l'inversion de certaines séries. (518-540).

Le théorème en question a été publié par Möbius dans le tome IX du *Journal de Crelle*. Il peut être énoncé sous la forme générale suivante : « Si $a, b, c, \ldots$ sont des nombres premiers et si l'on a

$$F(x) = \Sigma e_n f(x^n),$$

où l'on prend pour n tous les nombres de la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, on a inversement

$$f(x) = \Sigma(-1)^r e_n F(x^n),$$

où l'on prend pour n tous les nombres de la forme $a, ab, abc, \ldots$, et où r désigne le nombre des facteurs premiers de n.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME IX.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME IX; 1885. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, T. III-VII; 1878-1883. — 204-228.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 2e série, t. XII; 1883 *Supplément*. 3e série, T. I; 1884. — 28-29; 151-163.

Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, T. XV, 1880; T. XVI, 1881; T. XVII, 1882; T. XVIII, 1883. — 60-65.

Atti della R. Accademia dei Lincei, 3e série, *Transunti*, T. II-VIII, 1877-1884; *Memorie*, T. II-IX, 1877-1881. — 30-42, 169-171, 181-189.

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 5e série, T. VI-VIII, 1881-1882; 6e série, T. I-II; 1882-1884. — 176-180.

Bulletin de la Société Mathématique de France, T. XI; 1883. — 5-12.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche, pubblicato da B. Boncompagni, T. XVI; 1883. — 189-194.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, T. XCVIII (*suite*), 1884; T. XCIX, 1884. — 50-57, 127-150.

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas, publicado pelo Dr F. Gomes Teixeira, T. V; 1883-1884. — 166-169.

Journal de l'École Polytechnique, Cahier LIV; 1884. — 231-236.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par Liouville, et continué par H. Resal; 3e série, T. VIII, 1882; T. IX, 1883. — 12-28.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von L. Kronecker und K. Weierstrass, T. XCIII, 1882; T. XCIV, 1883. — 42-51, 194-204.

Mathematische Annalen, T. XX, 1882; T. XXI, 1883. — 99-114.
Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse, 7e série, T. VIII-X, 1876-1878; 8e série, T. I-V, 1879-1883. — 93-98.
Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, 2e série, T. IX, 1882; T. X, 1883. — 228-231.
Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, 3e série; T. VII-IX; 1876-1878. — 172-176.
Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (année 1880). — 121-127.
Nieuw Archief voor Wiskunde, T. X; 1884. — 57-60.
Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität (années 1876-1883). — 80-93.
Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 172, 1881; Vol. 173, 1882. — 77-80; 163-166.
The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, T. XIII-XIV, 1882; T. XV-XVI, 1883; T. XVII-XVIII, 1884. — 237-250.
The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, T. XIX; 1883. — 114-120.
Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Academie van Wetenschappen te Amsterdam, 2e série, t. XI-XIX; 1877-1884. — 65-76.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Abbadie (d'). 205, 211.
Abetti (A.). 176. 180.
Abney. 242.
Albuquerque (J.-A.). 169.
Allievi. 38.
Amigues. 150.
André (D.). 28, 29, 132, 153.
Anglin. 117.
Aoust. 22.
Appell (P.). 7, 14, 20, 109, 145, 154.
Arcais (F. d'). 174, 177.
Arzilla Fonseca (d'). 168.
Ascoli. 182, 185, 187.
Autonne. 137, 231.
Ayrton (W.-E.). 238, 242, 247.
Baehr (G.-F.-W.). 61, 66, 68, 69, 71.
Baillaud (B.). 98.
Baltzer (R.). 197.
Banhos (G.-C.-L.). 168.
Barbier (E.). 57, 138.
Barrett (W.-F.). 241.
Barros (H.). 168.
Barthélemy (A.). 94.
Basset. 118, 120.
Batelli (A.). 180.
Battaglini (G.). 31, 33, 35, 37, 184, 186, 187.
Beetz (H.-W.). 248.
Bellavitis. 176, 185.
Belpaire (Th.). 211.
Beltrami (E.). 172, 174, 186.
Benitez y Parodi (D.-M.). 167.
Benthem (A.-G.-Z.). 58.
Berloty. 139.
Berthot. 57.
Bertini. 33.
Besso. 41.
Betti (E.). 30, 35.
Bianchi. 39, 181.
Bierens de Haan (D.). 61, 62, 66, 67, 69, 71, 73, 74, 192, 194.
Biervliet (A. Van). 225.
Bingham Penrose (C.). 239.
Bjerkness (C.-A.). 81, 82.
Blaikoley (O.-J.). 244, 248.
Bobek. 9.
Boer (F. de). 75.
Bois-Reymond (P. du). 102, 109, 111 202.
Boltzmann. 239.
Boncompagni. 190, 194.
Bordiga (G.-A.). 176.
Bosanquet (R.-H.-M.). 240, 241, 247, 248, 250.
Boschi (P.). 172.
Bosscha (J.). 66.
Bourget. 20.
Boussinesq (J.). 26, 27, 52, 54.
Boys (C.-V.). 248.
Braet (G.). 226.
Brassine (E.). 95, 96, 97.
Braunmühl. 106.
Brill. 104, 106.
Brioschi. 30, 31, 33, 34, 37, 39, 142, 144, 147, 170.
Brito Limpo (F.-A. de). 167.
Browne (W.). 240, 243.
Bruno de Cabedo (J.). 168.
Brunns. 105.
Bryant (S.) 247.
Buchheim (A.). 250.
Bunsen (R.). 245.
Bueno de Mesquita. 64, 74.
Burbury (S.-H.). 238.
Buys-Ballot (C.-H.-D.). 60, 69.
Callandreau. 128.
Camus (G.). 178.
Canevazzi (S.). 175.

Cantor (G.). 84, 86, 101, 107, 114.
Caporali. 182.
Carbonnelle (I.). 204.
Cardinaal (J.). 59.
Carnelley. 247, 248.
Carnoy (J.). 209.
Casorati (F.). 35, 38, 184, 186.
Caspary (F.). 196.
Catalan. 229, 230.
Cayley (A.). 78, 114, 115, 116, 117, 118, 197, 201.
Cellérier (C.). 237.
Celoria. 36.
Cerruti (V.). 30, 32, 187.
Cesàro. 129, 230.
Chattock (A.-P.). 245.
Chase (E.-P.). 248.
Chelini (D.-P.-S.). 173.
Chervet. 130.
Chizzoni. 184.
Clark (J.-W.). 245.
Clausius (R.). 13, 237, 238, 240, 244, 245, 247.
Cockle (sir J.). 237.
Collet. 26.
Cook (E.). 239, 241.
Cordeiro (Luciano). 169.
Costa Lima (A.-F. da). 167.
Cousin (L.). 211, 226.
Cox. 116.
Craig (Thomas). 48, 198.
Croll (J.). 245, 246, 248.
Cuningham (le major A.). 238.
Darwin (G.-H.). 77, 163, 239.
David. 8, 13, 97, 98.
Dawidoff. 19.
Delsaux. 208, 212, 216, 225.
Deruyts (J.). 229, 230.
Despeyrous. 94, 95, 97.
Dewar. 244, 246, 248.
Dillner (Göran). 80.
Dobriner (H.). 197.
Domec. 205.
Donders (F.-C.). 61.
Droop (H.-R.). 241.
Dutordoir (H.). 227.
Dyck (W.). 99.
Edgeworth (F.-Y.). 243, 245, 248.
Edler (F.). 90.
Edlund. 237, 239, 247.
Endrès. 95.
Engelmann (Th.-W.). 60.
Enneper (A.). 81, 82, 84, 89, 90, 91, 92, 111, 203.
Esclaibes (d'). 211.
Everett (J.-D.). 238, 240.
Fais (A.). 172, 173, 175.
Favaro (A.). 176, 178, 180, 189, 192, 193, 194.
Favero. 187.
Ferraris. 185.
Festing. 242.
Fischer (F.-W.). 59.
Fisher (O.). 238.
Flechter (L.). 243.
Floquet. 158, 161.
Folie (F.). 228, 231.
Forestier (Ch.). 94, 96.
Forsyth. 116, 119, 164.
Fouret. 6, 145, 147.
Frattini (G.). 171.
Fresnel. 131.
Frobenius (G.). 42.
Fuchs (L.). 82, 86, 87, 91.
Gaillot (A.). 52.
Garbieri (G.). 178, 179, 180.
Gascheau. 95, 96, 97, 98.
Gasparis (A. de). 31, 32, 33, 35, 36, 38.
Gautero (G.). 30, 33.
Genocchi. 190.
Genty. 18.
Ghysens (E.). 206.
Giacomelli (F.). 171.
Gierster (J.). 85, 107.
Gilbert (P. H.). 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 217, 221, 222, 225, 226, 227.
Glaisher. 79, 115, 116, 117, 118, 250.
Glaser. 40.
Glazebrook (R.-T.). 241, 247.
Goldstein (E.). 239.
Gonçalves (M.-A.). 169.
Gordan. 106.
Goursat. 11, 54, 140, 143.
Gouy. 18.
Graefe (Fr.). 44, 46.
Graindorge (J.). 229.
Gram (J.-P.). 196.
Grandi (A.). 178.
Gravelaar (N.-L.-W.-A.). 59.
Gray (A.). 242.
Gray (T.). 242.
Greenhill. 119.
Grinwis (C.-H.-C.). 61, 62, 65, 68, 70, 71, 74.
Gronemann (H.). 61, 64.
Guichard. 163.
Gundelfinger (S.). 91.
Guyesse. 234.
Gylden. 55, 133.
H. B. 166.
Haga (H.). 63, 73.
Halphen. 234, 236.

Hamburger. 46.
Hankel. 101.
Harnack (Ax.). 111.
Hasselberg (B.). 246.
Haton de la Goupillière. 206.
Haugton (S.). 239.
Hauvel. 139.
Heath (D.-D.). 242.
Heen (de). 207.
Helmholtz. 239.
Henry (C.). 39, 191, 193.
Henry (L.). 205.
Heringa (P.-M.). 60.
Hermite (C.). 36.
Hers. 105.
Hettner (G.). 87.
Heun (Carl). 89.
Hicks. 78.
Himstedt (F.). 87.
Hölder. 102, 106.
Hoffert (H.-H.). 247.
Hofmann. 106.
Holzmüller. 199, 200, 203.
Hood (J.-J.). 246.
Hoüel (J.). 167.
Hunyadi (Eug.). 199.
Hurwitz (A.). 81, 93, 102, 194.
Imschenetsky (V.-G.). 229.
Jacobi. 193.
Janse (L.-Bz.). 58.
Jeffery. 115.
Jellett (J.-H.). 249.
Johnson. 168.
Jonquières (de). 52, 53, 55, 57, 129, 131, 132, 134, 135, 149.
Jordan (C.). 222.
Joubert. 206.
Jung. 39.
Kamensky (G.). 246.
Kantor (S.). 32, 104, 111.
Kapteyn (W.). 59, 64, 72, 73.
Kiepert (L.). 83.
Kirchhoff. 122.
Klein (F.). 32, 100, 110,
König (J.). 113.
Kœnigs (G.). 147.
Kœnigsberger (L.). 84, 86, 87, 88, 89, 91, 92, 93, 107, 114, 202.
Kohlrausch (F.). 249.
Korteweg (D.-J.). 74, 242.
Kotska (C.). 44.
Krankenhagen. 86, 87.
Krantz (H.-J.). 58.
Krause. 101, 103.
Kronecker. 42, 50, 51, 89, 121, 122, 125, 139, 201, 203.
Kummer. 125.
Kundt (A.). 248.
Lafont. 205.
Lagarde (P. de). 91.
Lagasse (Ch.). 211.
Lagrange (C.). 56.
Laguerre. 23. 147.
Lalanne. 134, 135.
Lamb. 116, 240.
Landré (Corn.-L.). 57.
Langley. 240, 245, 248.
Lapparent (de). 205.
Larmor. 120.
Larmor (J.). 238, 244.
Léauté (H.). 25, 56, 93, 94, 234.
Leconte (J.). 240.
Lecornu. 52.
Lefébure. 160.
Legebecke (G.-J.). 60, 62.
Legoux. 115.
Lemoine (E.). 5.
Le Paige. 52, 75, 136, 167, 209, 212, 228, 229.
Lévy (Lucien). 12.
Lie (S.). 105.
Lilienthal (R. von). 47.
Lindemann (F.). 103, 108.
Lindstedt. 152.
Lippmann. 139.
Lipschitz. 88, 137.
Lisleferme (H. de). 217.
Liveing. 244, 246, 248.
Locht (L. de). 208.
Lodge (O.). 119, 239, 245.
Lorentz (H.-A.). 61, 63, 70, 73, 75.
Lorenzoni (G.). 176, 177, 180.
Loudon (J.). 250.
Lucas (E.). 8, 181.
Lucas (Jose). 168.
Lüroth (J.). 113.
Mac-Mahon. 117, 120.
Maggi (A.). 35, 186, 188.
Maisano. 41.
Malet. 163.
Mangold (V.-H.). 195.
Mannheim. 14.
Mansion (P.). 207, 208, 209, 210, 211, 212, 216, 217, 225, 226, 227.
Marre (A.). 167.
Marrecas Ferreira (L.-F.). 167, 169.
Mathieu (E.). 12, 18.
Maxwell (H.-C.). 240.
Mees (R.-A.). 68, 69, 70, 75.
Meissel. 111.
Menabrea. 132.
Mendès (R.). 169.
Méray. 158.
Meyer (F.). 110, 113, 114.

Michaelis (G.-J.). 62.
Michaelis (N.-Th.). 72.
Michelson (A.-A.). 237.
Millosevich (E.). 39, 40, 170, 171.
Minich (S.-R.) 176.
Molins (H.). 94, 96, 98.
Morera (Giacinto). 41.
Muir (Th.). 245, 249.
Narducci (E.). 168.
Neuberg (J.). 230.
Newcomb (S.). 245.
Niven. 77.
Nœther (M.). 49, 101, 110, 113.
Ocagne (M. d'). 10, 139, 140, 148, 169.
Oppolzer. 121, 122.
Oudemans (J.-A.-C.). 67, 68, 71, 72.
Padova. 178, 179.
Paolis (de). 181, 183, 188.
Paxton Young (G.). 167.
Pellet. 56.
Pepin. 216.
Perrin. 7, 9.
Perott. 11.
Perry. 210, 216, 238, 242, 247.
Petersen. (J.). 83.
Petot. 53.
Picard (E.). 5, 141, 144, 149, 151.
Picquet. 233.
Poincaré. 9, 10, 16, 101, 130, 138, 141, 146, 149.
Pringsheim (A.). 113.
Pringsheim (E.). 240.
Prost. 119.
Prym (F.). 45.
Puiseux (V.). 205.
Quincke (G.). 245, 247.
Rausenberger (O.). 49, 100, 103, 106, 108, 201.
Rayleigh (Lord). 239, 240, 241, 242, 243, 245.
Realis. 190.
Reggio (Z.). 176, 177.
Regnon (de). 206.
Resal (H.). 13, 16, 19, 21, 23, 24,
Respighi (L.). 36, 37, 38, 39, 40, 41.
Rethy (Moritz). 81.
Reye (Th.). 44, 202.
Riecke (E.). 80, 81.
Ricci (G.). 177.
Righi (A.). 173, 174.
Riley (J.). 240.
Rink (H.-J.). 63, 66, 120.
Rocha Peixoto (A.-F.). 166.
Rodet (L.). 193.
Rodrigues (J.-M.). 169.
Routh. 119.
Rowe. 78.
Rowland. 246.
Ruffini (F.-P.). 173, 174.
Runge (C.). 49, 204.
Ryke. 69.
Saint-Germain (de). 18.
Saint-Robert (de). 32, 185.
Saint-Venant (de). 51, 127.
Salvert (de). 208, 212, 222.
Saporetti. 173.
Serrasqueiro (J.-A.). 168.
Schering (Ernst). 85.
Schiappa Monteiro. 168.
Schiaparelli (G.). 36, 38.
Schiff. 27.
Schiötz (O.-F.). 82.
Schols (Ch.-M.). 63, 72, 73.
Schotsky. 104.
Schoute (P.-H.). 58, 67, 69, 71, 76.
Schrœter (H.). 45, 103.
Schubert (Herm.). 80, 81, 82, 87.
Schur (F.). 103, 114.
Schwering. 50.
Schwartz (H.-A.). 91.
Shelfford Bidwell. 246.
Siacci. 32, 34.
Siattesi (A.). 194.
Siemens (Sir W.). 242.
Silva (J.-A. Martins da). 166, 167.
Silva (Duarte Leite Pereira da). 166.
Sohnke (L.). 207.
Sparre (de). 143, 222.
Spottiswoode. 40, 77.
Sthal (Wilhelm). 47, 203.
Staude (O.). 102, 110.
Stearn. 117.
Steinschneider. 193.
Stéphanos. 160.
Stieltjes (T.-J.). 64, 65, 73, 74, 136, 140, 161.
Stolp (C.). 58.
Study. 200.
Sturm (R.). 113, 114.
Sundell (A.-F.). 238.
Suttor. 226.
Sylvester (J.-J.). 51, 53, 127, 130, 131, 135, 136, 137, 240, 242, 243, 244, 246, 248, 249.
Tacchini (P.). 36, 39, 40, 42, 169, 170, 171.
Tait. 244.
Tannery (J.). 55.
Teixeira (F. Gomes). 166, 167, 168, 169, 226, 230.
Teixeira Bastos (H.). 168.
Thieme. 102.
Thomæ (J.). 43, 82, 83, 92, 200.
Thomson (C.). 246.

Thomson (J.-J.). 163, 238, 241, 248.
Thompson (Silv.-P.). 237, 240.
Tilly (de). 221.
Tisserand (F.). 53, 93, 94.
Tomlinson (H.). 246.
Tresca. 131.
Tribe (A.). 243.
Trouton (F.) 247.
Trowbridge (J.). 239.
Tucker. 120.
Turazza (D.). 180.
Turpin (G.-S.). 248.
Turquan (L.-V.). 210, 226.
Tyndall (J.). 238, 244, 245.
Uzielli (G.). 194.
Vallier. 24.
Van den Berg (F.). 59, 62, 70, 71.
Van der Ven (E.). 63.
Van der Stok (J.-P.). 62.
Van der Waals (J.-D.). 65, 66, 70, 71.
Vaneeck (J.-S.). 9, 139, 142, 143, 230.
Vaneeck (M.-N.). 9, 139, 142, 143.
Van Geer (P.). 64, 65.
Van Hasselt (W.). 67.
Van Schaik (W.-C.-L.). 63, 64.
Vansittart Neale (E.). 239.
Van Tricht. 209, 217, 221.
Van Zanten (L.). 58.
Véronèse (G.). 34, 36, 177, 179, 180, 188.
Vernon Boys (C.). 237, 238.
Vienna (D.-G.). 166.
Violi (A.) 169.
Vogel (H.). 239.
Volpicelli. 30, 183.
Volterra (V.). 170, 171.
Vries (J. de). 58.
Ward (J.). 226.
Warrington (A.-W.). 248.
Weber. 104.
Weierstrass. 124.
Weill (M.). 142.
Weingarten (J.). 199.
West (E.). 13, 14, 27.
Weyr (Ed.). 54.
Weyr (Em.). 230.
Wiedemann (E.). 247.
Wiedemann (G.). 239.
Wiltheiss (E.). 113.
Woodhouse (L.). 169.
Worpitzky (J.). 200.
Worthingthon (A.-M.). 240, 243, 248.
Wright (A.). 246.
Yung (E.). 241.
Zeller (Ch.). 7, 85.
Zeuthen (H.-G.). 167.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME IX.

10534 Paris. — Imp. de Gauthier-Villars, quai des Augustins 55.

QA
1
B8
v. 20
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Bulletin des sciences
mathématiques

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY